CIEMAC

Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora

TEC Tecnológico de Costa Rica

MEMORIAS

I Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora

Cartago, Costa Rica

1999

Instituto Tecnológico de Costa Rica. Escuela de Matemática. Teléfono: (506) 2550 2225
www.tec.ac.cr/congresociemac

I CONGRESO INTERNACIONAL DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA ASISTIDA POR COMPUTADORA

Celebrado del 13 al 15 de diciembre de 1999
en el Instituto Tecnológico de Costa Rica,
organizado por la Escuela de Matemática.

Cartago, Costa Rica.

José Luis Espinoza B.

Editor

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Cartago, COSTA RICA, 1999.

Contenido

Parte I. – Situaciones de aprendizaje apoyadas con aplicaciones de software

Parte II. – Internet y educación

Parte III. – Minicursos y talleres

Parte IV. – Metodologías e ideas para el mejoramiento de la enseñanza de la matemática

Presentación

Los trabajos presentados en este Primer Congreso Internacional de Enseñanza de Matemática Asistida por Computadora (I CIEMAC) reflejan el gran esfuerzo que se está haciendo en muchos países latinoamericanos por aprovechar el avance tecnológico para el mejoramiento de la enseñanza de la matemática en todos los niveles de la educación formal.

Si bien es cierto que vamos muchos pasos atrás de la tecnología en la creación de software educativo y de ambientes interactivos adecuados para la enseñanza de la matemática, ya se han estado realizando aplicaciones muy interesantes por parte de profesores y estudiantes de enseñanza de las matemáticas, y el futuro se muestra muy prometedor, ahora que prácticamente los ambientes de programación visual y de multimedios han venido dominando el interés de quienes están dispuestos a realizar aplicaciones. El aula virtual constituye una forma novedosa de enseñanza que puede aprovechar los avances recientes en telecomunicaciones, la masificación del uso de computadoras en los centros educativos y en los hogares. Pero lo más importande es que hay una buena disposición de profesores y estudiantes a capacitarse en el uso de tecnologías innovadoras.

Desde hace algunos años, en Costa Rica se han hecho esfuerzos importantes para hacer un mayor uso de las computadoras en la enseñanza de la matemática y la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica ha dado una buena cuota de trabajo tras haber comenzado, en 1996, la carrera de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, el haber organizado, junto con la Fundación Cientec, el Primer Festival de Matemática, en el que se expusieron los primeras aplicaciones de software realizadas por profesores y estudiantes. El presente congreso va mucho más allá de nuestras fronteras, al contar con la distinguida participación de profesores e investigadores de Colombia, Perú, Bolivia, Argentina, Cuba, México, Estados Unidos, España y Costa Rica.

Para este Primer CIEMAC nos hemos propuesto lograr en conjunto con los participantes:

- La construcción de un espacio para la reflexión sobre los alcances de utilizar computadoras y software para apoyar los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática.
- La confrontación con formas alternativas de apoyar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática con computadoras y software.
- La conciencia sobre las oportunidades y los retos que plantea la incorporación de la computadora como elemento didáctico en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática.
- El empleo de diversas tecnologías en el desarrollo de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.
- El análisis del impacto social del empleo de tecnologías en los procesos educativos.
- La retroalimentación del trabajo académico realizado en la Escuela de Matemática del ITCR para la formación de educadores y educadoras en el campo de la enseñanza de la matemática asistida por computadora.

Esperamos marcar con esta actividad el inicio de un gran trabajo de cooperación entre los países participantes, para la creación y difusión de nuevos paradigmas para el mejoramiento de enseñanza de la matemática.

En nombre del comité organizador, agradezco profundamente las contribuciones académicas hechas por todos los colegas extranjeros y nacionales, al compartir sus experiencias e ideas, así como a todos los estudiantes que han estado presentes en esta actividad en la parte organizativa, como ponentes o como participantes. Debemos felicitar especialmente a estos últimos por las aplicaciones de software educativo que han realizado y que están exponiendo durante el congreso. Debo agradecer también el valioso aporte dado por las señoritas Mercedes Peraza y Adriana González, quienes colaboraron como asistentes para la edición de esta memoria.

Se ha dividido el documento en cuatro partes: La primera parte, llamada *Situaciones de aprendizaje apoyadas con aplicaciones de software*, es una recopilación de aplicaciones realizadas por estudiantes y profesores mediante mutimedios, calculadoras, `Derive`, `Mathematica`, `Geometer's Sketchpad` y `MATLAB`. La segunda parte agrupa dos trabajos que tratan acerca del *uso de Internet en la educación*. En esta parte se establece un marco conceptual para el desarrollo de aplicaciones educativas en este medio y promete ser uno de los medios más importantes para el futuro. La tercera parte contiene algunos de los *minicursos y talleres* que se imparten. Finalmente, la cuarta parte agrupa diversas ponencias sobre *metodologías e ideas para el mejoramiento de la enseñanza de la matemática*.

José Luis Espinoza B.
editor
Cartago, Diciembre de 1999.

Parte I

Situaciones de aprendizaje apoyadas con aplicaciones de software

PracMat : una herramienta para el estudio y preparación para el examen del bachillerato en matemáticas

- Maynor Jiménez Castro*

Resumen

En este artículo se describe el trabajo realizado en el Seminario de Investigación y Profundización con estudiantes de la Carrera de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, el cual, consiste en el desarrollo de una aplicación multimedia dirigida a estudiantes de undécimo año y orientada al estudio y preparación para realizar la prueba de Bachillerato en Matemáticas. En esta se tratan algunas fases de la herramienta, en su objetivo por preparar al estudiante ante dicha prueba.
Esta herramienta considera el desarrollo de los temas evaluados en el Examen de Bachillerato, asumiendo un conocimiento previo aceptable de ellos, lo que la hace una aplicación para el afinamiento y evaluación de conceptos.

Palabras Clave: Multimedios, Examen de Bachillerato, Software Educativo, Números Enteros, Algebra, Funciones, Función Exponencial , Función Logarítmica, Geometría, Trigonometría.

Introducción

En la era de la informática y las telecomunicaciones, la generación y obtención de información ha cambiado nuestra forma de vida y por ende los procesos de aprendizaje. La adquisición del conocimiento no se limita a una revista o libro, sino a considerar la gran diversidad de fuentes de información con las que contamos.

Aunque desde sus inicios el computador ha tenido una orientación académica, no es sino hasta hace poco tiempo que incursiona en el campo educativo como una herramienta más a utilizar en el salón de clases. Esto obedece a un fenómeno mundial, en donde el uso del computador se ha vuelto fundamental para realizar todo tipo de labor.

En el sector educativo, el computador ha tomado un rol importante para la generación de destrezas en los educandos, antes costosas de implementar. La incorporación de la tecnología multimedia en el computador, ha vuelto los ojos a este campo tan olvidado, pero que ahora ha despertado tanto interés a la investigación. En los sistemas de multimedios se reúnen todos los medios de comunicación a los que estamos acostumbrados, con la ventaja de tener organizada la información y de facilitar la navegación por ella, según los intereses, necesidades o simples preferencias de interacción (ver [2]).
Sus beneficios en el ámbito educativo ha creado la necesidad de incorporar en los planes de estudio de carreras docentes como la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, cursos identificados con la modernización de la educación, lo que se ve reflejado en el interés mostrado por los estudiantes L. Alcazar, S. Arce, A. Blanco, R. Brenes, H. García, I. Herrera, M. Marrero, M. Mattioli, J. Mora, C. Mora, K. Piedra, M. Ramírez, S. Ramos y L. Rodríguez, en iniciar un proyecto para construir una aplicación que evalúe los diferentes conceptos a los que se enfrentará el educando al realizar la prueba de bachillerato.

Así, el objetivo de este documento es describir en forma general el primer avance del proyecto *PracMat* el cual es el producto del trabajo realizado en el curso Seminario de Investigación y

* Profesor, Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, e-mail: mjimenez@ice.co.cr.

Profundización ofrecido en el II periodo de 1999, cuya finalidad es motivar la generación de material educativo multimedia.

En la primera parte del documento se describirá el enfoque pedagógico y las orientaciones generales del diseño; luego se ilustra la aplicación y algunas sesiones de aprendizaje, concluyendo con algunas observaciones.

Concepción Pedagógica

Conocidas las debilidades que muestran los estudiantes que aplican las pruebas de bachillerato en la Matemática y el interés en contribuir con el mejoramiento de la educación costarricense, se ha iniciado el desarrollo de una aplicación que permite ejercitar y evaluar el conocimiento adquirido por el educando en el proceso de preparación para enfrentar el examen de Bachillerato en Secundaria.

PracMat parte del hecho que el estudiante ha tenido una preparación previa al uso de este software, pues su objetivo general es evaluar los conceptos en los que se fundamenta el examen de bachillerato. Sin embargo, cuenta con información de apoyo a la enseñanza y un glosario de términos matemáticos. Por esta razón, y de acuerdo con la clasificación dada en [2], *PracMat* es considerado una aplicación de apoya al aprendizaje, en donde se explota la capacidad de representación de la realidad (mediante el uso de la imagen, sonido, video, etc) y las posibilidades de interacción del usuario con la herramienta.

Generalidades del Diseño

PracMat ha sido desarrollada en Macromedia Director 6.5, que es el software utilizado por excelencia para el desarrollo de material multimedia. Este consta de varias metáforas en su interfaz, según los ejes temáticos del examen de bachillerato, Números Reales, Algebra, Geometría, Trigonometría, Función Lineal y Función Exponencial. Estas se describen a continuación.

Números Reales y Algebra

Ambos temas se abordan con una metáfora que representa una sala de video juegos, la cual tiene como objetivo el reforzar y evaluar por medio de juegos, cada uno de los subtemas contenidos en los área de álgebra y números reales presentes en el temario para el examen de bachillerato. El diseño de esta metáfora se puede observar en la figura 1. La que consiste en cuatro máquinas, dos para cada uno de los temas.

Figura No. 1: Metáfora para Números Reales y Algebra

El usuario será guiado por un mago (personaje principal), el cual indica cómo iniciar en un tema dado. Esta acción se logra pasando el mouse o ratón por la parte superior de las máquinas (dónde se describe el tema), así, se podrá dar inicio en el tema seleccionado.

Por ejemplo, dentro del tema de Algebra, se puede encontrar un juego para evaluar las ecuaciones de primer grado con una incógnita, el cual consiste en el recorrido que hace un personaje resolviendo diferentes ejercicios que se le presentan en el camino por medio de estrellas. Este se muestra en la figura 2.

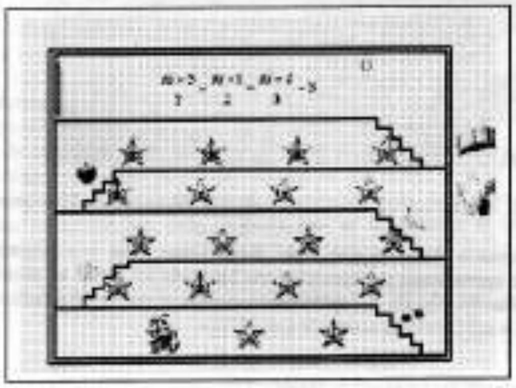


Figura No. 2: Juego de Ecuaciones

Aquí el personaje se encuentra con un primer obstáculo, una estrella, que representa un ejercicio por resolver. Este se genera en forma aleatoria y se muestra en la parte superior de la imagen con su lugar respectivo para la respuesta. Si el usuario no responde adecuadamente la pregunta que se le presenta, no podrá continuar. Una vez que responde bien podrá avanzar a la siguiente estrella dónde se repite el procedimiento anterior. Al pasar por las gradas, el usuario obtendrá bonos de puntos que equivalen a un ejercicio resuelto correctamente. Como mínimo el usuario tendrá que responder 19 preguntas por juego y el puntaje total dependerá de la cantidad de preguntas.

Al lado derecho de la pantalla se presentan dos iconos los cuales conforman la ayuda correspondiente al tema (libro) y el puntaje obtenido al final del juego (pergamino).

Al contestar todas las preguntas que se le presentaron por medio de las estrellas encontrará al otro lado de la puerta (representada por la línea café) un baúl con una sorpresa.

Posteriormente, el usuario puede seleccionar otro juego, ya sea en la misma máquina o en otra.

Geometría y Trigonometría

La metáfora utilizada en este campo de la Matemática representará un aeropuerto (ver figura 3), en el cuál el usuario ayudará a un personaje, el turista, a recorrer los paisajes y aventuras que vive al visitar ciertas regiones. En cada visita se presenta un problema geométrico o trigonométrico a resolver.

Figura No. 3: Interfaz inicial en Estereometría, Geometría y Trigonometría

En esta pantalla, el usuario decide a que lugar desea viajar. Una vez seleccionada la región, se presenta una situación de aprendizaje; por ejemplo, una hacienda en donde se encuentran cuatro vacas, las cuales cada trio de ellas forman un triángulo arbitrario, en el que deberá hallarse la medida de los lados dados. En la figura 4 se muestra la sesión de aprendizaje.

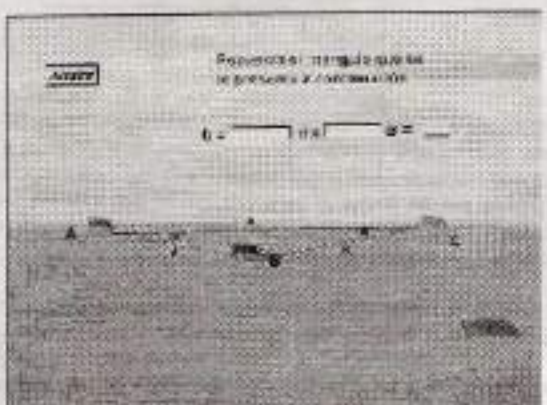


Figura No. 4: Sesion de aprendizaje en trigonometria

En ella aparecerá un mensaje que dice lo siguiente: "Escoja sólo tres vacas", no importa el orden, los vértices aparecerán como A, B, C., según la selección del usuario. El triángulo depende de cómo se escojan las vacas. Una vez que se escogen, aparece el triángulo con los datos dados y con las casillas para completar la información. La respuesta se evalúa y en caso de error se hace conocer, no así para el acierto.

Función Lineal y Función Exponencial

Esta sección se ambienta en el antiguo egipto e indirectamente, expone al usuario a una serie de situaciones en las que debe interactuar con el programa a la vez que resuelve algunos ejercicios.

El principal objetivo radica en afinar el conocimiento que el usuario posee con respecto al tema de funciones. Por ello, se presenta una serie de ejercicios para que al ser resueltos se cumpla el objetivo antes mencionado.

Por ejemplo, en la figura 5, el usuario debe seleccionar la esfinge, la cual le presentará una pregunta del tema de ecuaciones lineales. La forma de encontrar la respuesta es: deslizar el mouse sobre los diversos elementos presentes en la pantalla, cada uno de ellos le propone una posible respuesta al problema presentada, por lo que el usuario debe localizar la que es correcta y darle un click. Al ser correcta la elección desaparecerán el primer grupo de pines y así sucesivamente hasta finalizar con los tres grupos de pines y lograr con ello avanzar hasta la siguiente escena.

Como un mecanismo de evaluación y desempeño se consideran el tiempo y el puntaje, lo que significa que existe un tiempo predeterminado para resolver cada pregunta; por lo que si éste se acabase, el programa cambia de pregunta, automáticamente. El puntaje se asigna según la rapidez con la que se conteste, a razón de cinco puntos por el tiempo restante de un minuto, que es el tope de tiempo que se maneja. Cabe destacar que ésta, al igual que el resto de sesiones, sólo permiten un máximo de tres opciones de respuesta incorrecta por cada pregunta que se le propone al usuario, luego, el mismo programa cambia la pregunta.

Figura No. 5: Funciones y su ambiente egipcio.

En general, *PracMat* facilita la interacción con el usuario y ante todo, que éste se divierta mientras aprende. Cabe destacar que una vez que finalice o decida salirse del programa, se le presentará su puntaje total y se le ingresará a un "salón de records" en el que se encuentran los nombres y los puntajes de los cinco mejores usuarios. Esto servirá de estimulo para que él mismo intente obtener un puntaje mayor (mayor grado de experticia) y con ello ingresar a dicho salón.

Conclusiones

La tecnología multimedia permite el desarrollo de aplicaciones educativas interactivas que facilitan la adquisición de conocimiento y los procesos de aprendizaje. Por ello el interés en llevar estos recursos a los centros educativos de nuestro país, y en particular, desarrollar aplicaciones que puedan ser utilizadas como un complemento a esos procesos de aprendizaje generados en la educación secundaria.

Si bien es cierto, el desarrollo de aplicaciones multimedia conlleva mucho esfuerzo y trabajo de un grupo interdisciplinario de profesionales, hoy en día, podemos utilizar esta tecnología para dar a conocer de una forma novedosa, ideas un tanto abstractas y difíciles de explicar.

Cabe destacar que este es el resultado del primer avance del proyecto y que debe ser sometido a evaluación directa por la población a la que está dirigido, lo cual generará nuevos insumos para continuar desarrollando más material educativo multimedia.

Es importante seguir motivando a las futuras generaciones de docentes, sobre el uso que podemos dar al computador para mejorar nuestro sistema educativo. Sin una visión clara, el uso de la tecnología como un fin en si mismo nos seguirá consumiendo.

Bibliografía

[1] Allis, Lee. *Inside Macromedia Director 6 with Lingo*. New Raidres Publishing. USA, 1997.

[2] Elizondo, Rosa Elva. *Tecnologías de multimedios -Una perspectiva educativa*. Conferencia del Módulo 9 del CREAD. Monterrey, México, 1993. http://www.mty.itesm.mx/dcic/centros/ciete/fondomul/tecmul.htm.

[3] Jiménez C, Maynor. *Curso de Lingo con Director 6.5*. Notas del Curso de Multmedios en la Educación, ITCR,Costa Rica, 1999.

[4] Rojas D, Gonzalo. *Investigaciones Actuales en Tecnología de Multimedios*. Departamento de Ingeniería Informática y Ciencias de la Computación, Universidad de Concepción, Chile, 1998. http://www.inf.udec.cl/grojas/tecmm/rojas.doc.

[5] Sancho Ch, Lilliana. *La computadora, recurso para aprender y enseñar*. Primera Edición. Editorial UNED. Costa Rica, 1997.

[6] Valverde B, Jesús. *Diseño y Elaboración de Materiales Educativos Multimedia*. España, 1999. http://personal2.redestb.es/jevabe/diapo1.htm.

Conceptos de cálculo diferencial presentados por medio del computador

Walter Mora F.; Julio Rodríguez S.[1]

Resumen

En esta ponencia se presentan ejemplos en los cuales se usa el computador para la enseñanza de algunos conceptos del cálculo diferencial. Se trata de aprovechar las capacidades gráficas, de cálculo simbólico, de almacenamiento y velocidad del computador para presentar una serie de situaciones de aprendizaje que le ayuden al estudiante a asimilar conceptos o resultados matemáticos por medio de la presentación de diferentes casos particulares. El material elaborado permite al profesor o al estudiante experimentar con diferentes tipos de funciones los conceptos o resultados de la teoría que se está desarrollando.

Palabras clave: Enseñanza asistida por computadora, cuadernos interactivos, animaciones en la enseñanza.

1. Introducción

El trabajo que aquí se expone parte de la premisa de que el computador puede ser utilizado como medio de comunicación entre el profesor y el estudiante, con el fin de hacer más eficaz la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Básicamente se trata de aprovechar las capacidades gráficas, de almacenamiento y velocidad del computador para presentar al estudiante una serie de situaciones de aprendizaje basadas en el uso de cuadernos interactivos diseñados y elaborados previamente y que permiten al profesor ilustrar algunos conceptos o algunos resultados, a la vez que el estudiante puede experimentar confrontando la teoría con algunos ejemplos o bien verificar la solución de algunos ejercicios.

Las capacidades de graficación de *Mathematica* 3.0 claramente constituyen una gran herramienta para estos objetivos ya que nos permiten llevar animaciones a la clase para visualizar mejor el conocimiento y nos permite proporcionar a los estudiantes textos interactivos que le ayuden a visualizar y contrastar sus cálculos sin necesidad de generar ni estar en contacto con el código del notebook. En este artículo presentamos algunos "cuadernos interactivos" que han sido usados con los estudiantes del curso EM_1903 Cálculo I de la carrera "Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora", en los cuales el usuario tiene acceso a ejemplos y al despliegue de gráficos con solo hacer "click" sobre un botón. También puede digitar funciones de acuerdo a su interés sin necesidad de estar en contacto con el código correspondiente.

2. Algunos Conceptos Ilustrados

2.1 Incrementos y Diferenciales

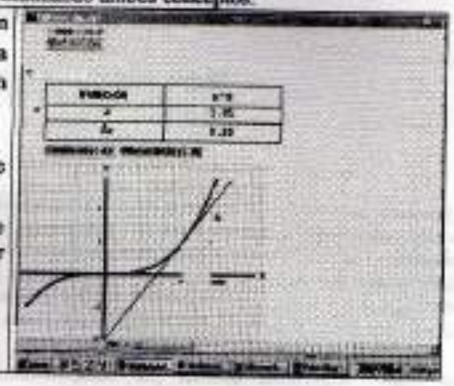
Para facilitar la comprensión de estos conceptos por parte del estudiante, se diseñó y se implementó el "cuaderno interactivo" que se muestra a la derecha en la tabla siguiente. En este cuaderno el usuario (profesor o estudiante) puede introducir la función y los valores de **a** y el incremento Δ_x que desee. Por medio del botón **"Cambio en y: Δy"**, el programa despliega el gráfico de la función mostrando el incremento Δy correspondiente al incremento Δx. De manera similar, por medio del botón **"Diferencial**

[1] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, email: wmora@itcr.ac.cr

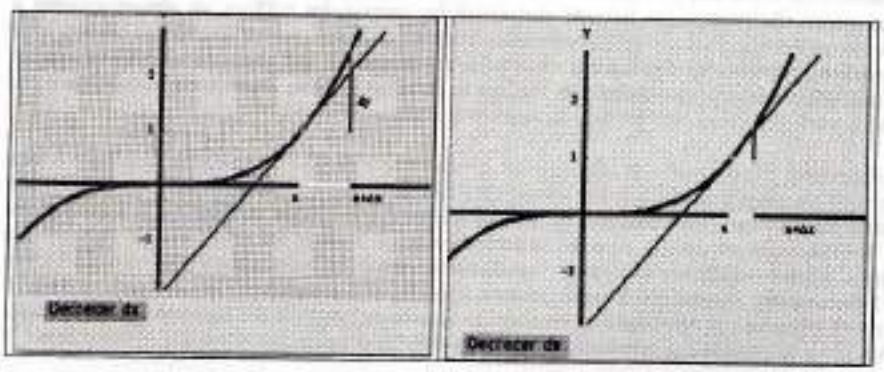
dy", el programa despliega el gráfico de la función mostrando el diferencial *dy* correspondiente al incremento Δx junto con el incremento en y, enfatizando ambos conceptos.

Definición: Sea $y = f(x)$, una función derivable en un punto x del dominio de *f*, y sea Δ_x un incremento de x, tal que $x + \Delta_x$ está en el dominio de *f*.

1. La diferencial *dx* de la variable independiente x está dada por $dx = \Delta_x$.
2. La diferencial *dy* de la variable dependiente y está dada por $dy = f'(x) \cdot \Delta_x$.



En la siguiente tabla se representan estos conceptos para diferentes valores del incremento Δx. Se dipone de un botón **"Decrecer dx"** con el cual se puede hacer tender Δx a cero.



2.2 Teorema del Valor medio

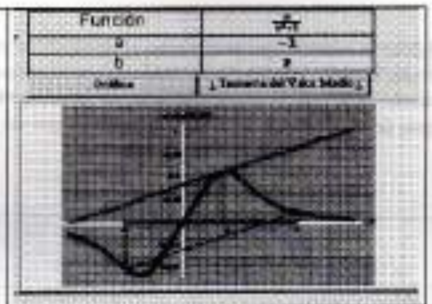
Teorema

Si f es una función tal que

- f es continua en $[a\ ,\ b]$
- f es derivable en $]a,b[$

Entonces existe $c \in\ ]a,b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



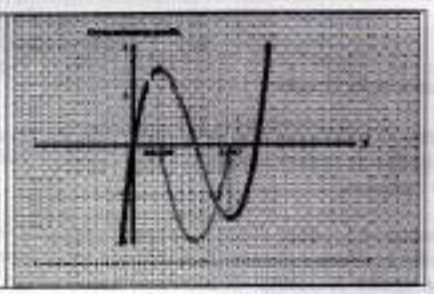
Para facilitar la comprensión de este teorema por parte del estudiante, se le presenta el "cuaderno interactivo" que se observa a la derecha del teorema. En este cuaderno el usuario (profesor o estudiante) puede introducir la función y los valores de a y b que desee. Por medio del botón **"Gráfica"**, el usuario despliega el gráfico de la función y por medio del botón **"Teorema del valor medio"**, despliega la cuerda que va desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ y también una **tangente paralela a esta cuerda** cuya existencia está garantizada por la conclusión de este teorema. El programa elaborado calcula el punto de tangencia e indica la abscisa $x = c$ correspondiente a dicho punto.

2.3. Análisis de Variación de funciones

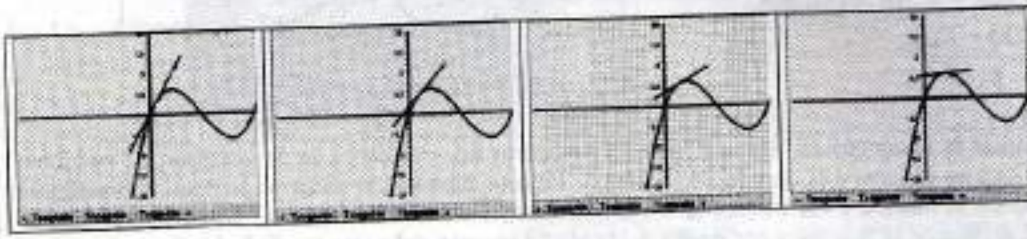
Para el análisis de variación de funciones se ha diseñado y elaborado un "cuaderno interactivo" que, por medio de botones, permite al usuario introducir diferentes funciones y para cada una de ellas, analizar aspectos tales como su crecimiento, su concavidad, la determinación de los valores máximos y valores mínimos, así como su relación con la derivada correspondiente.

En la tabla que sigue se observa, a la izquierda, parte del cuaderno y a la derecha el resultado de hacer "click" en el botón de comparación entre f y f'. Esta imagen muestra la gráfica de una función f junto con su primera derivada, destacando la relación que existe entre la función y la derivada con respecto a los valores máximos y valores mínimos y en cuanto al crecimiento y decrecimiento de la función. En forma similar, se puede activar el botón correspondiente a f y f'', por medio del cual se puede apreciar la relación entre la cocavidad del gráfico de f y el signo de f''.

El intervalo donde se dibuja el gráfico de las funciones es escogido de manera automática de tal modo que incluya los puntos críticos.



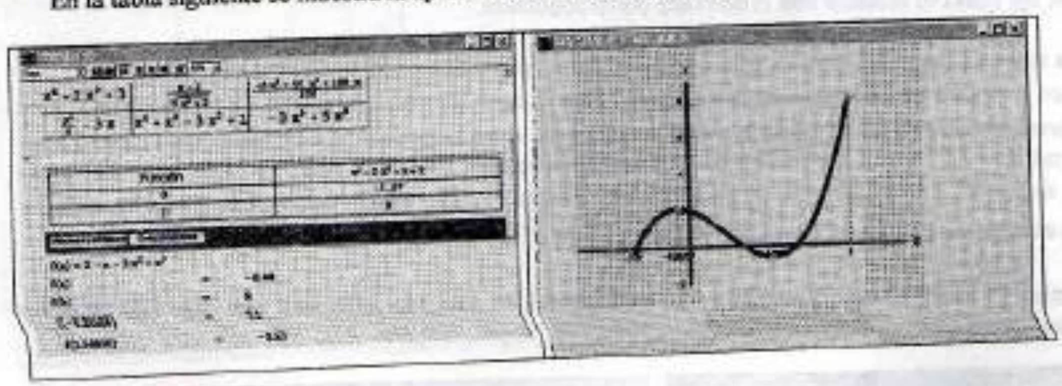
Para ilustrar la relación que existe entre el crecimiento o el decrecimiento de una función con el signo de su derivada, también se elaboró un cuaderno interactivo que permite, por medio de un botón, animar el desplazamiento de la recta tangente a lo largo de la gráfica de la función, destacando la relación que existe entre el signo de la pendiente de la recta tangente (signo de $f'(x)$), y el crecimiento o decrecimiento de la función.



2.4. Máximos y Mínimos Absolutos

Para reforzar el concepto de máximos y mínimos absolutos de funciones se diseñó y elaboró un "cuaderno interactivo" que, por medio de botones, permite al usuario introducir una función y un intervalo para determinar sus valores máximos y sus valores mínimos absolutos en el intervalo seleccionado, a la vez que permite el cálculo de las imágenes correspondientes a los puntos extremos del intervalo y los puntos donde se alcanzan los valores máximos y mínimos relativos, permitiendo así comparar y obtener los valores máximos y mínimos absolutos de la función.

En la tabla siguiente se muestra la aplicación de este cuaderno para el caso de una función específica.

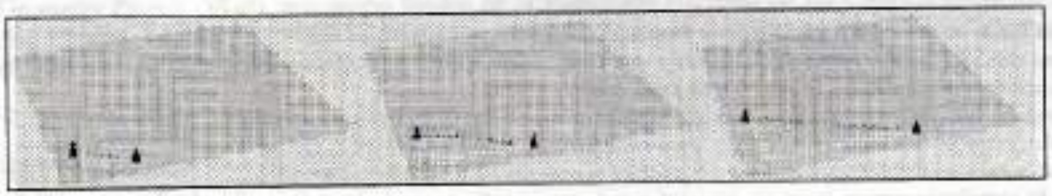


2.5. Razones Relacionadas

En este tema se resolvieron problemas elaborando animaciones que modelan las diferentes situaciones co[n] el fin de facilitar la comprensión del mismo por parte del estudiante. A manera de ejemplo consideremos e[l] siguiente problema.

Dos barcos A y B salen de un mismo punto. El barco se desplaza en dirección norte a una velocida[d] de 39 millas por hora y el barco B se desplaza en dirección este a una velocidad de 25 millas por hor[a] ¿Con qué rapidez se separan los barcos 30 minutos después?

Para modelar la situación descrita en el problema anterior se elaboró una animación que permite ilustrar el recorrido de ambos barcos para diferentes instantes de tiempo. Esta animación permite al estudiante comprender el enunciado del problema, facilitándole el planteo y la solución del mismo.



3. Conclusiones

El trabajo que hemos desarrollado nos permite llegar a las siguientes conclusiones:

- Permite al profesor presentar conceptos haciendo referencia a su interpretación geométrica
- Permite al profesor la explicación de diferentes situaciones (como problemas o ejercicios) por medio de animaciones
- Permite al estudiante la exploración de diferentes situaciones facilitándole la comprensión de conceptos y la solución de ejercicios.

A pesar de las ventajas del uso de cuadernos interactivos en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática citados en el párrafo anterior, debe tenerse claro que éstos deben considerarse como una herramienta que debe usarse con discreción, pues el abuso de esta herramienta podría resultar cansado y tedioso para el estudiante.

Bibliografía

[1] Apostol, Tom. *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, 1977.
[2] Bartle, Robert G. *Introducción al Análisis Matemático*, Editorial Limusa, 1987.
[3] Edwards, C. Henry. *Cálculo con Geometría Analítica*, Editorial Prentice Hall, 1996.
[4] Hernández, Elsie. *Límites y Continuidad de Funciones*, Taller de Publicaciones, ITCR, 1984.
[5] Maeder, R. *Programing In Mathematica*, Addison-Wesley, NY, 1998.
[6] Mora, W. *Mathematica Media 3.0: Manipulación de Notebooks*, ITCR. Escuela de Matemática, 1998.
[7] Rodríguez, Julio. *Aplicaciones de la Derivada*. ITCR. Escuela de Matemática, 1999
[8] Stewart, James. *Cálculo*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.
[9] Swokowski, Earl. W. *Introducción al Cálculo con Geometría Analítica*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1987.
[10] Wolfram, S. *The Mathematica Book*, Addison-Wesley, NY, 1999

Enseñanza y aprendizaje de funciones con apoyo de *Geometer's Sketchpad*

L. Gerardo Meza C.

Resumen

Uno de los temas de mayor importancia en la formación matemática lo constituye el tema de funciones. Sabemos que es un tema con una amplia gama de subtemas y que tiene, además, una de los mayores potenciales para generar aplicaciones de la matemática a la solución de problemas prácticos.

Es también uno de los temas que más dificultades presenta en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, como se evidencia en investigaciones realizadas en nuestro país y en el extranjero.

Por estas razones es necesario generar propuestas novedosas para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de estos temas, y la tecnología parece tener un especial papel que cumplir en esta tarea. Con este objetivo en mente he programado diversas sesiones de aprendizaje para el tema en el programa Geometer's Sketchpad, algunas de las cuales se muestra en esta obra.

1. Propósito

En este trabajo se discute sobre estrategias didácticas para el logro de algunos de los objetivos contenidos en el "***Programa de Matemática***" del Ministerio de Educación Pública correspondientes al tema de funciones, en las que se utiliza el programa *Geometer's Sketchpad* como herramienta didáctica.

Es nuestro propósito evidenciar que el programa *Geometer's Sketchpad* puede ser de utilidad para la enseñanza de otros temas además de los puramente geométricos. Además, mostrar que es posible generar ambientes de aprendizaje caracterizados por la exploración, el descubrimiento, el trabajo en equipo y la comunicación de resultados.

2. Dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del tema funciones

Diversos autores sugieren que la enseñanza de las funciones conlleva dificultades. Para fundamentar esta afirmación nos limitaremos a las conclusiones obtenidas por la investigadora Martha Olivera en 1988, en un estudio realizado en instituciones oficiales de educación secundaria mexicanas. Las conclusiones de esta investigadora son las siguientes:

- No es fácil evaluar el aprendizaje de la noción de función en forma aislada, ya que la falta de dominio en el cálculo aritmético o en el manejo del lenguaje algebraico intervienen en forma definitiva en la resolución de las cuestiones.
- Los alumnos de tercero muestran progresos respecto a los alumnos de primero en algunos aspectos, en otros, más bien manifiestan regresiones. La falta de atención en la lectura y el automatismo no son privilegio de los alumnos de primero. Por otra parte, la "adquisición" de nuevos conocimientos de matemáticas produjo en las respuestas de algunos alumnos una especie de sofisticación de los errores.
- Los errores detectados en el cuestionario ponen de relieve que la enseñanza de las funciones no es tarea sencilla. Es por tanto incovenicnte presentar la noción de biyección en forma casi inmediata, sea antes o después de la de función, ya que las dificultades en su aprendizaje se aumentan considerablemente.
- Las dificultades derivadas de la notación simbólica, del vocabulario y de las representaciones gráficas, aspectos todos de los que no se puede prescindir en el estudio de las funciones, obligan al profesor y a los autores de textos a tener mucho cuidado con su dosificación para no llevar a los alumnos a las confusiones que acabamos de señalar.

3. Características de "*Geometer's Sketchpad*"

El programa *Geometer's Sketchpad* (El geómetra) es producido por la empresa norteamericana Key Curriculum. El programa fue diseñado para servir, principalmente, de herramienta de enseñanza y aprendizaje.

The *Geometer's Sketchpad* se desarrolló como parte del Proyecto de Geometría Visual (Visual Geometry Project, VGP), que recibe fondos de la Fundación Nacional de las Ciencias (National Science Foundation) dirigido por el Dr. Eugene Klotz del Swarthormore College y la Dra. Doris Schattschneider del Moravian College en Pennsylvania, E.U.A.

El programador de *Geometer's Sketchpad* es Nicholas Jackiw, quien se integró al equipo de investigación en 1987, e inició las tareas de programación en 1988.

En 1990 Jackiw diseñó la versión "beta" de *Geometer's Sketchpad* que se utilizó para probarlo en las aulas. El programa, en su fase de prueba, fue utilizado en más de 50 instituciones educativas. La forma abierta en la que se diseño el programa generó una importante retroalimentación y creó una gran expectativa por el mismo.

La versión para Windows se empezó a distribuir en 1993.

El programa fue diseñado principalmente para el uso en clases de geometría en la educación secundaria. Sin embargo, la práctica ha demostrado que puede ser útil con estudiantes menores y también para profesores universitarios y sus estudiantes. Incluso es utilizado por diseñadores y dibujantes técnicos por su alto potencial para el trazado de construcciones geométricas.

Con este programa el estudiante puede realizar una gran variedad de construcciones geométricas, explorar con ellas, establecer conjeturas y experimentar.

Actualmente está a la venta una versión del programa traducida al español, con el nombre de Geómetra Sketchpad, cuyo distribuidor es la empresa Grupo Editorial Iberoamérica.

El Grupo Editorial Iberoamérica destaca las siguientes características de este programa:

- Una vez que se ha dibujado una figura se puede utilizar el programa para transformarla con el "mouse", conservando las relaciones geométricas de la construcción. De esta manera, se puede llegar en forma natural a generalizaciones al observar cuáles aspectos de la geometría de la figura cambian y cuáles se mantienen constantes.
- Los inconvenientes mecánicos de las herramientas convencionales (papel y lápiz, compás y regla) a menudo imponen límites a dibujos y oscurecen importantes principios geométricos. Con el Geómetra se puede construir puntos, rectas y círculos usando las normas geométricas, construir puntos medios, rectas paralelas y perpendiculares, fijar el radio de una circunferencia igual a una longitud dada, etc. El dibujo es rápido, exacto y fidedigno, revelando relaciones esenciales con facilidad y claridad.

Mientras se transforma las partes de una figura todas las partes relacionadas se actualizan simultánea y consecuentemente. Mientras un dibujo en papel y lápiz demuestra tan sólo un caso de una relación geométrica, el Geómetra permite examinar un vasto conjunto de casos similares.

4. Objetivos y contenidos considerados

El trabajo que he desarrollado se enmarca en los objetivos y contenidos que establece el programa oficial del Ministerio de Educación Pública para el tema de funciones. Esta limitación es intencional con fines de orientar la exposición, pues es posible desarrollar procesos de enseñanza aprendizaje con apoyo del programa *Geometer's Sketchpad* para objetivos y contenidos de mayor amplitud, tal como se muestra en [16] por ejemplo.

En este contexto el trabajo presenta estrategias didácticas para objetivos que corresponden a los siguientes contenidos:

- Concepto de función.
- Conceptos generales: dominio, ámbito, imagen, pre-imagen, variable dependiente, variable independiente.
- Función constante y función identidad.
- Función lineal y su representación en el plano cartesiano.
- Interpretación de la pendiente y de la intersección con el eje Y.
- Intersecciones con los ejes.
- Función cuadrática: concepto, representación en el sistema de coordenadas, concavidad, intersección con los ejes, vértice, intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.
- Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.
- Función inversa.
- Función exponencial y función logarítmica. Definiciones y propiedades.
- Sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2.

5. Algunos ejemplos

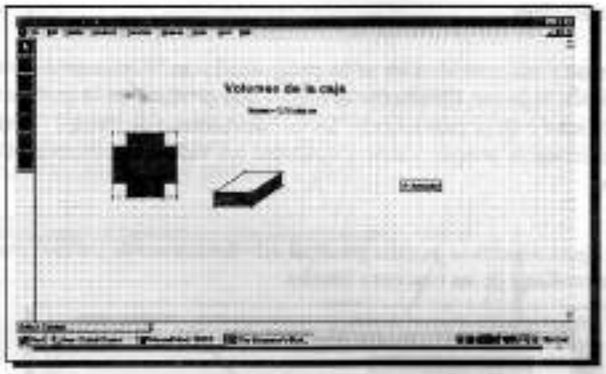
A continuación se describen algunos de los programas que he elaborado, programando en Geometer's Sketchpad, para apoyar la enseñanza del tema.

5.1 El concepto de función

Con el fin de enfatizar en el concepto de función como relación entre variables he programado varios casos. En particular, he programado el caso de una caja rectangular construida a partir de una lámina rectangular en la cual se cortan cuadrados de igual tamaño en las esquinas, y se dobla el material restante.

La intención principal es que los y las estudiantes descubran, trabajando con el programa, que el volumen de la caja depende de la longitud del lado del cuadrado que se recorte, para enfatizar en el concepto de función como "relación entre variables".

La siguiente figura muestra la pantalla principal del "documento de trabajo" programado para este tema.



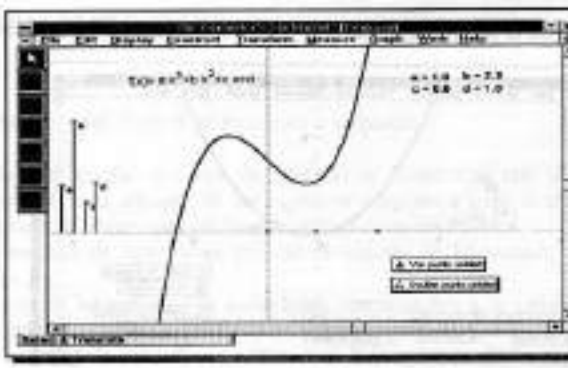
5.2. Crecimiento y decrecimiento

Para favorecer la construcción de conceptos, en particular, los de funciones crecientes y funciones decrecientes programé un caso en el cual el o la estudiante puede cambiar libremente los valores de los coeficientes, de manera dinámica, para obtener diversas gráficas de funciones, y explorar con ellas.

De esta manera las y los estudiantes pueden trabajar ampliamente sobre gráficas de funciones en las cuales pueden determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, teniendo la posibilidad de variar a su gusto los valores de los coeficientes para generar nuevas gráficas que a su vez permitan volver a trabajar sobre el crecimiento y decrecimiento.

Con este "documento de trabajo" se pueden desarrollar sesiones de aprendizaje cuya estrategia sea la "verificación", "el descubrimiento", la "simulación" e incluso la de "pizarra electrónica".

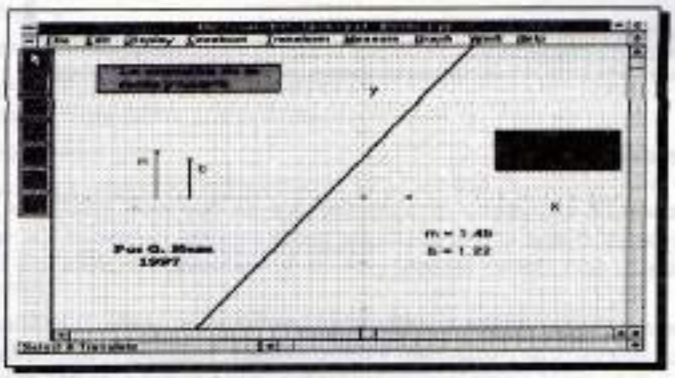
La siguiente figura muestra la pantalla principal del "documento de trabajo" programado en Geometer's Sketchpad.



5.3. Funciones lineales

Para el tema de las funciones lineales se ha programado un "documento de trabajo" en el cual el o la estudiante puede explorar libremente el efecto que produce en la gráfica de una recta variar el valor de la pendiente o de la intersección. Es un "documento de trabajo" dinámico en el sentido de que las y los estudiantes pueden variar a voluntad los valores y observar, de inmediato, el efecto que se produce.

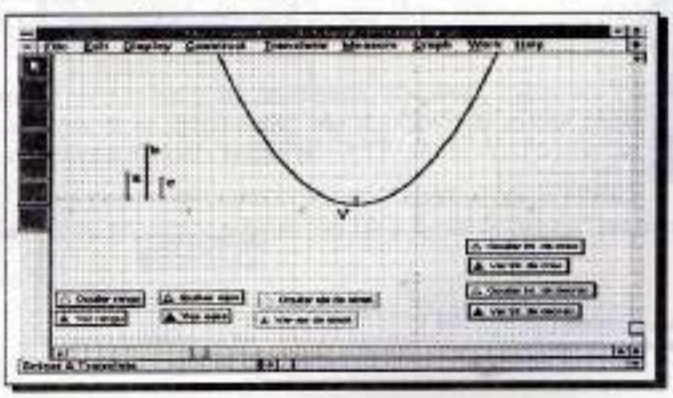
La siguiente figura muestra la pantalla principal del "documento de trabajo" programado para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de las funciones lineales.



5.4. Funciones cuadráticas

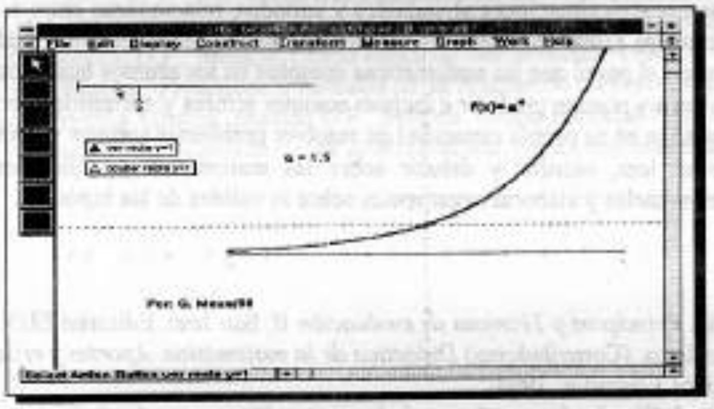
Para el tema de las funciones cuadráticas se programó un documento de trabajo en el cual el o la estudiante puede, de manera dinámica, cambiar los coeficientes de la función y estudiar los efectos. En particular, el "documento de trabajo" está dotado de botones que permiten a las y los estudiantes explorar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, el rango y el eje de simetría.

La siguiente figura muestra la pantalla principal del "documento de trabajo" programado para este tema.



5.5. Funciones exponenciales

Para el tema de funciones cuadráticas se programó un "documento de trabajo" que permite que las y los estudiantes exploren libremente cambiando la base y observando los efectos que se producen. Con este "documento de trabajo" se espera que las y los estudiantes descubran o verifiquen propiedades de la función exponencial relacionadas con el crecimiento o el decrecimiento, o aquella que establece que las gráficas de las funciones exponenciales siempre contienen el punto (0,1).



6. Ventajas de utilizar Geometer´s Sketchpad

El programa Geometer´s Sketchpad ofrece una serie de ventajas como recurso didáctico en general, y para la enseñanza y el aprendizaje del tema de funciones en particular. Algunas de estas ventajas son las siguientes:

- Permite programar "documentos de trabajo" interactivos, es decir, programas en los cuales las y los estudiantes pueden variar libremente el valor de algunos parámetros para estudiar los efectos.
- Se puede cubrir una importante cantidad de objetivos y de contenidos según el programa oficial.
- No es difícil que las y los estudiantes adquieran experiencia.

Conclusiones

El trabajo desarrollado permite llegar a las siguientes conclusiones:

1. Es factible diseñar sesiones de aprendizaje sustentadas con el programa *Geometer's Sketchpad*, para algunos de los objetivos propuestos para el tema de funciones en el programa de matemática del Ministerio de Educación Pública.
2. Las sesiones de aprendizaje utilizan el método de laboratorio, mediante el trabajo en equipo.
3. Algunas de las sesiones de aprendizaje corresponden a la estrategia de verificación de resultados, otras están diseñadas para utilizar la estrategia de descubrimiento.
4. Las sesiones de aprendizaje promueven la enseñanza de la matemática en ambientes caracterizados por la exploración, el descubrimiento, el planteamiento de conjeturas, la búsqueda de argumentos para sustentar las conjeturas, la comunicación de resultados y el trabajo en equipo.

5. Las sesiones de aprendizaje diseñadas como resultado el proyecto contribuyen a lograr los siguientes fines expresados en el programa de matemática del MEP: que las y los estudiantes...

   - se sientan seguros de su capacidad para hacer matemáticas y confianza en su propio pensamiento matemático.
   - lleguen a resolver problemas matemáticos.
   - aprendan a razonar matemáticamente.
   - experimenten situaciones abundantes y variadas, relacionadas entre si, que los lleven a valorar las tareas matemáticas, desarrollar hábitos mentales matemáticos, entender y apreciar el papel que las matemáticas cumplen en los asuntos humanos.
   - exploren y puedan predecir e incluso cometer errores y corregirlos de forma que ganen confianza en su propia capacidad de resolver problemas simples y complejos.
   - puedan leer, escribir y debatir sobre las matemáticas, y que formulen hipótesis, comprobarlas y elaborar argumentos sobre la validez de las hipótesis.

Bibliografía

[1] Brenes E., Fernando. *Principios y Técnicas de evaluación II*. San José, Editorial EUNED, 1990.

[2] Parra, Cecilia; Saiz, Irma. (Compiladoras) *Didáctica de la matemática. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Editorial Paidós Educador, 1994.

[3] Resnick, Lauren; Ford, Wendy. *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona, Editorial Paidós Educador, 1998.

[4] Key Curriculum Press. *La enseñanza de la geometría con* ***The Geometer's Sketchpad*** (El Bloc de Dibujos del Geómetra). 1993.

[5] Galvis, A. *Reflexión acerca del uso del computador en educación primaria y secundaria*. Informática Educativa. V. 4. No. 1. Colombia. 1991.

[6] Galvis, A. *Planeación estratégica de informática educativa*. Informática Educativa. V.5. No. 2, Colombia. 1992.

[7] Galvis, A. *Evaluación de materiales y ambientes educativos computarizados*. Informática Educativa. V. 6. No. 1. Colombia. 1993.

[8] Meza, G. *Eureka: The Solver. Un recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas superiores*. Comunicación. V.15. Cartago. 1992.

[9] Meza, G. *Cómo usar MathCad*. Editorial Tecnológica de Costa Rica. Cartago. 1994.

[10] Meza Cascante, Luis Gerardo. *Computadoras en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática: una taxonomía*. En: Memorias del V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemática (ECADIM). Javier Trejos (editor). Liberia, Costa Rica. 1997.

[11] Meza Cascante, Luis Gerardo et al. *Planeamiento de procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática asistidos con software matemático*. En: Memorias del V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemática (ECADIM). Javier Trejos (editor). Liberia, Costa Rica. 1997.

[12] Meza Cascante, Luis Gdo. *Enseñanza de la matemática asistida por computadora: mitos, amenazas, retos y oportunidades*. En: Memorias del Primer Congreso Internacional de Informática Educativa para secundaria. 1998.

[13] Meza Cascante, Luis Gdo. Experiencias educativas con ***Geometer's Sketchpad***. En: Memorias del Primer Congreso Internacional de Informática Educativa para secundaria. 1998.

[14] Meza Cascante, Luis Gdo. *Sesiones interactivas programadas en* ***Geometer's Sketchpad***. En: Memorias del Primer Festival de Matemática. 1998.

[15] Meza Cascante, Luis Gdo. *La pirámide de objetivos educativos y la enseñanza de la matemática en la educación secundaria*. En: Memorias del Primer Festival de Matemática. 1998.

[16] Meza Cascante, Luis Gdo. Enseñanza del cálculo diferencial e integral con apoyo del programa ***Geometer's Sketchpad***. Revista "Comunicación". Vol. 11. Año 20. 1999.

[17] Meza Cascante, Luis Gdo. *Metodología de la enseñanza de la matemática*. Notas técnicas del curso "Teoría del aprendizaje 2". ITCR. 1998.

[18] Meza Cascante, Luis Gdo. *Estrategias didácticas para el desarrollo de procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática asistida por computadora*. Presentado en el Taller "Matemática asistida por computadora". ITCR. Sede Regional San Carlos. 1998.

[19] Sancho, L. *Aplicaciones de la informática a la educación II*. EUNED. San José, Costa Rica. 1997.

[20] Santos Trigo, Luz Manuel y Sánchez Sánchez, Ernesto. Perspectivas en educación matemática. Primera Edición. México D.F., México. Grupo Editorial Iberoamérica. 1996.

[21] Santos Trigo, Luz Manuel. *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Primera Edición. México D.F., México. Grupo Editorial Iberoamérica. 1996.

[22] Scott, P. *La computadora y la enseñanza de la matemática*. Educación Matemática. V.2. No. 1. México. 1990.

La transformación bilineal en C

Roberto E. Caligaris; Georgina B. Rodríguez; Marta G. Caligaris[1]

Resumen

En este trabajo presentamos la manera de introducir a los estudiantes en el manejo de las transformaciones bilineales en el plano complejo como composición de traslaciones, rotaciones, homotecias e inversiones.
Aprovechando la capacidad gráfica de Mathematica, podemos ver cómo actúa una transformación punto por punto sobre una región determinada. La manera de presentar las transformaciones es similar a la utilizada en un trabajo previo de los autores[1].

Basados en paquetes de John Gray[2] *y Porta, Davis & Uhl*[3], *creamos nuestro propio paquete de transformaciones en el plano complejo, de manera de poder mostrar en pantalla lo que habitualmente pretendemos que los alumnos imaginen.*

En todos los casos graficamos dominio e imagen utilizando la misma escala en ambos sistemas coordenados, de manera de establecer bien las diferencias entre la región original y su transformada.

Palabras clave: Transformación bilineal, Imagen, Inversión, Punto singular.

Introducción

Ante una función real de variable real, el primer análisis que se nos ocurre es una representación gráfica de la misma, siendo ésta una tarea relativamente fácil. No ocurre lo mismo en el caso de funciones complejas a variable compleja. Para ello, se necesitan cuatro dimensiones, dos correspondientes a la variable independiente ($z = x + i\,y$) y dos a la variable dependiente ($w = u + i\,v$).

Tenemos distintas opciones para representar funciones complejas a valores complejos:
Como mapeo del plano z en el plano w
Graficando las partes real e imaginaria como funciones de $\Re^2$ en $\Re$
Graficando el módulo de la imagen como función de $\Re^2$ en $\Re$
Graficando conjuntos de nivel de la función con dominio en $\Re^4$

Programas simbólico-gráficos como Mathematica o Maple V permiten obtener resultados gráficos que a mano son prácticamente imposibles de alcanzar.

En este trabajo elegimos mostrar gráficamente la imagen de una transformación bilineal como mapeo del plano z en el plano w, transformando una región determinada punto por punto. Analizamos los distintos casos que se presentan según el dominio contenga o no el punto singular de la transformación, si lo hubiera.

Además mostramos paso a paso la transformación bilineal como composición de traslaciones, rotaciones, homotecias e inversiones.

[1] Grupo de Informática Educativa, Facultad regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional, Colón 332-2900-San Nicolás-Argentina. E-Mail recaliga@frsn.utn.edu.ar

La transformación bilineal

Se denomina transformación bilineal en el plano complejo a toda función de la forma $T(z) = \dfrac{a\,z + b}{c\,z + d}$, donde $a\,d - b\,c \neq 0$.

Toda transformación bilineal es composición de rotaciones, homotecias, traslaciones e inversiones [4], ya que se demuestra fácilmente que

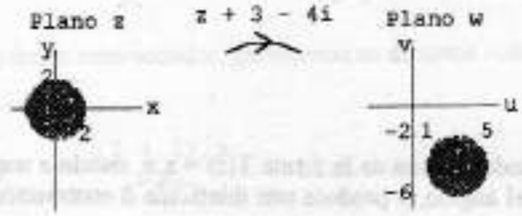
$$T(z) = -\,\frac{a\,d - b\,c}{c^2}\;\frac{1}{z + \dfrac{d}{c}} + \frac{a}{c}$$

Estudiamos el efecto de cada una de estas transformaciones por separado, para luego reunirlas en la composición final.

Traslación

Se denomina traslación a toda función de la forma $T(z) = z + (a+bi)$, con a y b constantes reales. Una región del dominio se ve afectada por esta transformación, como su nombre lo indica, en una traslación a unidades en el sentido del eje real, b unidades en el sentido del eje imaginario.

Veamos en el siguiente gráfico la imagen del círculo de radio 2, con centro en el origen, mediante la



traslación $T(z) = z + 3 - 4\,i$

Rotación

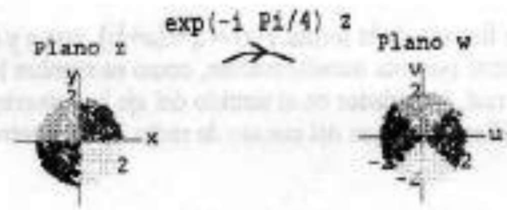
Se denomina rotación a toda función de la forma $T(z) = e^{i\alpha}\,z$ siendo α una constante real. Una región del dominio se ve afectada por esta transformación, en una rotación de un ángulo α.

En el siguiente gráfico mostramos la imagen del círculo de radio 2, con centro en el origen, mediante la rotación $T(z) = i\,z$

Se esperaba una rotación de los puntos en un ángulo de $\pi/2$. Al trabajar todos los puntos en el mismo color, no notamos cambio alguno entre la región de origen y la imagen. Veamos que ocurre si pintamos en distintos colores los cuadrantes:

Ahora sí podemos confirmar la aseveración anterior.

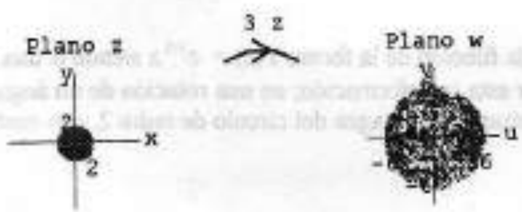
Si multiplicamos por un complejo de argumento negativo, la rotación se produce en sentido horario:



Homotecias

Se denomina homotecia a toda función de la forma $T(z) = a\,z$, siendo a una constante real y positiva. Esta transformación conserva el ángulo, y produce una dilatación o contracción según sea $a > 1$ o $a < 1$, respectivamente.

Para $a = 3$ vemos claramente en el gráfico que se produce una dilatación:



Pero, para $a = ½$ se produce una contracción, como se ve en el siguiente gráfico:

Como era de esperar, la imagen resultó ser un conjunto compacto, ya que la transformación es continua sobre el dominio considerado.

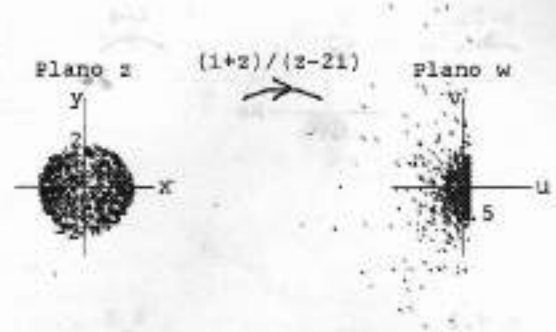
Veamos qué ocurre con las imágenes de conjuntos que contengan el punto singular:

En el gráfico anterior vemos que si $|z| \leq 2$, entonces $|w| \geq ½$. Además siendo el dominio compacto, la imagen no resultó un conjunto compacto, ya que la función no es continua en el dominio.

En el gráfico siguiente vemos qué sucede cuando el punto singular pertenece a la frontera de la región que se transforma:

Por último, estudiemos ahora la imagen de una región mediante la transformación bilineal.

En un primer ejemplo analizaremos la transformación $T(z) = \dfrac{z+i}{z-2i}$. La imagen por esta transformación de un círculo de radio 2 y centro en el origen se muestra en el siguiente gráfico:



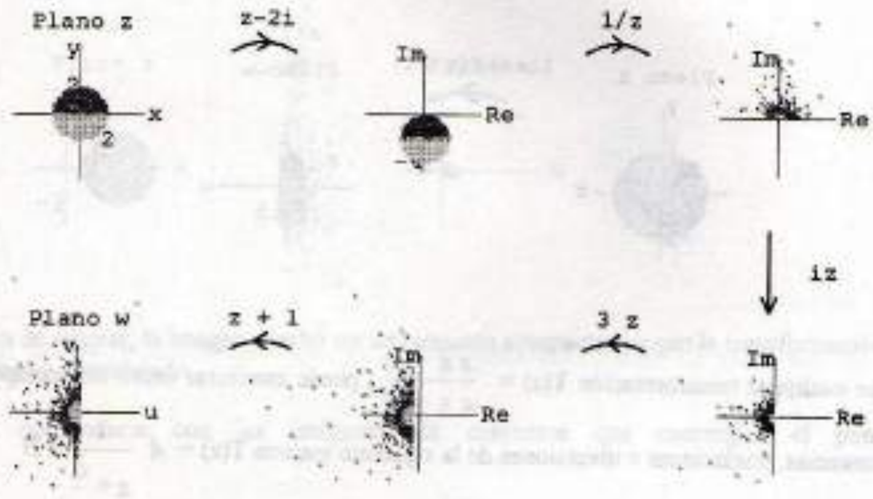
Sabemos que cualquier transformación $T(z) = \dfrac{a\,z + b}{c\,z + d}$, puede escribirse como una composición de rotaciones, homotecias, traslaciones e inversiones de la siguiente manera $T(z) = A\,\dfrac{1}{z + \frac{d}{c}} + B$

En este ejemplo $T(z) = \dfrac{z+i}{z-2i}$ puede escribirse $T(z) = 3i\,\dfrac{1}{z-2i} + 1$, y es composición de:

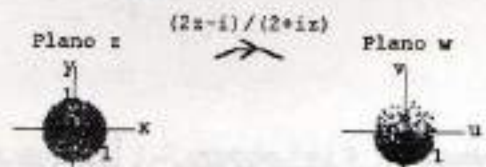
- La traslación: $T_1(z) = z - 2i$
- La inversión: $T_2(z) = 1/z$
- La rotación: $T_3(z) = i\,z$
- La homotecia: $T_4(z) = 3\,z$
- La traslación: $T_5(z) = z + 1$

En el gráfico que sigue se muestra un círculo de radio 2 y centro en el origen y su correspondiente imagen por $T(z)$, obtenida como composición de T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5. Se utilizaron dos colores para poder distinguir la rotación.

Los gráficos con nombres Plano z y Plano w son los mismos que se obtuvieron directamente en el gráfico anterior.



Analizaremos ahora la transformación $G(z) = \dfrac{2z - i}{2 + iz}$



Esta transformación es composición de:

- La traslación: $G_1(z) = z - 2i$
- La inversión: $G_2(z) = 1/z$
- La homotecia: $G_3(z) = 3z$
- La traslación: $G_4(z) = z - 2i$

En el gráfico que sigue se muestra un circulo de radio 2 y centro en el origen y su correspondiente imagen por $G(z)$, obtenida como composición de G_1, G_2, G_3 y G_4.

El objeto de utilizar dos colores es mostrar cómo la inversión transforma de manera diferente los semicírculos superior e inferior. Esta función transforma el segmento del eje real comprendido entre -1 y 1 (límite entre los dos semicírculos) en un arco de circunferencia (límite entre las imágenes de los dos semicírculos), como se puede apreciar en el gráfico. Claro está que este resultado se puede demostrar analíticamente obteniendo la ecuación de dicha circunferencia, pero no es ese el objetivo de este trabajo.

Conclusiones

En este trabajo hemos presentado una muestra de las posibilidades que brindan los modernos programas de computación simbólica para representar gráficamente diversas transformaciones que de otra manera serían imposibles de visualizar, o aún imaginar. Estamos convencidos, y así resulta de nuestra experiencia, que este tipo de presentaciones alienta a los estudiantes a efectuar sus propias propuestas y así mejor avanzar en el desarrollo de sus estudios.

__Agradecimientos__: Agradecemos las sugerencias dadas por el Dr. Juan José Manfredi de la Universidad de Pittsburgh, el Dr. Fredrick Olness de la Southern Methodist University (Dallas) y la Dra. Estela Gavosto de la Universidad de Kansas, durante el Primer Congreso Latinoamericano de Tecnologías Educativas (CLATE'98) desarrollado en nuestra Facultad, durante el mes de agosto de 1998.

Bibliografía

[1] Caligaris, Roberto; Rodriguez, Georgina; Caligaris, Marta. "Linear Transformations for Beginners in Mathematica" in *Education and Research*, 7 (2) 29-33, 1998.

[2] Porta, B.; Uhl, H.; Davis, J. *Calculus&Mathematica*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[3] Gray, J. *Mastering Mathematica*. Academic Press, Inc.

[4] Phillips, E. *Funciones de una variable compleja y sus aplicaciones* Edt. Dossat S.A.,2° Edición.

Parametrización, superficies, sólidos y proyecciones: un cuaderno interactivo para la experimentación con parametrizaciones, creado con pocos recursos de programación

Walter Mora F[1]

Resumen

Se presenta WSPPS.nb, un "cuaderno interactivo" para el estudio de parametrización de curvas en el espacio, intersección de superficies y proyección de un sólido. Además se considera los detalles de implementación en Mathematica 3.0

Palabras clave: Texto interactivo, programación en Mathematica 3.0, parametrización de curvas, superficies y sólidos.

1. Introducción

Uno de los problemas centrales en el estudio de parametrizaciones, superficies, sólidos y proyecciones de un sólido, es la necesidad de que el estudiante logre visualizar estos objetos en el espacio. Una vez que el estudiante logra imaginar estos objetos, el otro problema es el de si sus cálculos (en problemas, por ejemplo, de parametrización y cálculo de proyecciones) concuerdan con la "realidad" del objeto geométrico estudiado. Las capacidades de graficación de *Mathematica* 3.0 claramente constituyen una gran herramienta para estos objetivos ya que nos permiten llevar animaciones al aula con el objetivo de visualizar mejor el conocimiento y nos permite proporcionar a los estudiantes textos interactivos que le ayuden a visualizar y contrastar sus cálculos sin necesidad de generar ni estar en contacto con el código del "cuaderno interactivo".

En este artículo presentamos un "cuaderno interactivo" para el estudio de parametrizaciones, superficies, sólidos y proyecciones. El cuaderno ha sido usado en cursos de cálculo avanzado y se le han ido incorporando funciones (botones) de acuerdo a las necesidades detectadas por los estudiantes y por el profesor. La implementación del cuaderno es sencilla. Dos variables globales mantienen el estado actual del gráfico (superficie, curvas nuevas, rotaciones, zoom, etc.) y a cada nuevo objeto se le aplica una actualización para que corresponda al estado actual del gráfico. Tenemos una barra de botones para las operaciones básicas: dibujar una nueva curva, borrar la última curva, borrar todas las curvas, giros alrededor de los ejes, zoom, grosor, color, y botones para manipular los ejemplos. También hay botones de instrucciones y ejemplos. Los recursos usados para hacer este cuaderno son pocos (algunos recursos no aparecen documentados en The *Mathematica* Book), básicamente necesitamos desplegar un arreglo de botones (con sus programas respectivos), leer de una celda y enviar gráficos a una celda.

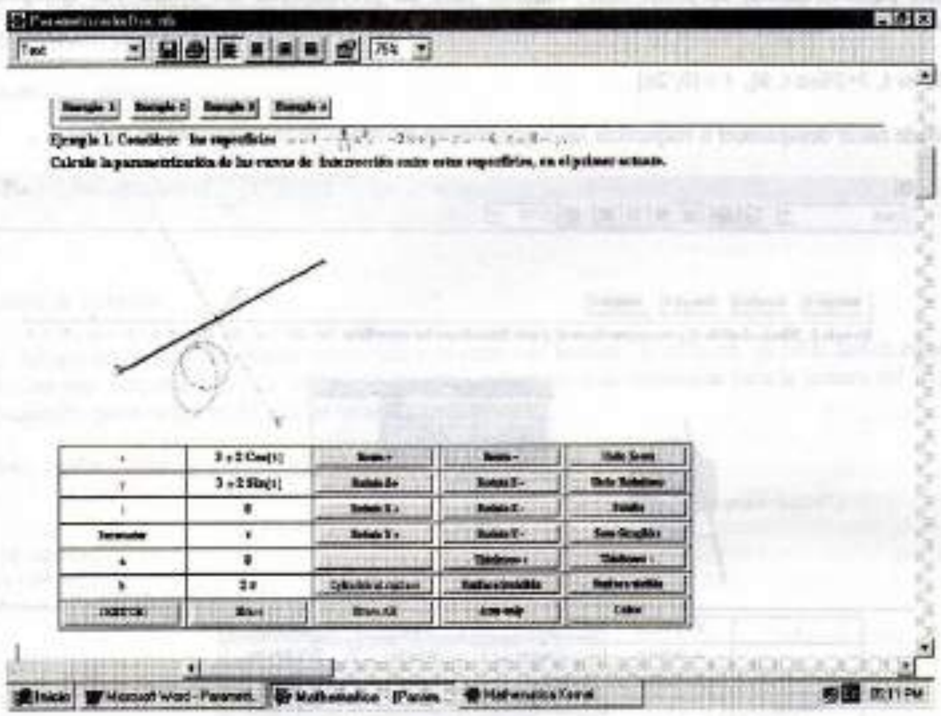
2. El Cuaderno

El cuaderno tiene dos celdas de inicialización. Una con instrucciones `off[...]` para evitar mensajes innecesarios y otra con las variables globales: una lista de gráficos actualizada y otra lista sin actualizar. La actualización se refiere a aplicar ,a los objetos de la lista, una matriz de cambio de base para calcular sus coordenadas respecto al sistema actual de ejes (que posiblemente ha cambiado por efecto de las

[1] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, e-mail: wmora@itcr.ac.cr

rotaciones). El "zoom" no afecta a las coordenadas de los objetos porque se maneja con la opción de celda **ImageSize**. En el cuaderno no hay celdas con la propiedad de inicialización, más bien, cuando se presiona cualquier botón por primera vez, se evalúan estas celdas y se envía un mensaje al usuario indicándole que el notebook esta listo (se inicializaron las variables globales). Sobre un fondo gris, se usan las propiedades de celda **CellMargins, CellFrame, CellFrameMargins, CellFrameColor** para crear el ambiente familiar de Windows.

Se ha preparado el cuaderno para que no cause problemas en el caso de que sea manipulado por un usuario no experimentado: el programa despliega ventanas de advertencia si hay posibles errores de sintaxis o inconsistencias. En la figura que sigue se muestra la interfaz del WSPPS (hay también una versión con botones en español)



Como se observa, hay 4 botones de ejemplos. Se pueden agregar nuevos botones con nuevos ejemplos o se puede modificar los ejemplos existentes. Con este cuaderno podemos tomar, digamos el ejemplo 2, rotar el objeto, parametrizar y dibujar una curva de intersección entre las superficies, desplegar las superficies cilíndricas generadas por dos proyecciones del sólido sobre el plano YZ, ver únicamente estas superficies cilíndricas, ver únicamente las parametrizaciones de dos intersecciones, etc.

2.1. Un ejemplo

Consideremos el botón de "Ejemplo 2". Este botón despliega dos superficies, la superficie generada por la curva de ecuación $(y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 4$ y la superficie generada por la curva de ecuación $(x - 3)^2 + (z - 3)$

$^2 = 4$. La tarea inicial consiste en calcular una parametrización de las curvas de intersección entre estas dos superficies. En este caso, resolviendo las ecuaciones respectivas se obtiene la parametrización:

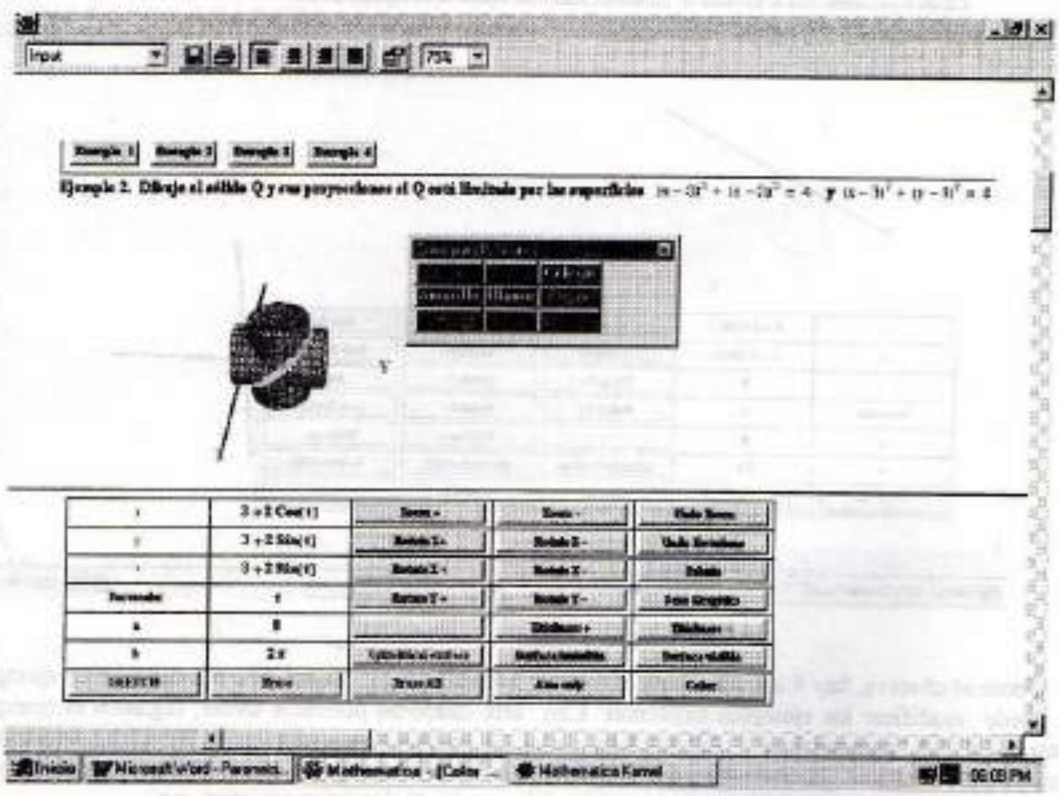
[3+2Cos t, 3+2Sen t, 3+ 2 Sen t], $t \in [0, 2\pi]$

Cada componente de la parametrización (x(t), y(t), z(t)), el parámetro usado y los valores **0** y **2π,** se digitan en las celdas respectivas. Para expresiones más elaboradas se puede activar la paleta "BasicInput". Una vez hecho esto, se hace click en el botón "Sketch" para que el programa despliegue la curva (junto con las superficies). Para este ejemplo, se requiere aumentar el grosor de la curva a dibujar y también ponerle un color que contraste con las superficies. Una rotación alrededor del eje Y ayuda avisualizar mejor las superficies y las curvas.

Esta parametrización se puede usar también para las proyecciones del sólido. Por ejemplo, una parametrización de la proyección en el plano XY es

[3+2Cos t, 3+2Sen t, 0], $t \in [0, 2\pi]$

Se puede hacer desaparecer o reaparecer las superficies en las tareas de visualización de curvas.



3. Implementación

3.1 Celdas.

Para obtener un efecto de profundidad en las celdas se puede poner un fondo gris en el notebook, digamos `Background->GrayLevel[0.699]`, luego se ponen las siguientes propiedades de celda

```
CellFrame->{{0.25,0.06},{0.25,0.6}},
CellMargins->{{50,29},{0,0}},
Background->GrayLevel[0.8]
```

3.2 Botones

El tipo de botón que usamos es un botón cuya "FunctionButton" hace es ejecuta una lista de instrucciones, una de las cuales puede ser, crear nuevas ventanas con botones. El formato general es como sigue

```
ButtonBox[ " name ",
        Active->True,
                ButtonEvaluator:>"Automatic",
                ButtonFunction:>(
                   instruction1;
                   instruction2;
                   ....
        )]
```

3.3 Tabla de botones

Para desplegar un arreglo de botones como este, con celdas de lectura, se etiqueta la celda donde estará el arreglo con una etiqueta, digamos "lectura1". La etiqueta nos sirve de referencia para la lectura del "input" proporcionado por el usuario. El código (plantilla) básico es

```
put[tex_,color_:Hue[0.2]]:=StyleBox[tex, FontColor->color,
                                          FontSize->12,
                                          FontFamily->"Times New Roman-Bold",
                                          Editable->False];
Cell[BoxData[
   GridBox[{
        {put["x",RGBColor[0.996109, 0, 0]],
                            "t",
                            ButtonBox[put["Zoom +"],
                                          Active->True
                                         ButtonEvaluator:>"Automatic",
                                         ButtonFunction:>(
                                                  If[300+ancho<=450,
                                              alto=alto+50;
                                                       ancho=ancho+50];


NotebookFind[actual,"celdagraf", All, CellTags];

celda= NotebookRead[actual];
celda[[6]]=ImageSize->{438+ancho,379+alto};
NotebookWrite[actual, celda]
)],
ButtonBox["... "],
ButtonBox["... "]},
        {put["y",RGBColor[0.996109, 0, 0]],
         "t",
```

```
ButtonBox["... "],
ButtonBox["... "],
ButtonBox["... "]},
...
      },        (* GridBox options*)
        ColumnWidths ->10, GridFrame  -> True, RowLines ->True,
        ColumnLines ->True ]], (* cell options *)
                                        "Input",
                          CellFrame->{{0.10,0.10},{0.10,0.10}},
                          CellMargins\[Rule]{{50,40},{0,0}},
                          Evaluatable ->False, CellAutoOverwrite -> False,
                          FontColor->GrayLevel[0],
                          FontFamily->"Times New Roman-Bold",
                          FontSize->15,Background->GrayLevel[1],
                                     CellTags -> "lectura1"]//CellPrint
```

3.4 Leer inputs

Buscamos la celda "lectura1" y leemos su contenido. La celda es una lista, asi que podemos navegar en esta lista tomando los elementos que nos interesan, por ejemplo, podemos tomar uno a uno los "input" que el usuario digita.

```
actual=SelectedNotebook[];
NotebookFind[actual,"lectura1", All, CellTags];
Clear[varP,xt,yt,zt,a,b];
xt=ToExpression[NotebookRead[actual][[1,1,1,1,2]]] ;
yt=ToExpression[NotebookRead[actual][[1,1,1,2,2]] ];
zt=ToExpression[NotebookRead[actual][[1,1,1,3,2]] ];
varP=ToExpression[NotebookRead[actual][[1,1,1,4,2]]] ;
a=ToExpression[NotebookRead[actual][[1,1,1,5,2]]];
b=ToExpression[NotebookRead[actual][[1,1,1,6,2]]];
```

Alguna de estas lecturas puede fallar por ausencia de código y/o por error de sintaxis. También puede pasar que la lectura es inconsistente, como en el caso de que el parámetro usado no sea igual en todos los "inputs", etc. El notebook debe estar preparado para esto. Si hay errores de código o errores de sintaxis lo mejor es poner un Off[...] en la celda de inicialización (para esos mensajes) y preparar el código del programa para estas eventualidades, para que despliegue una ventana de advertencia. En general el programa deberia tomar la lectura {xt,yt,zt,varP,a,b} y verificar si es consistente, y en todo caso, verificar si esta lectura va a generar un objeto Graphics3D.

Las verificaciones pueden ser del tipo

```
If[xt=!=$Failed &&,  ...];

If[Head[newcurve[ xt, yt, zt,varP, a, b] ] == Graphics3D,
   (* then*)...,
   (* else*)...,
   (* unknow*)...];
```

3.5 Enviar un gráfico a una celda

Para enviar los gráficos, etiquetamos una celda, digamos con "celdagraf". Todos lo gráficos que enviamos deben mantener esta etiqueta. Necesitamos un programa que *tenga como salida* un gráfico, digamos `newgraf[...; Show[...]]`. Para enviar el gráfico, encontramos la celda y ejecutamos `newgraf[...]`.

```
newgraf[...];
```

```
actual=SelectedNotebook[];
 NotebookFind[actual,"celdagraf", All, CellTags];
 NotebookWrite[actual,Cell[ GraphicsData["PostScript",
                          DisplayString[newgraf[...],"MPS"]],
       "Graphics",
                          CellSize->{Inherited, 400},
                          CellLabel->False,
               CellMargins->{{100,0},{0,0}},
                          ImageSize->{438+ancho,379+alto},
                         ImageMargins->{{-100, 50}, {0, 2.625}},
                         ImageRegion->{{0, 1}, {0, 1}},
                         CellTags->"celdagraf"]];
```

4. Botones (función)

En las variables globales hay una variable, `listabasica`, con los objetos básicos del gráfico: ejes y las etiquetas de los ejes. Cuando se agrega un nuevo gráfico a la lista o hay una actualización de la lista (debida a una rotación o una operación de zoom), ésta se despliega de nuevo con el nuevo gráfico o las nuevas propiedades. En el caso de los botones de zoom solo hay que actualizar la propiedad de celda `ImageSize`. Una celda es una lista, asi que se lee la celda del gráfico (con `NotebookRead`) y se actualiza la posición de la celda "`ImageSize`"

```
celda= NotebookRead[actual];
celda[[6]]=ImageSize->438+ancho,379+alto;
```

En el caso de botones de rotación, solamente se despliega nuevamente `listabasica` después de rotar sus componentes. Cada nuevo gráfico debe ser actualizado al sistema actual de ejes (cada rotación es aplicada a los tres vectores base, ejeX, ejeY, ejeZ. Estos vectores conforman la matriz de cambio de base para actualizar las coordenadas de cada nuevo objeto que se agrega a la lista `listabasica`). La actualización cambia las coordenadas de los objetos Graphics3D que hay en la lista, de acuerdo a la base actual. El programas `Rotar[obj_,...]` y `actualiza[obj_]` son sencillos. `Rotar[obj_,...]` es un programa de própósito general: rota las *primitivas* de "obj" en un ángulo ϕ alrededor de la recta L: Q + t u

```
Rotar[objeto_, Q_:{0, 0, 0}, u_:{0, 0, 1}, \[Phi]_:0] := Module[{A},
    A = ((# - Q) + Sin[\[Phi]]*Cross[u/Sqrt[u.u] , (# - Q)] +
       2(Sin[0.5*\[Phi]]^2)*Cross[u/Sqrt[u.u], Cross[u/Sqrt[u.u],(#-Q)]]+Q)&;
    objeto /. {poly : Polygon[_] :> Map[A, poly, {2}],
                      line : Line[_] :> Map[A, line, {2}],
                      point : Point[_] :> Map[A, point, {1}]
                       }];

actualiza[objeto_] := Module[{A},
    A = (Transpose[{ejeX, ejeY, ejeZ}].#) &;
    objeto /. {poly : Polygon[_] :> Map[A, poly, {2}],
                      line : Line[_] :> Map[A, line, {2}],
                      point : Point[_] :> Map[A, point, {1}]
                       }];
```

5. Otros botones

`sketch`: despliega la curva correspondiente a la parametrización digitada

`Erase`: borra la última curva (o superficie cilíndrica) desplegada

`Erase All`: borra todas las curvas desplegadas con Sketch

`Color`: se usa para seleccionar el color de la siguiente curva que será desplegada

`Thickness +` : aumenta el thickness de la siguiente curva que será desplegada

`Thickness -` : desactiva Thickness +

`Cylindrical surface`: despliega la superficie generada por la última curva digitada. A la variable de valor 0 se le asigna el parámetro "s". s \[Epsilon] [0, b].

`Surface invisible (visible)` : este botón funciona cuando hay superficies presentes generadas por los botones de ejmplos. La idea es parametrizar las intersecciones de las superficies, asi que a veces es bueno quitar o poner las superficies para observar el progreso de la parametrización

`Palette`: llama al palette BasicInput.nb

5. Conclusión

Tener un "cuaderno interactivo" en el que solo se necesita digitar el mínimo de código (reduciendo así la curva de aprendizaje del software) y hacer "click", ayuda a que el estudiante centre su interés en los aspectos puramente de experimentación matemática Esto convierte al "cuaderno interactivo" en una herramienta ágil de experimentación, visualización y contrastación del conocimiento. Un texto dedicado extensivamente a la creación de notebooks interactivos (documentando funciones del front end desconocidas o poco conocidas) esta todavía en espera. Sin embargo "pocos" recursos le permiten al profesor no especializado en los "secretos" de Mathematica 3.0, obtener un "cuaderno interactivo" aceptable.

Bibliografía

[1] Altmann, S.: *Rotations, Quaternions, and Double Groups*. Clarendon Press (Oxford), 1986.
[2] Maeder, Roman.: *Programing in Mathematica*. (3rd ed.) Addison-Wesley, 1997.
[3] Mora, W.: *Texto interactivo con Mathematica Media 3.0*. Publicación ITCR, 1998.
[4] Wolfram, S.: *The Mathematica Book*. (Four edition). Wolfram Media /Cambridge University Press, 1999.

Problemas de máximos y mínimos en la educación secundaria con *Geometer's Sketchpad*

Luis Gerardo Meza Cascante[1]

Resumen

Geometer's Sketchpad *es un programa computacional diseñado expresamente para desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la educación secundaria. La experiencia ha indicado que puede ser utilizado también con niños en edad escolar y con estudiantes universitarios.*

Existe una abundante cantidad de trabajos que muestran el potencial de este programa para apoyar procesos de enseñanza aprendizaje de la geometría y de otros temas del currículo matemático.

En este trabajo se aborda un tema en particular: los problemas de máximos y de mínimos. Tiene, pues, la intención de mostrar el potencial de este software educativo para apoyar sesiones de aprendizaje de este importante tema.

1. Propósito

En [6] planteamos la importancia de incorporar los problemas de máximos y mínimos dentro del temario de la educación secundaria, justificando con las siguientes razones:

- permite mantener la enseñanza del tema de funciones desde un punto de vista dinámico, enfatizando en la función como relación entre variables.
- brinda al estudiante la oportunidad de modelar diversos fenómenos utilizando funciones. En este sentido es importante que el estudiante establezca con claridad que el dominio de la función en una aplicación concreta puede ser distinto del dominio de la función analizada desde un punto puramente matemático.
- ofrece la oportunidad de encauzar la enseñanza de la matemática desde el punto de vista de la solución de problemas.

En esa ocasión proponíamos abordar este tipo de problemas mediante la restricción a situaciones que pudieran modelarse con funciones cuadráticas.

Con el apoyo de la computadora podemos mantener los objetivos iniciales de introducir el tema, pero liberamos de la restricción que implica sujetarse sólo a funciones cuadráticas.

El propósito de este trabajo es mostrar la factibilidad de desarrollar sesiones de aprendizaje del tema problemas de máximos y mínimos que pueden modelarse y resolverse con apoyo del programa *Geometer's Sketchpad*, manteniendo el tema dentro de los límites de la educación secundaria.

El programa *Geometer's Sketchpad* ofrece como ventaja que permite modelar situaciones de una manera interactiva como se muestra en [13] y [14] por ejemplo, lo que agrega valor didáctico.

2. Pertinencia

[1] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

La consideración de problemas de máximos y mínimos en la educación secundaria es pertinente pues es consecuente con los siguientes objetivos del programa de estudios del Ministerio de Educación Pública:

- Utilizar funciones para interpretar situaciones del entorno.
- Reconocer en una situación planteada las variables, las variables dependientes y las variables independientes.
- Interpretar la imagen y la preimagen de una función que represente una situación del entorno.

Además, los problemas de máximos y minimos tienen pertinencia también desde el punto de vista de los contenidos propuestos en el programa del Ministerio de Educación Pública. En efecto, este tipo de problemas tiene relación con contenidos como los siguientes: concepto de función, dominio, codominio, ámbito, imagen, preimagen, variable dependiente, variable independiente, plano cartesiano, entre otros.

3. *Geometer's Sketchpad*

El programa *Geometer's Sketchpad* (El geómetra) es producido por la empresa norteamericana Key Curriculum. El programa fue diseñado para servir, principalmente, de herramienta de enseñanza y aprendizaje y se desarrolló como parte del Proyecto de Geometria Visual (Visual Geometry Project, VGP), que recibe fondos de la Fundación Nacional de las Ciencias (National Science Foundation) dirigido por el Dr. Eugene Klotz del Swarthormore College y la Dra. Doris Schattschneider del Moravian College en Pennsylvania, E.U.A.

El programador de *Geometer's Sketchpad* es Nicholas Jackiw, quien se integró al equipo de investigación en 1987, e inició las tareas de programación en 1988.

En 1990 Jackiw diseñó la versión "beta" de *Geometer's Sketchpad* que se utilizó para probarlo en las aulas. El programa, en su fase de prueba, fue utilizado en más de 50 instituciones educativas. La forma abierta en la que se diseño el programa generó una importante retroalimentación y creó una gran expectativa por el mismo. La versión para Windows se empezó a distribuir en 1993.

El programa fue diseñado principalmente para el uso en clases de geometría en la educación secundaria. Sin embargo, la práctica ha demostrado que puede ser útil con estudiantes menores y también para profesores universitarios y sus estudiantes. Incluso es utilizado por diseñadores y dibujantes técnicos por su alto potencial para el trazado de construcciones geométricas.

Con este programa el estudiante puede realizar una gran variedad de construcciones geométricas, explorar con ellas, establecer conjeturas y experimentar.

Actualmente está a la venta una versión del programa traducida al español, con el nombre de Geómetra Sketchpad, cuyo distribuidor es la empresa Grupo Editorial Iberoamérica.

El Grupo Editorial Iberoamérica destaca las siguientes caracteristicas de este programa:

- Una vez que se ha dibujado una figura se puede utilizar el programa para transformarla con el "mouse", conservando las relaciones geométricas de la construcción. De esta manera, se puede llegar en forma natural a generalizaciones al observar cuáles aspectos de la geometría de la figura cambian y cuáles se mantienen constantes.
- Los inconvenientes mecánicos de las herramientas convencionales (papel y lápiz, compás y regla) a menudo imponen límites a dibujos y oscurecen importantes principios geométricos. Con el

Geómetra se puede construir puntos, rectas y círculos usando las normas geométricas, construir puntos medios, rectas paralelas y perpendiculares, fijar el radio de una circunferencia igual a una longitud dada, etc. El dibujo es rápido, exacto y fidedigno, revelando relaciones esenciales con facilidad y claridad.

Mientras se transforma las partes de una figura todas las partes relacionadas se actualizan simultánea y consecuentemente. Mientras un dibujo en papel y lápiz demuestra tan sólo un caso de una relación geométrica, el Geómetra permite examinar un vasto conjunto de casos similares.

4. Características

Las sesiones de aprendizaje que he diseñado para la enseñanza y el aprendizaje del tema máximos y mínimos se caracterizan por lo siguiente:

- las y los estudiantes cuentan con el enunciado del problema
- se ha programado un archivo tipo "*documento de trabajo*" en *Geometer's Sketchpad*, interactivo, que modele el problema propuesto
- las y los estudiantes pueden explorar con el programa para verificar la existencia de un máximo o de un mínimo
- las y los estudiantes pueden accesar al gráfico de una función que complete su trabajo exploratorio
- las y los estudiantes pueden, si lo desean, determinar valores aproximados de la solución del problema.

Los "*documentos de trabajo*" programados para este tema permiten desarrollar sesiones de aprendizaje de tipo **simulación**.

5. Estrategias didácticas

Si el o la docente lo considera conveniente puede utilizar los "*documentos de trabajo*" programados o programar los propios, con el fin de desarrollar sesiones de aprendizaje con diversas estrategias didácticas. Según lo planteado en [18] tendríamos las siguientes como estrategias didácticas posibles:

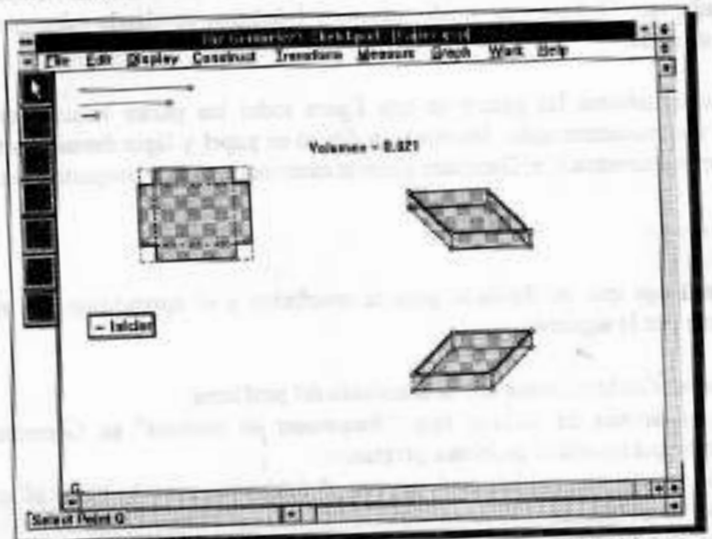
- de descubrimiento
- de verificación
- de simulación de eventos
- de pizarrón electrónico
- libro electrónico

6. Ejemplos

A continuación se presentan algunos de los problemas para los cuales he programado en Geometer's Sketchpad, con el fin de generar sesiones de aprendizaje.

Ejemplo No. 1. La caja de volumen máximo. *Se desea construir una caja rectangular sin tapa con una pieza de cartón de largo y ancho dado, cortando cuadrados idénticos en las cuatro esquinas y doblando los lados. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado que se debe cortar para obtener la caja de mayor capacidad?*

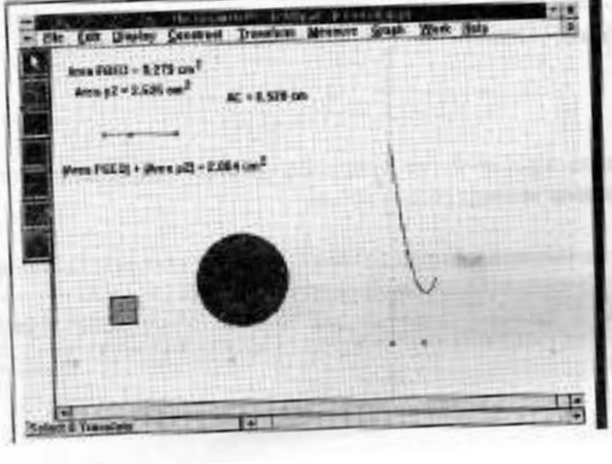
La siguiente figura muestra la pantalla principal del "*documento de trabajo*" programado en Geometer's Sketchpad para este problema.



El o la estudiante puede manipular libremente el tamaño del lado del cuadrado que deberecortarse para formar la caja, obteniendo de manera inmediata un gráfico de la caja que obtendría y el volumen correspondiente. El programa permite que exploren libremente para que descubran la existencia de una solución que maximiza el volumen. Si lo desean las y los estudiantes pueden variar las dimensiones originales de la lámina y volver a trabajar en la búsqueda de la caja de mayor volumen para nuevos casos. El programa complementa la sesión de aprendizaje con botones que permiten mostrar u ocultar una gráfica del volumen de la caja, con el cual las y los estudiantes pueden verificar la bondad de la solución encontrada. Con este "*documento de trabajo*" es posible apoyar sesiones de aprendizaje de tipo explo- ratorio que favorecen el descubrimiento. Las sesiones de aprendizaje se caracterizan por ser dinámicas.

Ejemplo No. 2. Doblar un alambre para formar una circunferencia y un cuadrado con áreas de suma mínima: *Un trozo de alambre de 20 pulgadas de longitud se va a cortar en dos partes; una se doblará para formar un cuadrado y la otra se doblará para formar un círculo. ¿Dónde se debe cortar el alambre de manera que la suma de las áreas sea máxima? ¿O mínima?.*

La siguiente figura muestra la pantalla principal de un "*documento de trabajo*" que he programado para desarrollar sesiones de aprendizaje para este problema.

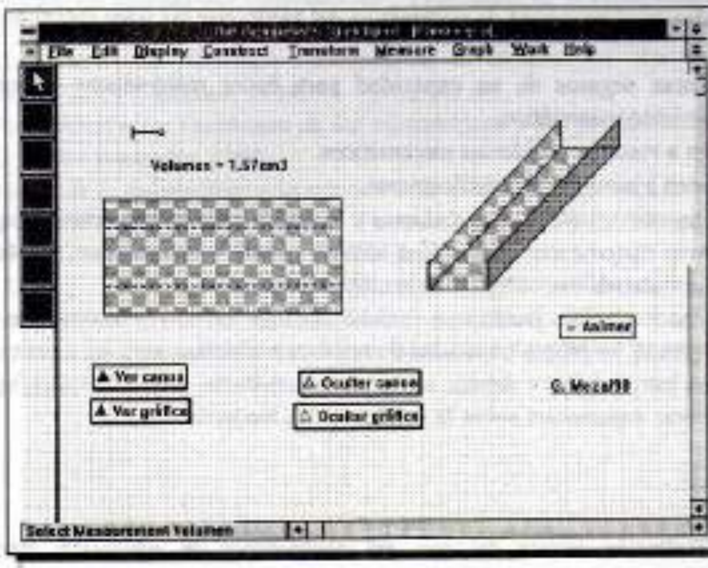


El o la estudiante puede, libremente, determinar de una manera dinámica la longitud del cuadrado, determinando automáticamente el radio de la circunferencia, y observar el valor de la suma de las áreas correspondientes. Para ayudar en las tareas de exploración el "*documento de trabajo*" tiene incorporado una gráfica de la suma de las áreas mediante la cual los y las estudiantes puede llegar a una solución aproximada al problema.

Con este "*documento de trabajo*" también es posible apoyar sesiones de aprendizaje de tipo exploratorio que favorecen el descubrimiento. Las sesiones de aprendizaje se caracterizan por ser dinámicas.

Ejemplo No. 3 La canoa de volumen máximo: *De una lámina metálica de largo y ancho dado se va a formar una canoa para el agua. Del ancho se va a doblar, a cada lado, segmentos del mismo tamaño para doblarlos de manera perpendicular al resto. ¿Cuánto se debe doblar para lograr la canoa de mayor capacidad?*

La pantalla principal del "*documento de trabajo*" que he programado para este problema se muestra en la figura siguiente.



En este "*documento de trabajo*" el o la estudiante puede cambiar libremente y de manera dinámica el valor del segmento de la parte que se debe doblar para obtener, por una parte, un gráfico de la canoa que se forma, y por otra, el volumen correspondiente. De esta manera los y las estudiantes pueden explorar para lograr la completa comprensión del problema, llegando además a una solución aproximada.

El "*documento de trabajo*" está programado de manera tal que las y los estudiantes pueden cambiar el tamaño de la lámina inicial de mandra que puedan trabajar el problema tantas veces como lo deseen. La existencia de botones del tipo ocultar/mostrar permiten a los y las estudiantes trabajar con una gráfica de los volúmenes que pueden utilizar para confirmar sus respuestas o mejorar la comprensión del problema.

7. Conclusiones

Mi experiencia programando "*documentos de trabajo*" en Geometer's Sketchpad para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de problemas de máximos y mínimos me ha permitido llegar a las siguientes conclusiones:

1. Es factible diseñar sesiones de aprendizaje interactivas sustentadas con el programa *Geometer's Sketchpad*, para el tema problemas de máximos y mínimos.
2. Las sesiones de aprendizaje corresponden al tipo simulación, que favorecen la exploración y el descubrimiento..
3. Las sesiones de aprendizaje promueven la enseñanza de la matemática en ambientes caracterizados por la exploración, el descubrimiento, el planteamiento de conjeturas, la búsqueda de argumentos para sustentar las conjeturas, la comunicación de resultados y el trabajo en equipo.
4. Las sesiones de aprendizaje son compatibles con los objetivos y contenidos del "Programa de Matemática" del Ministerio de Educación Pública.
5. Las sesiones de aprendizaje diseñadas como resultado el proyecto contribuyen a lograr los siguientes fines expresados en el programa de matemática del MEP: que las y los estudiantes...

   - se sientan seguros de su capacidad para hacer matemáticas y confianza en su propio pensamiento matemático.
   - lleguen a resolver problemas matemáticos.
   - aprendan a razonar matemáticamente.
   - experimenten situaciones abundantes y variadas, relacionadas entre sí, que los lleven a valorar las tareas matemáticas, desarrollar hábitos mentales matemáticos, entender y apreciar el papel que las matemáticas cumplen en los asuntos humanos.
   - exploren y puedan predecir e incluso cometer errores y corregirlos de forma que ganen confianza en su propia capacidad de resolver problemas simples y complejos.
   - puedan leer, escribir y debatir sobre las matemáticas, y que formulen hipótesis, comprobarlas y elaborar argumentos sobre la validez de las hipótesis.

Bibliografía

[1] Galvis, A. "Reflexión acerca del uso del computador en educación primaria y secundaria". *Informática Educativa*. V. 4. No. 1. Colombia, 1991.

[2] Galvis, A. "Evaluación de materiales y ambientes educativos computarizados". *Informática Educativa*. V. 6. No. 1. Colombia, 1993.

[3] Key Curriculum Press. *La enseñanza de la geometría con The **Geometer's Sketchpad***, 1993.

[4] Meza C., Luis G. "Problemas de máximos y mínimos en la educación secundaria". En: Revista *Las Matemáticas y su enseñanza*. No. 4 Vol. 2, 1990.

[5] Meza C. Luis G. "Eureka: The Solver. Un recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas superiores". *Comunicación*. V.15. Cartago, 1992.

[6] Meza C., Luis G. *Cómo usar MathCad*. Editorial Tecnológica de Costa Rica. Cartago, 1994.

[7] Meza C., Luis G. "Computadoras en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática: una taxonomía". En: *Memorias del V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemática (ECADIM)*. Javier Trejos (editor). Liberia, Costa Rica. 1997.

[8] Meza C., Luis G. et al. "Planeamiento de procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática asistidos con software matemático". En: *Memorias del V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemática (ECADIM)*. Javier Trejos (editor). Liberia, Costa Rica, 1997.

[9] Meza Cascante, Luis Gdo. "Enseñanza de la matemática asistida por computadora: mitos, amenazas, retos y oportunidades". En: *Memorias del Primer Congreso Internacional de Informática Educativa para secundaria*, 1998.

[10] Meza Cascante, Luis Gdo. "Experiencias educativas con Geometer's Sketchpad. En: *Memorias del Primer Congreso Internacional de Informática Educativa para secundaria*, 1998.

[11] Meza Cascante, Luis Gdo. "Sesiones interactivas programadas en Geometer's Sketchpad". En: *Memorias del Primer Festival de Matemática*, 1998.

[12] Meza Cascante, Luis Gdo. "La pirámide de objetivos educativos y la enseñanza de la matemática en la educación secundaria". En: *Memorias del Primer Festival de Matemática*, 1998.

[13] Meza Cascante, Luis Gdo. "Enseñanza del cálculo diferencial e integral con apoyo del programa *Geometer's Sketchpad*". *Revista Comunicación*, 1999.

[14] Meza Cascante, Luis Gdo. *Metodología de la enseñanza de la matemática*. Notas técnicas del curso Teoría del aprendizaje 2. ITCR, 1998.

[15] Meza Cascante, Luis Gdo. "Estrategias didácticas para el desarrollo de procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática asistida por computadora". Presentado en el *Taller Matemática asistida por computadora*. ITCR. Sede Regional San Carlos, 1998.

[16] Parra, Cecilia; Saiz, Irma. (Compiladoras) *Didáctica de la matemática. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Editorial Paidós Educador, 1994.

[17] Resnick, Lauren; Ford, Wendy. *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona, Editorial Paidós Educador, 1998.

[18] Sancho, L. *Aplicaciones de la informática a la educación II*. EUNED. San José, Costa Rica. 1997.

[19] Santos Trigo; Luz, Manuel ; Sánchez S., Ernesto. *Perspectivas en educación matemática*. Primera Edición. México D.F., México. Grupo Editorial Iberoamérica, 1996.

[20] Santos Trigo, Luz, Manuel. *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Primera Edición México D.F., México. Grupo Editorial Iberoamérica, 1996.

[21] Scott, P. "La computadora y la enseñanza de la matemática". *Educación Matemática*. V.2. No. 1. México, 1990.

"Series", entrenador diseñado sobre nuevas bases pedagógicas contemporáneas.

María del Carmen Rodríguez Ponce.[1]

La explosión del volumen de la información científico - técnica, producto de los ritmos acelerados con que se desarrolla la ciencia, provoca su rápida obsolescencia, es decir se plantea que existe una marcada reducción de los plazos de vida de las ideas científico - técnicas . Como consecuencia se produce la renovación de los productos y de la base técnico productiva a una alta velocidad. A su vez hay que tener en cuenta las características de las transformaciones tecnológicas de las últimas décadas. Entre las que podemos señalar los descubrimientos que se han producido en las ciencias básicas y la aceleración en el ritmo de las innovaciones tecnológicas. Esto implica un aumento considerable en la complejidad de las tareas que deben resolver los profesionales ya sea en la producción o en la investigación. Por tanto a la Educación Superior corresponde formar especialistas de alto nivel en las diferentes esferas de las ramas del saber, por lo cual la tarea principal de este sistema es elevar la calidad del egresado, lo que implica una mejor formación integral acorde a los principios de la sociedad socialista con perfil amplio, que garantice la posibilidad de un autodesarrollo que conlleve a su perfeccionamiento constante.

Por consiguiente, las tendencias del desarrollo científico le plantean a la universidad, por una parte, la tarea de estructurar la educación en correspondencia con los descubrimientos de las ciencias que estudian el proceso docente - educativo (la pedagogía, la psicología, la didáctica, la lógica y otros), es decir aprovechar al máximo los logros de estas ciencias para organizar y dirigir la enseñanza y por otra, preparar a un individuo capaz de formarse como especialista y actualizarse en su ciencia durante toda su vida.[2]

Por la necesidad de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje y para dar respuesta a estas dificultades decidimos por la fuerza de relación y complementación que se dá entre tecnología y enseñanza y por las potencialidades y caracteristicas novedosas que está adquiriendo el empleo de la computadora en la educación, diseñar un modelo que apoye bajo nuevas perspectivas psicopedagógicas el proceso de formación de conocimientos.

El modelo que en nuestra trabajo se prepone, está centrado en la asignatura Matemática III para ingenieros, en el tema inicial: SERIES el cual se ha caracterizado por ser el que mayores dificultades generaron en el aprendizaje los alumnos en la asignatura.

Por tanto la autora se planteó la tarea de conjugar estos dos aspectos Pedagógico-Informático para elaborar un **"Entrenador"** en el cual el alumno navega (manipula su objeto de conocimiento)según sus necesidades e intereses individuales, es decir analizar nuevamente el contenido impartido por el profesor en clases y/o resolver los ejercicios sobre el tema, organizados y clasificados de manera tal que facilite el tránsito por las diferentes etapas del proceso de asimilación y su tratamiento automatizado.

Para guiar científicamente al estudiante a través del proceso de enseñanza-aprendizaje nos apoyamos en la Teoria de Formación por Etapas de las Acciones Mentales desarrollada por P. Ya Galperin, que se enmarca en la tendencia pedagógica Histórico-Cultural de L. S. Vigotski y seguidores, que a nuestro juicio, permite crear las condiciones pedagógicas necesarias para cumplir los objetivos propuestos.

---

[1] ISPJAE, CUBA.

El entrenador constituye un momento del proceso, ya que el estudiante se ha enfrentado por primera vez a este contenido en el aula, el profesor orienta en la conferencia los aspectos teóricos correspondientes al tema, donde se elabora de forma conjunta la Base Orientadora de las acciones a asimilar y en otra clase se ejercita estos aspectos, en esta clase, los alumnos transitan inicialmente por la etapa materializada y posteriormente la mayoría deben estar en la etapa verbal, esto concibiéndolo que se logre con la maestría pedagógica que el profesor realice en el aula con el objetivo de que todos sus estudiantes o la mayor parte de estos, logren llegar a esta etapa. El tránsito de los estudiantes que no hayan logrado llegar hasta aquí, así como su paso por la etapa mental, lo realizarán mediante la solución de las tareas que se les orienta de forma independiente, ya que no hay más clases planificadas para esto, por lo que el control por parte del profesor de que todos sus estudiantes hayan asimilado con las características previstas en los objetivos las acciones objeto de asimilación, resulta difícil y es fundamentalmente un control y una retroalimentación de carácter empírico en su resultado final y muy pobre durante su proceso de formación.

Con el Entrenador se diseña de manera consciente tareas para cada una de las etapas del proceso de asimilación, por lo que se le brinda a los estudiantes la opción de regular su proceso de adquisición de conocimientos así como su retroalimnetación y criterios para su corrección si fuera necesario. Por otra parte el profesor puede controlar el tránsito por las diferentes etapas en el proceso de asimilación de todos sus alumnos, así como el grado de formación de las distintas características de la acción a formar en dicho proceso.

Sin desconocer otras vías para la asimilación de estos contenidos, como son las clases prácticas, tareas extraclases, etc., entendemos que el entrenador es una vía muy efectiva para culminar el proceso de asimilación, ya que se ha diseñando para que mediante él se resuelvan tareas para las distintas etapas del proceso de asimilación (Materializada, Verbal y Mental). Además resulta motivante para el estudiante, ya que aunque los alumnos en la conferencia participaron en la construcción de la BOA, este medio le da la posibilidad de interactuar con ese objeto de conocimiento y adecuarlo a sus necesidades de aprendizaje a través de la solicitud de diferentes niveles de ayuda que se ofrecen y de criterios sobre la adecuación de la solución a que llega que le permite un reajuste a su ejecución.

Las propias exigencias del trabajo nos obligó a realizar una reorganización del contenido del tema SERIES sobre la base del enfoque sistémico, en su variante estructural funcional, tomándose como invariantes el concepto de sucesiones y su convergencia, teniendo en cuenta el principio de ascensión de lo abstracto a lo concreto en el pensamiento, donde se reducen los aspectos particulares a los generales esenciales. Este tema estaba concebido de forma inversa, es decir de lo particular a lo general. Se estudiaba primeramente las series numéricas partiendo de las sucesiones numéricas, que se comenzó su estudio en la enseñanza precedente, y posteriormente las series de funciones, sin que quedara totalmente claro para los estudiantes que las primeras son un caso particular de estas últimas y por tanto, que a partir del estudio de las sucesiones de funciones y su convergencia, se estudia todo lo referente a las Series y el análisis de su convergencia.

Esta organización del contenido eleva el nivel teórico y de sistematización de este tema y por tanto debe contribuir a elevar el grado de generalización de los conocimientos asimilados por el estudiante. Por lo que la elaboración de la Base Orientadora de la Acción, (BOA) que es el sistema de condiciones teóricas y procesuales en el que debe realmente apoyarse el estudiante al asimilar la acción, es completa generalizada e independiente. Esta elaboración de la BOA se realiza en la primera conferencia que reciben los estudiantes a partir de los conocimientos que traen sobre las sucesiones.

Después que al estudiante se le presenta la BOA en el hipertexto ya elaborada por él en la conferencia, recibe preguntas de comprobación, que son de selección múltiple, V o F, o de completamiento, que no lleva un trabajo de operatoria, ya que lo que se persigue es conocer si el estudiante comprendió los aspectos fundamentales mostrados en la base orientadora. Dependiendo de sus respuestas, el sistema ofrece la opción de revisar la BOA o seguir adelante, en cualquier caso independientemente de lo que sugiera, el estudiante puede hacer lo que desee.

Aquí el entrenador pretende puntualizar esos elementos teóricos y procesuales del contenido objeto de estudio. Por lo que en el diseño del entrenador se elaboraron tareas que contemplan las exigencias de cada uno de los momentos funcionales de toda actividad humana: la orientación, la ejecución, control y ajuste o corrección.

Luego el entrenador prevé tareas que se corresponden con la fase de ejecución y aquí los alumnos continúan con un primer momento de manipulación de su objeto de conocimiento iniciado en la clase práctica, para la cual fue necesario una selección rigurosa de los ejercicios, adecuados a los objetivos propuestos en esta etapa.

El control no se hace por resultados finales, sino por operaciones para que sea posible detectar el nivel de comprensión de la BOA, es decir en que aspecto teórico de todos los necesarios es que presenta dificultades, a partir del conocimiento de esto por el programa, el alumno recibe ayuda de tal forma que puede rectificar el error cometido o reajustar su respuesta y tomar conciencia de ello antes de concluir erróneamente sobre el carácter de la serie.

El programa tiene un evaluador, el cual contabiliza los errores cometidos en la solución de un primer grupo de seis ejercicios y si ha sido capaz de rectificarlos o no, por tanto en la medida que llegue a la solución de estos de forma más eficiente, se le indicará si puede pasar a resolver los ejercicios de la próxima etapa o si por los errores cometidos de forma reiterada debe continuar la ejercitación hasta lograr el nivel adecuado para la etapa.

No se descarta que en este momento el alumno pueda reclamar alguna ayuda adicional del profesor e interrumpa el trabajo con el entrenador y requiera de un intercambio personal con éste. Poco a poco el debe irse desprendiendo de un apoyo o un control externo, es decir va transitando del control externo al control interno, así el proceso se debe ir reduciendo, sintetizando, menos desplegado, es decir los eslabones de la acción adquieren la forma de lenguaje interno, las acciones se transforman de las formas materiales hacia las mentales, de la no generalizada hacia la generalizada o sintetizada, de la forma detallada hacia la forma abreviada, de la acción compartida hacia la acción independiente, de la acción consciente hacia la automatizada.

Por tanto los ejercicios se resolverán de forma menos desplegada y no debe utilizar ningún tipo de ayuda, durante el desarrollo del mismo puede solicitarla al igual que en las etapas anteriores, pero se toma en cuenta en la evaluación final del ejercicio pues refleja pobre nivel de independencia.

El software propuesto es otra opción que tiene el estudiante para continuar trabajando con este tema, ya que se comienza a estudiar en la primera clase donde se elabora la BOA, y posteriormente se continua en una clase práctica, además se trabaja de forma independiente las tareas extraclases y seminarios, consideramos que el sistema es una buena alternativa para continuar el estudio del tema, sin que el profesor esté presente y sin embargo se corrijan los errores cometidos, así como reciban ayuda de los aspectos teóricos que presenten dificultades para su solución.

A su vez este sistema contribuye a incrementar el número de horas que el estudiante dedica al uso de las computadoras personales, lo que además de familiarizarlo con un tema de la disciplina le desarrolla habilidades en el manejo del hardware.

Conclusiones

Podemos plantear que la elaboración y utilización del software antes descrito, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha contribuido ha:

- Una mayor motivación por la asignatura, mejorando sustancialmente la asimilación de los contenidos de este tema y por tanto los resultados docentes.
- Contribuye además al desarrollo de habilidades informáticas en los estudiantes.
- Se estructuró con un carácter sistémico el contenido trabajado en el entrenador.
- Se logró el diseño de las tareas del entrenador cumpliendo las exigencias de cada una de las etapas del proceso de asimilación de los conocimientos.
- Se elaboró un conjunto de indicadores que contribuyen al desarrollo del control y autocontrol del aprendizaje del estudiante.
- El software constituye una primera aproximación de la conjugación de la Informática y el enfoque Histórico Cultural y la Teoría de la Actividad.
- El **Entrenador** se inserta al sistema didáctico para la integración de la computación en la disciplina Matemática en la carrera de Ingeniería Mecánica.

Bibliografía

[1] O'Shea, T. & J. Self. *Enseñanza y aprendizaje con ordenadores*. Edición Revolucionaria. Ciudad de la Habana., Cuba, 1989.

[2] Rodríguez, T. *Enfoque sistémico en la dirección de la asimilación de los conceptos básicos de la disciplina Matemática Superior*. Tesis Doctoral. Ciudad de la Habana, Cuba, 1991.

[3] Schoenfeld, A. *Understanding and Teaching the Nature of Mathematical Thinking*. University of California at Berkeley. USA, 1985.

[4] Talizina, N.F. Conferencias sobre los "Fundamentos de la Enseñanza en la Educación Superior". DEPES. Universidad de la Habana, Cuba, 1984.

[5] Colectivo de Autores, *Tendencias Pedagógicas Contemporáneas*, Universidad de la Habana, Cuba, 1996.

Un entrenador inteligente para el estudio de funciones reales de una variable real

Lourdes Ma. Hernández R.[1]

Resumen

El entrenador inteligente "Funciones" para el estudio de funciones reales de una variable real es un sistema que incluye una variada ejercitación, dirigida a desarrollar habilidades en la identificación y reconocimiento del dominio de funciones, así como en la modelación de situaciones problémicas. Su uso en la docencia proporciona beneficios económicos y sociales, ya que constituye un medio apropiado y útil para desarrollar habilidades, incentivar el estudio independiente y crear hábitos necesarios en la computación moderna. Resulta novedoso unir los aportes de la Pedagogía, la Psicología y la inteligencia artificial en el diseño de software educativo, que además de vincular la computación al proceso de enseñanza y aprendizaje permite una estrategia de enseñanza a la medida de cada alumno.

El Software ha sido incorporado como una nueva herramienta docente a la enseñanza del tema Funciones, para fortalecer la preparación Matemática e Informática de los estudiantes en tres centros de Educación Superior del país y la experiencia ha sido muy positiva.

La aplicación del Software Educativo Funciones en el que se emplean tecnologías de avanzada constituye una premisa importante para consolidar la cultural informática del personal docente y alumnado de la Educación Superior, permite además incrementar el número de horas que los estudiantes dedican al uso de Computadoras Personales para desarrollarles habilidades en el manejo del hardware, posibilita una atención diferenciada en el dominio del conocimiento al cual está dirigido. El sistema entrenador utiliza una máquina de inferencia concebida para la realización de aplicaciones enseñantes y constituye uno de los primeros Software inteligentes en ambiente Windows desarrollados en Cuba.

Introducción

Los estudiantes al arribar a la universidad arrastran problemas en su formación matemática. El tema FUNCIONES en particular es de los más deficientes y él es la base del Análisis Matemático que debe dominar todo futuro especialista en Ciencias Técnicas. Las funciones intervienen en numerosos procesos de la naturaleza y todo ingeniero considera representaciones técnicas y científicas en términos matemáticos, luego es necesario estudiar las fórmulas que permiten expresar las relaciones entre las magnitudes de un fenómeno. El presente trabajo propone un Sistema Entrenador sobre funciones para formar y ejercitar habilidades procedurales en la enseñanza de la Matemática, integrando aportes de la Pedagogía, la Psicología y la Inteligencia Artificial al proceso docente.

La Matemática forma parte del plan de estudios de las carreras de Ingeniería y Arquitectura en el ciclo básico y es interés del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería Mecánica del I.S.P.J.A.E continuar su perfeccionamiento e incrementar el uso de la computación en sus asignaturas.

Se concede a la computación un papel importante en los objetivos que se propone esta disciplina. Por tanto es de utilidad elaborar programas que además de vincular las asignaturas al uso de las técnicas de

---

[1] Profesora Auxiliar, Master en Informática Aplicada, (Departamento de Informática, Facultad de Ingeniería Mecánica, (ISPJAE).

cómputo contribuyan a consolidar conocimientos propios de la Matemática que sirven de base para la asimilación de futuros temas de estudio.

La computación influye positivamente en el proceso docente y entre sus ventajas está estimular el trabajo independiente del alumno mediante la utilización de Sistemas Entrenadores, Tutores y Juegos Didácticos entre otros. La posibilidad de ampliar la práctica utilizando como herramienta un Sistema Entrenador contribuye al interés y motivación de los estudiantes.

Un Sistema Entrenador Inteligente es un tipo especial de Tutor Inteligente que se encarga de formar habilidades, él no intenta el control total del proceso de enseñanza ni trata de formar conocimientos nuevos, pero sí supervisa toda la actividad práctica de solución de tareas. Al trabajar con estos Sistemas el alumno tiene la posibilidad de ordenar al Entrenador la tarea específica sobre la cual desea recibir entrenamiento.

Una de las características de estos Sistemas es su capacidad para comprender la actividad del estudiante en cada momento del desarrollo de la solución de un problema en particular. Ello implica conocer qué conceptos ha acumulado, cómo resuelve los ejercicios y analizar sus errores.

En Cuba existe un marco favorable para el desarrollo de Sistemas Tutores y Entrenadores en la enseñanza de la Matemática, ya que se cuenta con la experiencia acumulada durante años en el estudio de esta disciplina. En los últimos años ha crecido la producción de programas con fines docentes.

El presente trabajo pretende avanzar en el desarrollo de software docente con características inteligentes para el entrenamiento de conceptos relacionados con el tema FUNCIONES.

Funciones reales de una variable real

Desde edades muy tempranas el estudiante se familiariza con el concepto de correspondencia entre elementos, sin conocer la importancia que éste tiene en la Matemática. Baste señalar que con su ayuda se define uno de los conceptos más importantes de la Matemática: Función, que unido al dominio de los números reales constituyen la base principal para la construcción del Análisis Matemático.

La primera formalización del concepto Función se logra a mediados del siglo XIX. Este resultado se le atribuye principalmente al matemático alemán Dirichlet en 1837. El desarrollo histórico del concepto Función enriqueció al análisis y se transformó en una de sus ramas superiores: la Teoría de Funciones.

En la Escuela Primaria Cubana los escolares se inician en el tema Funciones cuando estudian la proporcionalidad directa, sin embargo no es hasta el octavo grado (Enseñanza Media) que se define por primera vez este concepto. Durante la Enseñanza Preuniversitaria el estudiante continúa trabajando con la definición formalizada en 8vo grado y con nuevas aplicaciones del concepto en diferentes asignaturas.

En la carrera de Ingeniería Mecánica el alumno de primer año en la asignatura Matemática I, retoma el concepto que ya tiene de función y lo amplía hasta definir una función de varias variables.

En algunas definiciones consultadas del concepto de Función existe vaguedad por el uso de las palabras ley o regla, de diferente significado para muchas personas o los autores se limitan a generalizar que una función numérica se representa por la ecuación $\mathbf{y = f(x)}$, no considerando la existencia de fenómenos para los cuales no es posible encontrar una fórmula que determine a **y** a partir de **x**.

El Sistema Entrenador que se propone en este trabajo le permite al estudiante estudiar y ejercitar las Funciones Reales de una Variable Real, siendo de gran importancia la definición de Función que se tome como punto de partida en el mismo. Los autores asumen la definición siguiente:

"Dados dos conjuntos **A** y **B**, una función de **A** en **B** es un subconjunto f de pares ordenados **(x,y)** de **AxB**, tal que para cada **x** perteneciente a **A**, existe un único **y** perteneciente a **B**, de manera que el par **(x,y)** pertenece a **f**".

La definición anterior soluciona de manera satisfactoria los problemas antes señalados y se ajusta a las exigencias del programa de estudio de la disciplina Matemática Superior para las carreras técnicas.

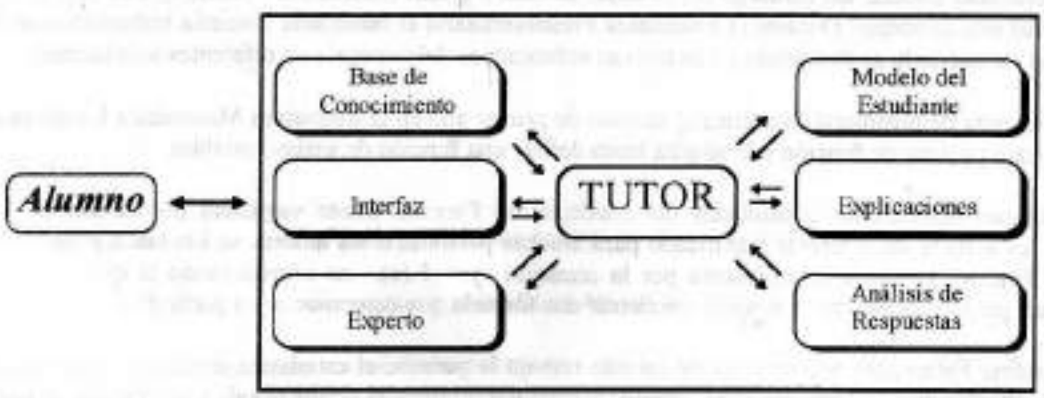
Diseño del sistema propuesto

La presente investigación propone un Sistema que emplea a la computadora como medio de enseñanza. Con el propósito de contribuir a aumentar la eficiencia de la enseñanza de la matemática a través de el uso de programas que permiten desde el repaso de una clase o la evaluación de los conocimientos adquiridos, hasta el aprendizaje de nuevas temáticas por medio de la Enseñanza Asistida por Computadora, lo que constituye un complemento importante para la actividad de los docentes.

Para el diseño del Sistema propuesto se tuvieron en cuenta los siguientes criterios:

1. Necesidad de que el futuro ingeniero sea capaz de proyectar representaciones técnicas y científicas en términos matemáticos con los cuales refleja los rasgos cuantitativos de los fenómenos que estudia.
2. Presentación de situaciones reales que contribuyan a que el estudiante sea capaz de interpretar el concepto de Función.
3. Interpretación de propiedades analíticas y geométricas de una Función de una Variable Real dada en forma explícita, gráfica o en un texto.
4. La Introducción de métodos de Inteligencia Artificial para perfeccionar el proceso docente haciéndolo más racional e interesante para los estudiantes.
5. Desarrollo de una concepción de trabajo en la cual los problemas transiten de lo simple a lo complejo, incrementando la complejidad en función de los resultados obtenidos en cada etapa de la resolución de ejercicios.
6. Aplicación de técnicas de hipertexto que vinculan el uso de recursos multimedia en la concepción del sistema de ayudas.
7. Diseño de una interfaz gráfica amigable que emplee las facilidades de las nuevas tecnologías existentes.
8. Establecer la comunicación con el estudiante a través de preguntas de selección y desarrollo. Estas últimas apoyadas en el procesamiento de lenguaje natural.

La estructura del Sistema contempla 7 módulos como se muestra en la siguiente figura.



En la Base de Conocimiento diseñada se parte del objeto Función Real de una Variable Real. A partir de la experiencia de los autores, los resultados en evaluaciones a los estudiantes y de las entrevistas a expertos en la materia se delimitó el contenido a tratar en la ejercitación, así como los tipos de ejercicios y los criterios a tener en cuenta en la clasificación de los mismos.

El contenido a enseñar aparece dividido en tópicos, el Sistema contempla tres ellos que son:

- Identificación de Funciones.
- Reconocimiento del Dominio de una Función.
- Modelación de Funciones.

Para estructurar el contenido anterior se utilizó el Sistema DELTA como máquina de inferencia, por ser concebido precisamente para desarrollar aplicaciones propias para la enseñanza. La forma de representación del conocimiento en el Sistema Delta se hace a través de objetos y relaciones. Delta tiene un conjunto de primitivas y objetos primarios que facilitan la programación declarativa e imperativa orientada a procedimientos. El código para los Objetos consta de: Nombre, Clase a la que pertenece, Estructura y Condiciones que debe cumplir. El código para las Relaciones tiene: Nombre (atributo de los objetos), Objetivo, Variables, Premisas y el Conjunto de Relaciones a realizar.

La caracterización del estudiante al cual se le aplicaría el software constituyó un elemento importante a considerar en el diseño del Sistema Entrenador, ella determinó los requisitos psico-pedagógicos del mismo.

Para conocer y controlar la actuación del estudiante, el sistema almacena en un fichero por alumno, un grupo de datos que son analizados por el módulo Tutor para decidir la estrategia tutorial a seguir con cada uno de ellos.

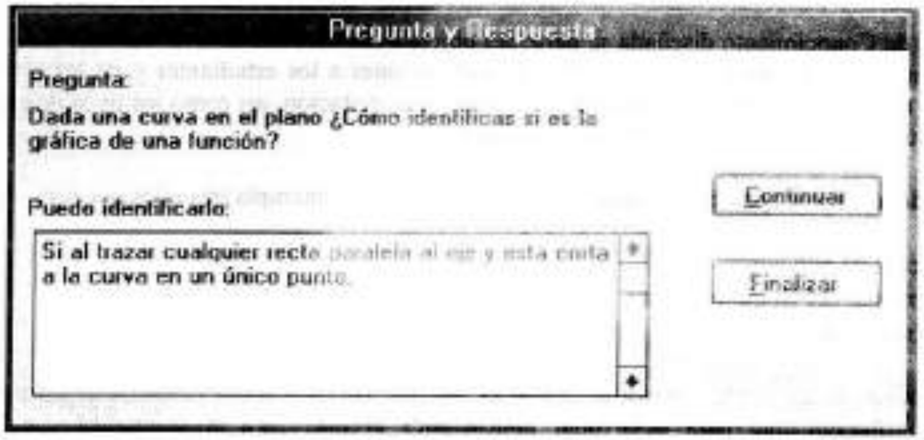
El módulo del Tutor se caracteriza por controlar el Sistema. Es el encargado de determinar **¿Qué hacer?**, **¿Cómo?** y **¿Cuando?**. Utiliza los conocimientos tanto pedagógicos como del dominio, contenidos en la base de conocimiento.

Las estrategias tutoriales representan la parte del programa enseñante que decide lo que hay que hacer en cada momento.

En el módulo del experto se describe la solución de los ejercicios de forma ideal. Permite comprobar las respuestas del estudiante. Estas pueden ser correctas o incorrectas.
El módulo análisis de respuesta se ocupa de analizar la respuesta que da el estudiante en cada tipo de ejercicio.

El módulo de explicaciones contempla los mensajes iniciales en los ejercicios que así lo requieren y las explicaciones dadas al estudiante en caso de error. En caso que sean mensajes se le da una breve información al estudiante que lo ubica en el tópico que enfrentará.

Interfaz es el módulo encargado de establecer el vínculo del sistema con el estudiante. Se concibió una interfaz amigable. por esta razón fue seleccionado el ambiente Windows versión 3.1 y se aprovechan muchos de sus recursos y facilidades, especialmente el uso de gráficos. En la siguiente figura se muestra la pregunta inicial del tópico *"Identificación de Funciones"*, es una pregunta de desarrollo en la que el estudiante tecleará la respuesta en lenguaje natural.



Programación del sistema

El diseño tuvo como objetivo obtener un Sistema Entrenador basado en el diálogo interactivo con el estudiante a través de menús y ventanas. El sistema utiliza la máquina de inferencia Delta, sobre ella se programó el módulo ejercitación para crear la base de conocimiento. Delta posee una rutina de interfaz que realiza el procesamiento de entrada/salida a través del diálogo con el estudiante. Esta rutina permite la conexión con el ambiente Windows que es el que en definitiva, trasmite los mensajes al estudiante. La programación de la interfaz del sistema se realizó en Borland Pascal para Windows. Se seleccionó dicho software por las facilidades que brinda la programación orientada a objeto. Además, este sistema cuenta con bibliotecas de clases para el trabajo con Windows.

Se utilizó la programación orientada a objetos por la flexibilidad del código. Delta también se apoya en la programación orientada a objetos. Los dialogos y menús que utiliza el sistema se confeccionaron con el programa Workshop del Borland Pascal sobre Windows. Este utilitario permite crear recursos de forma rápida y con un alto nivel de estética.

Aplicación del sistema

La primera aplicación del Sistema al proceso de enseñanza aprendizaje se realizó con un grupo de estudiantes de tres centros de Educación Superior de Cuba , como una opción de trabajo independiente orientado por el profesor. La experiencia resultó interesante y los estudiantes implicados en la misma se expresaron a favor de su incorporacion en el plan de actividades docentes que para este tema concibe el programa de la asignatura, pues todos consideraron que con el uso del Entrenador habían desarrollado habilidades en las acciones que este se propone dentro del tema Funciones,además de familiarizarlos con las ventajas que el ambiente Windows les brinda. La mayoria de los alumnos nunca antes habian trabajado con herramientas como esta donde se emplearon tecnologías de avanzada. El diálogo interactivo a traves de menús y ventanas así como el trabajo con mouse facilitó la comunicación estudiante - maquina. Los profesores que participaron en esta tarea también valoran de positivos los resultados alcanzados pues orientaron el trabajo con el programa en el momento que se impartía en clases este contenido y lo consideran un apoyo importante para la asimilación de los conceptos y el desarrollo de habilidades necesarias en tan importante tema de la matemática. Las evaluaciones realizadas avalan estas opiniones [illegible] utilizaron el software en su tiempo de estudio individual obtuvieron resultados satisfactorios.

El enfoque sistémico utilizado en el diseño de la aplicación permitió integrar de manera creadora elementos de la Pedagogía, la Psicología, la Inteligencia Artificial, la Informática y la Matemática. El uso de una máquina de inferencias concebida para la realización de aplicaciones enseñantes facilita la adquisición del conocimiento por el alumno. La estrategia tutorial seguida por el sistema durante la etapa de ejercitación atiende las diferencias individuales de los estudiantes en el dominio del contenido al cual está dirigido. Este software contribuye a incrementar el número de horas que el alumno dedica al uso de computadoras personales, lo que además de familiarizarlo con un tema propio de la disciplina le desarrolla habilidades en el manejo del hardware.

El desarrollo de software educativo como el propuesto, en el que se emplean tecnologías de avanzada constituye una premisa importante para la consolidación de una cultura informática del personal docente vinculado a la Educación Superior.

Bibliografía

[1] Alvarez, G. R; Lamar, M. R. TEXIN *Sistema Tutorial Inteligente para la Integración Indefinida*, 1990.

[2] Carbonell, J. *AI in CAI an Artificial intelligence Approach to Computer Assisted Instruction*. 1970.

[3] Castillo, A. . *Enfoque Sistémico para la Integración de las Técnicas de Computación a una disciplina*, 1994.

[4] García, E. . *Delta: una representación del conocimiento para la Enseñanza asistida por Computadora*, 1994.

[5] Martínez, R, F. *Una variante de Sistema Didáctico para la enseñanza del Cálculo Diferencial*. 1993.

[6] MES, Programa de Computación, 1987.

[7] Prieto, M.: Newton-T. *Un sistema de producción de Entrenadores y Tutoriales Inteligentes*. 1992.

[8] Rodríguez, R. *Cálculo Diferencial e Integral*. Tomo I, 1982.

[9] Sleeman, D y otros. *Intelligent Tutoring Systems*, 1988.

[10] WCCE: 3rd World Conference on Computers in Education, 1981.

Enseñanza de matemática mediante computador: CD de Matemática Básica 1[1]

Siegfried Carranza Schaller

La explosión científico-tecnológica que vivimos hace que, según especialistas en el ramo, el total de los conocimientos que la humanidad ha asimilado a través de su historia se duplique cada 11 años.

Esta situación indudablemente ocasiona un tremendo reto:

- Cómo almacenar y manejar tanta información?.
- Cómo asimilar tanta cantidad de conocimientos?.

Es indudable que en ambos casos las computadoras juegan un papel muy importante.

Se ha llegado a una situación en la que aunque uno tenga una especialidad muy concisa, ya casi no le alcanzan las horas solo para leer lo que en el mundo se publica sobre ella. Un intento de solución a este problema son los FOROS y los GRUPOS DE CORREO en Internet, mediante los cuales ya no tenemos que informarnos personalmente de toda la documentación publicada en el mundo, sino que un grupo de especialistas en el ramo se distribuye la tarea y luego comenta y recomienda lo que realmente es bueno y vale la pena leer, ahorrándole al resto una enorme cantidad de tiempo y trabajo. Pero subsiste el segundo problema: Cómo estudiar y asimilar tanta cantidad de conocimientos que se presentan a cada instante, en particular los temas matemáticos que son los que nos preocupan en este Congreso?, Cómo acelerar el dominio de álgidos temas matemáticos, que cada día aumentan en cantidad y calidad, ya que aún los temas más básicos y elementales cambian y se perfeccionan constantemente a la luz de nuevos enfoques y descubrimientos?. Cómo hacer que nuestros alumnos aprendan más rápido y mejor?.

Aquí se nos presenta a los educadores un tremendo reto: debemos trasmitir a nuestros alumnos en forma más eficiente nuestros conocimientos permitiendo una más rápida y profunda captación de los temas matemáticos que necesitan. Indudablemente tenemos que proveernos de las más modernas técnicas pedagógicas y didácticas que optimicen nuestra labor y mensaje, pero también es sumamente importante que hagamos uso de las ayudas adicionales para lograrlo, como por ejemplo: transparencias, slides, láminas, videos, presentaciones mediante computadora; muchas veces una imagen, una ilustración o una presentación puede ayudar mucho a la rápida comprensión de un tema. Pero sin duda una poderosa herramienta de ayuda a nuestra labor lo constituyen Tutores Interactivos en Multimedia.

Un CD con un Tutor Interactivo en Multimedia sirve de apoyo a la docencia y no es para reemplazar al profesor (aunque hay quienes así lo han sostenido), porque la calidad humana de un buen profesor es insustituible en su eficiencia. Sin embargo, un buen Tutor interactivo puede complementar notablemente su labor. Como prueba de ello presento ante este Congreso un CD con la asignatura completa de Matemática Básica 1 que se dicta en la Universidad de Lima, Perú.

Es un CD auto ejecutable, esto es: se pone en la lectora y se ejecuta solo. Después de algunas presentaciones animadas en tres dimensiones se presenta un menú con los capítulos de la asignatura a los que el alumno puede acceder directamente, seleccionado un capitulo aparece otro menú con los temas incluidos en el mismo, cada tema tiene una explicación teorica, casi siempre animada y con la voz del profesor explicando el tema, ejemplos animados, más ejemplos que el alumno puede solicitar solo si lo requiere, cuestionarios interactivos de auto evaluacion para ver si ha entendido, auto evaluaciones al final del capitulo que tiene niveles en los que solo puede pasar al siguiente si aprobó el anterior y cuyos resultados se pueden guardar en una base de datos. Al final del CD tiene todas las prácticas calificadas y exámenes que se tomaron el año pasado en la asignatura bajo dos modalidades: como test interactivo, donde el alumno tiene que escribir sus respuestas y al final obtiene su nota, y como un solucionario interactivo en que el alumno puede aprender a resolver las preguntas que no pudo.

Qué ventajas tiene este CD de MB1?

1. Es personalizado.
2. El alumno puede repetir los ejemplos animados y cualquier tema tantas veces como lo requiera.
3. Si no entiende una parte: hace clic sobre ella y obtiene explicación adicional o se lo manda donde está la información que necesita (cosa que no se logra cuando uno está leyendo un libro y que ocasiona mucha perdida de tiempo y aburrimiento, y es la causa fundamental de muchos fracasos).
4. Puede avanzar a su propia velocidad: si le hace falta puede pedir más ejemplos complementarios, pero si se siente seguro o conoce el tema sigue adelante sin siquiera verlos.
5. En todo momento los comentarios y observaciones se dirigen al alumno mencionando su propio nombre, para lograr una mayor identificación y personalización.
6. Es auto evaluativo.
7. Constantemente el alumno se auto evalúa para constatar si entendió el tema y si no lo hizo encuentra la explicación de sus errores o de como debió hacerlo.
8. Al final de cada capitulo tiene un test en que puede auto evaluarse y constatar si debe volver a estudiar el capitulo.
9. Al final del CD tiene todos las Prácticas Calificadas y Exámenes que efectivamente se tomaron el año pasado y a las cuales él se puede someter interactivamente y constatar si hubiera aprobado con ellas y como ya mencionamos también tiene los solucionarios interactivos que puede ir intentando resolver solo y cuando ya hizo una pregunta, con una tecla puede comparar su respuesta y desarrollo.
10. Es inter navegable:
11. El alumno puede acceder directamente al tema que desee.
12. En cualquier instante el alumno puede pasar de un tema a otro cualquier y regresar sin perderse.
13. Puede pasar rápidamente a cualquier tema que haya visto en la sesión, pues guarda todos los temas consultados.
14. Puede buscar palabras e ir inmediatamente a cualquier tema donde está la palabra consultada.

15. Permite el uso de hipervínculos, pudiendo incluso conectarse con Internet o cualquier program externo y regresar.

16. Permite el uso de base de datos, donde se puede guardar por ejemplo los niveles que el usuari consultó o aprobó.

17. Un programa de esta naturaleza en un medio tan accesible como un CD, definitivamente constituye u eficientemente apoyo a la labor del profesor.

18. En estos momentos estamos en un etapa de perfeccionamiento para someterlo a evaluación.

Bibliografía

[1] Adobe System Incorporated. User guide Adobe Premier 4, 1996.

[2] Frater, Harold; Paulizer, Dirk. *Todo el poder de la multimedia*, 1995.

[3] Frater, Harold; Paulizer, Dirk. *El gran libro de la multimedia*, 1997.

[4] Gedel, T.H. *3D Studio, tutoriales complejos*, 1996.

[5] Macromedia. *Using Authorware 5*, 1998.

[6] Shadock, Phillips. *Creaciones multimedia*, 1994.

Una experiencia con el asistente matemático Derive

Silvia Calderón L.[1];
Luis Hernández, Cristian Quesada, Ivonne Sánchez[2]

Resumen

El presente trabajo expone una experiencia en la enseñanza de los conceptos de límite y convergencia de sucesiones y series, mediante un acercamiento gráfico e intuitivo, en un curso de Cálculo con estudiantes de la carrera "Enseñanza de la Matemática asistida con computadora". Se trata de la incorporación de prácticas de laboratorio utilizando el asistente matemático DERIVE. Consideramos que la existencia de una herramienta computacional con la que el alumno pueda interactuar a medida a como se le presenten dudas, no sólo hace más eficiente su trabajo de laboratorio sino que lo motiva a aprender y a investigar.

Uno de los problemas a resolver en la enseñanza de la matemática es el aprendizaje de conceptos cuya asimilación no les sea sencilla a los estudiantes pero que, su interiorización y comprensión es muy importante para la adquisición de otros conceptos que les suceden. Por ejemplo, los conceptos de derivada, integral y series recurren a los conceptos de límite y continuidad.

Actualmente la computadora nos proporciona una herramienta para incursionar en la matemática, mucho de lo que antes no podíamos hacer, como: gráficas inimaginables o muy difíciles de realizar, cálculos interminables y tediosos, son ahora de fácil realización con su ayuda, y esto ha facilitado la comprensión y aprehensión de conceptos y resultados matemáticos.

La computadora permite el uso de representaciones simbólicas, el acceso a representaciones numéricas y visuales dinámicas, y puede ser utilizada como medio de exploración y donde los alumnos pueden expresar ideas.
Se enfatiza la importancia de las representaciones en el proceso de aprendizaje, el proceso de construcción de significados involucra el uso de representaciones y el aprendizaje de un concepto puede ser facilitado cuando hay más oportunidades de construir e interactuar con representaciones (tan diversas como sea posible) externas del concepto (Harel & Papert,1991).

Este artículo resume una experiencia realizada con los alumnos del curso Cálculo y Análisis2, quienes siguieron una serie de laboratorios sobre la convergencia en sucesiones y series, utilizando el asistente matemático Derive. Derive es un paquete computacional que se puede aprender en pocas sesiones, y permite realizar una serie de laboratorios relacionados con la materia en estudio.
El objetivo general de esos laboratorios fue hacer del infinito algo más accesible para los alumnos mediante el uso de la computadora como parte de un ambiente de aprendizaje. Se pretendió que el estudiante hiciera uso de la intuición, la visualización y la estimación numérica.
Veamos algunos de los laboratorios. Cabe señalar que estos son resueltos utilizando DERIVE.

Laboratorio N°1: Convergencia de una sucesión

Objetivo: Lograr que el estudiante, experimentalmente, conjeture el límite de una sucesión.

---

[1] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
[2] Estudiantes de la Carrera de Enseñanza de la matemática asistida por computadora.

Pasos a seguir:

- Se define la sucesión de Fibonacci y a partir de ésta se construye una nueva sucesión (dada en forma explícita). Se representa gráficamente y se conjetura un valor aproximado hacia el cual converge.
- Se determina un posible número natural a partir del cual los valores de la sucesión van quedando dentro de un intervalo bastante pequeño.
- Se define una sucesión cuyo término general es la suma de los n primeros términos de otra sucesión dada en función de los términos de la de Fibonacci, y se hace el estudio anterior.
- Se analiza experimentalmente el problema de la divergencia usando una sucesión con término general exponencial. Derive permite tomar un valor positivo(arbitrario) grande y observar que para éste siempre es posible determinar un valor mayor de la sucesión.

Resumen del laboratorio acerca de Sucesiones (ela borado por Luis A. Hernández)

La siguiente sucesión recursiva F(n) *(Sucesión de Fibonacci)*, donde:

F(0) = F(1) = 1

F(n+1) = F(n-1) + F(n)

Puede ser definida en Derive de la siguiente manera:

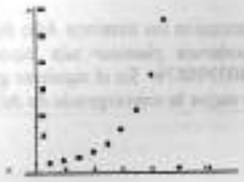
F(n) := ITERATE([k, j+k], [j, k], [1,1], n)

de la cual obtenemos dos componentes: F(n) y F(n+1).

Si utilizamos el comando **Vector** de la siguiente manera:

Vector([n, F(n)],n ,0 ,9) , obtenemos la siguiente tabla:

0	[1, 1]
1	[1, 2]
2	[2, 3]
3	[3, 5]
4	[5, 8]
5	[8, 13]
6	[13, 34]
7	[34, 55]
8	[55, 89]
9	[89,144]



cuyo gráfico es:

Gráfico 1

La siguiente sucesión A(n) es igual a:

`A(n)= F(n)/F(n-1)`, n = 1, 2, 3, ... escribiéndola en Derive como
`A(n):= Fib(n)/Fib(n-1)`, donde `Fib` extrae la primera componente del vector que se forma al utilizar F(n).

La sucesión A(n) nos forma una tabla vertical utilizando el comando Vector y con n desde 1 hasta 10, la gráfica de los puntos es:

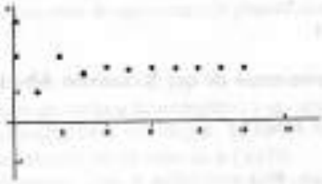


Gráfico 2

Utilizando la misma sucesión A(n) pero con n dede 95 hasta 100 se obtiene el siguiente gráfico:

Gráfico 3

Para n variando desde 95 hasta 100, la sucesión los términos A(n) de la sucesión son todos iguales a a 1.61803398874. Con este resultado podemos plantear una hipótesis: cuando n es un número suficientemente grande A(n) tiende a 1.61803398874. En el siguiente gráfico están las gráficas de A(n) y de y = 1.61803398874 para poder observar mejor la convergencia de A(n) al valor 1.61803398874 cuando n tiende a infinito.

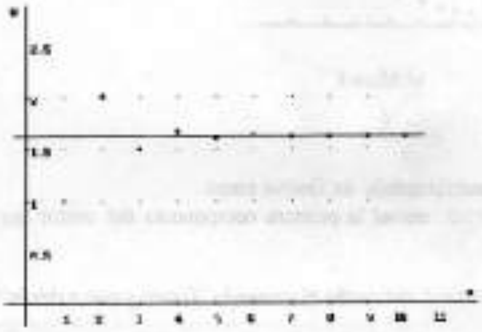


Gráfico 4

Gracias al gráfico 3 y 4 podemos convencernos de que la sucesión A(n) tiende a 1.61803398874 cuando n tiende a infinito.

La siguiente sucesión S(n) es igual a:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f_i}$$

Usando el comando Vector se forma la correspondiente tabla de valores, con n desde 1 hasta 10 y graficándola:

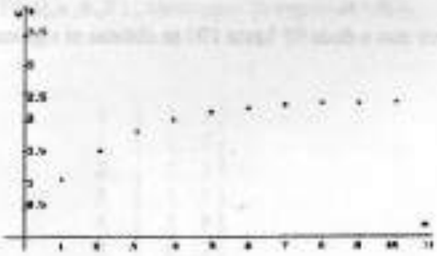


Gráfico 5

Después de graficar esa misma sucesión para n variando desde 155 a 160, se obtiene una gráfica muy similar a la de la figura 3, por lo que podemos conjeturar que la sucesión S_n tiende al número 2.35988566624. La siguiente gráfica muestra tal tendencia.

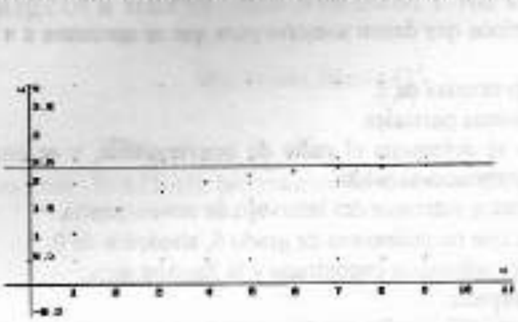


Gráfico 6.

Gracias al gráfico 6 podemos decir que la sucesión S(n) tiende a 2.35988566624 cuando n tiende a más infinito.

Laboratorio N°2: Límite de una función

Objetivo: Lograr que el estudiante conjeture y/o establezca experimentalmente la suma de una serie(infinita) a partir de los procesos de aproximación presentados

Resumen:

- Se considera una serie geométrica (convergente) y se calculan algunas de sus sumas parciales, para una cantidad de sumandos cada vez mayor. Se forma la sucesión correspondiente de sus sumas parciales y se grafica para un cierto valor de n ($n \in N$).
  Se hacen representaciones para n suficientemente grande, y se conjetura un límite para esa sucesión, el cual será el posible valor de la Suma de la serie geométrica . Se compara el resultado con el dado directamente por DERIVE.
- Un estudio similar al anterior se hace con una serie telescópica convergente.
- Se consideran algunas series convergentes para las cuales sólo es posible aproximar su suma. Mediante un análisis gráfico del comportamiento de las sucesiones de sus sumas parciales se conjetura un valor para sus sumas.
- Se experimenta con una serie divergente, mediante un análisis gráfico y algebraico se concluye sobre su divergencia.

Laboratorio N°3: Series

Objetivo: Lograr que el estudiante conjeture y/o establezca experimentalmente la convergencia de series alternadas, el radio de convergencia de una serie de potencias y la aproximación de una función mediante un polinomio de Taylor.

Resumen:

- Se considera una serie alternada que converge a π.
  Se utiliza el criterio de series alternadas para mostrar que la serie converge.
  Se hace el gráfico de sus sumas parciales y se explica cómo el gráfico sugiere la convergencia de la serie. Se sugiere un límite L.
  Se calcula la suma de sus mil primeros términos y se compara el resultado con L. Se concluye que tiende a π.

Se busca la cantidad de términos que deben sumarse para que se aproxime a π con 6 decimales correctos.

- Se trabaja con una serie de potencias de x.
  Se grafican algunas de sus sumas parciales.
  Mediante un anális gráfico se determina el radio de convergencia, y se corrobora utilizando el criterio del cociente en convergencia absoluta.
  Se hace un estudio de los puntos extremos del intervalo de convergencia.
- Se aproxima la función secx con un polinomio de grado 6, alrededor de 0.
  Se representa gráficamente el polinomio encontrado y la función secx.
  Se hacen observaciones al respecto.

Conclusiones

- A partir de un razonamiento intuitivo fue más sencillo pasar a la formalización de límite de una sucesión y de una serie.
- La observación de la velocidad de la convergencia demostró ser un aspecto interesante para que los alumnos encontraran explicaciones y construyeran significados del por qué algunas sucesiones eran convergentes o divergentes.
- El análisis cualitativo del intervalo de convergencia de series de potencias les permitió generar series numéricas convergentes y calcular algunos valores de funciones trigonométricas y trascendentes.

Bibliografía

[1] Apostol,T. *Análisis Matemático*, 1977.
[2] Harel & Papert. *Constructionism* Ablex Publishing Corporation, Norwood,NJ, 1991.
[3] Johnson,J.y Evans,B. *Discovering Calculus with Derive*. John Wiley & Sons, N.Y.,1995.
[4] Mora,W. *Elementos de programación (funcional) con Derive*, Escuela de Matemática. I.T.C.R.,Cartago, 1998.

Aprendiendo álgebra lineal con Matlab. Una experiencia didáctica

Ma. Isabel Bueno C.[1]

Palabras clave: Algebra lineal, MATLAB, laboratorios de cómputo, experiencia piloto.

Introducción

Este artículo muestra una experiencia piloto realizada con los estudiantes de primeros cursos universitarios por el Dpto. de Matemáticas de la Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra, Bolivia, durante el segundo semestre del año 1999. Dicha experiencia muestra los primeros resultados obtenidos en el uso de MATLAB como herramienta didáctica en el aprendizaje de ALGEBRA LINEAL por parte de estudiantes de carreras del área de Estudios Empresariales. Asimismo, mostrará las dificultades que surgieron en la aplicación de la experiencia, los materiales producidos, las primeras conclusiones, los planes a futuro en base a los resultados....

Las razones que motivaron al Dpto. de Matemáticas a introducir el uso de MATLAB como herramienta didáctica fueron diversas:

1. En la formación de los futuros profesionales es imprescindible el contacto con problemas de índole real lo cual implica entrenar al futuro profesional en la **modelación de problemas**, en la resolución del modelo y en la interpretación de los resultados. Sin embargo, los problemas reales presentan grados de complejidad que, en la mayoría de los casos, no pueden ser resueltos con lápiz y papel, es decir, requieren el uso de una computadora.
2. La metodología de enseñanza aplicada por nuestros docentes es muy tradicional y orientada a lograr destrezas operativas poco fundamentadas teóricamente. Se le da poca importancia al desarrollo de las habilidades intelectuales de orden superior por parte de los estudiantes.
3. **El rendimiento académico** de los estudiantes de carreras de Estudios Empresariales es muy bajo. Las estadísticas muestran que el porcentaje de aprobados por semestre no supera el 25%, sin contar con los porcentajes de abandono que en la materia Algebra Lineal son los más altos en relación con el resto de las materias del área de matemáticas.
4. Existe una clara **desmotivación** en los estudiantes de la materia de Algebra Lineal.
5. **El aprendizaje** es más **repetitivo** que significativo debido a varios factores: antecedentes escolares poco favorables en los sistemas de enseñanza-aprendizaje de la matemática , metodología de trabajo en el aula por parte del docente universitario muy tradicional , falta de motivación del estudiante universitario por el contenido de la materia , aparente poca aplicabilidad de los conceptos a áreas empresariales...

Todas estas razones, junto a otras de menor importancia, llevaron al Dpto. de Matemáticas a la decisión de adquirir el paquete básico de MATLAB para su uso experimental en la enseñanza de la matemática (cuando mencionamos el paquete básico queremos indicar que no contamos con el toolbox de matemática simbólica).

Los mayores retos para la aplicación de este experimento fueron en un principio, convencer a las autoridades universitarias de que el uso de recursos merecía la pena en función de los beneficios y crear en los docentes la motivación para su implementación. Los resultados que se mostrarán corresponden a una

---

[1] Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra, Departamento de Matemáticas. Santa Cruz de la Sierra, Bolivia.

experiencia piloto que permitió evaluar los instrumentos de medición, familiarizar a los docentes en el uso de MATLAB, pulir las prácticas de laboratorio y obtener ciertos datos de partida para realizar un experimento formal durante el primer semestre del año 2000.

Como inspiración para este trabajo se tomó la referencia del proyecto norteamericano ATLAST acrónimo de "*Augment the Teaching of Linear Algebra through the use of Software Tools.*" Este proyecto se desarrolló entre los años 1992 a 1997 con el patrocinio de la Fundación Nacional de Ciencias de Estados Unidos y con la coordinación de la Universidad de Massachusetts Dartmouth. Los talleres que se realizaron se situaron en trece regiones americanas e involucraron a 450 facultades de una amplia variedad de universidades. Los participantes a los talleres fueron entrenados en el uso de MATLAB y en cómo usar el software como parte de sus clases. Los participantes trabajaron en grupos para diseñar ejercicios para computadora y proyectos aplicables a cursos de Algebra Lineal básicos. Estos ejercicios fueron utilizados durante el año escolar siguiente a los talleres y después se consideró su inclusión en una base de datos. El resultado de este trabajo fue el libro " ATLAST Computer Exercises for Linear Algebra".

Metodología aplicada

A la hora de decidir cómo se iba a implantar el uso de MATLAB nos enfrentamos con tres posibilidades así como las combinaciones de las mismas:

a) Enseñar a nuestros estudiantes a usar MATLAB y crear prácticas de carácter individual.
b) Utilizar MATLAB como una herramienta de apoyo al docente en sus clases magistrales.
c) Convertir algunas de nuestras clases en sesiones de laboratorio dirigidas por el docente.

Analizando las bondades y desventajas de cada método se concluyó que:

a) la primera opción tomada de forma aislada convierte la computadora en una poderosa calculadora con muy poco valor pedagógico.
b) La segunda opción aislada presenta la dificultad de que no es posible contar con una computadora y un data-show en el aula cada vez que se necesita (limitación de recursos) y además sólo permite mostrar resultados que el profesor construye con lo cual no se enmarca dentro de las metodologías activas que pretenden la participación intensa por parte de los estudiantes.
c) La tercera opción, (en combinación con la primera) fue la considerada más idónea a pesar de las dificultades intrínsecas (de hecho toda metodología tiene sus aspectos positivos y negativos) en tanto que :
    - El estudiante participa activamente de la sesión de clase.
    - El estudiante puede descubrir conocimiento jugando apropiadamente con las capacidades de la computadora.
    - El docente supervisa y guía el aprendizaje de los estudiantes.
    - Hay disponibilidad de laboratorios de cómputo para todos los grupos de los docentes implicados en el experimento.

Las hipótesis que se manejaron acerca de la ventaja de usar MATLAB como herramienta didáctica en la enseñanza del álgebra lineal fueron:

a) El uso de MATLAB mejorará la motivación de los estudiantes en la materia.
b) La capacidad de los estudiantes para resolver problemas debe mejorar.
c) El índice de abandono de los estudiantes debe bajar significativamente.
d) El rendimiento académico debe mejorar .

Para implantar la metodología seleccionada se optó por llevar adelante la siguiente planificación:

a) Capacitación de los docentes en el uso de MATLAB y en su aplicaciones como herramienta didáctica.

b) Creación de los instrumentos de medición (encuestas, pruebas diagnósticas).
c) Realización de una encuesta y pruebas diagnósticas a los estudiantes para conocer su historia académica en el dpto. de Matemáticas , su interés y motivación por la materia, su capacidad para usar la computadora, su capacidad para resolver problemas cuyo modelaje implica utilizar conocimientos previamente adquiridos, su dominio de conceptos teóricos de soporte para la materia Algebra Lineal.
d) Creación de una guía de Prácticas de Laboratorio y una colección de ejercicios y problemas para que el estudiante trabaje individualmente también.
e) Programación de las clases en laboratorio.
f) Implantación de la nueva metodología. Se decidió elegir un día a la semana fijo para la realización de los laboratorios, lo cual implica que una de cada tres clases se realizó en los laboratorios de cómputo.
g) Reuniones de coordinación de los docentes implicados (seis profesores) para llevar adelante el experimento.
h) Al final del semestre, realización de nuevas mediciones (nueva encuesta, estadísticas sobre el rendimiento académico comparativas con semestres anteriores, nuevas pruebas ...) y generación de conclusiones para el desarrollo de un experimento formal en el primer semestre del año 2000.

Aspectos positivos y negativos en la implementación del proyecto

a) Docentes

Los profesores involucrados en el experimento piloto fueron seis , los cuales dictaron clases en ocho grupos. Todos los profesores participaron del curso de capacitación en el uso de MATLAB y, sorprendentemente, todos se mostraron muy entusiasmados en la implementación de la nueva metodología en contra de lo pronosticado inicialmente. Este hecho fue muy positivo dado que los profesores asumieron esta experiencia libremente (ninguno fue obligado a participar de ella) y la consideraron como una motivación para rever su cátedra desde otra perspectiva. Otro aspecto positivo, fue la participación activa de cinco de los docentes en todas las reuniones de coordinación y discusión acerca del progreso de la experiencia. Sin embargo, un factor muy negativo fue que tres de los docentes son de tiempo horario (dedicación parcial a la universidad) lo cual no les permitió participar activamente en la elaboración de los materiales. Sólo han sido usuarios de ellos. Los otros tres docentes son de tiempo completo pero la carga horaria de dos de ellos en la universidad es tan elevada que la elaboración de los materiales ha estado a cargo de una sola persona. Este factor se presenta como un punto negativo en tanto que se ha perdido la riqueza de un material producido por un grupo de profesionales con diferente experiencia, personalidad, intereses, metodología de trabajo...

b) Estudiantes

Los estudiantes acogieron entusiastamente los laboratorios de cómputo (de acuerdo a la encuesta realizada) debido a varias razones:

- Se rompe la monotonía de la sesión en el salón de clase tradicional.
- Ellos participan activamente de la clase.
- A la mayoría les encanta usar la computadora y además, tienen las habilidades básicas para hacerlo.
- Pueden visualizar resultados que antes solo eran trabajados analíticamente.
- El estudiante recibe atención individualizada

Sin embargo, la cultura imperante en los estudiantes acerca del modo en que se aprende matemáticas (realizar ejercicios mecánicamente memorizando un algoritmo desarrollado previamente por el docente) ha dificultado la implantación de un método que exige el razonamiento, el descubrimiento, la reflexión, el análisis...dado que las sesiones de laboratorio no pretenden la resolución de ejercicios estándar sino el descubrimiento de nuevos conceptos a través del juego, del ensayo, ...para crear un aprendizaje significativo.

c) Metodología

Inicialmente, se pensó en los laboratorios de cómputo como sesiones de reforzamiento de los conceptos previamente trabajados en el salón de clases pero más tarde se observó que, aunque estas sesiones son útiles e interesantes, sin embargo, resulta mucho más provechoso desde el punto de vista pedagógico, utilizar las sesiones de laboratorio como sesiones exploratorias de nuevos conceptos en las que el estudiante trabaja guiado por la intuición, la creatividad, los resultados del ensayo y del error, por el descubrimiento de propiedades, por la visualización gráfica de conceptos y resultados teóricos para después formalizar dichos descubrimientos, intuiciones , ensayos,...en la sesión de clase tradicional.

Otra dificultad en la aplicación del método fue el gran número de estudiantes por grupo (alrededor de 40) lo cual merma la capacidad del docente para reflexionar junto al estudiante en base a los resultados que obtiene y, sobre todo, para poder dar atención a todos los estudiantes en cada sesión de laboratorio. Para paliar parcialmente este problema se contrataron ayudantes de cátedra cuya labor fue colaborar con el docente en la sesión de laboratorio para dar atención a los requerimientos de los estudiantes. Sin embargo, esta ayuda es limitada dado que los ayudantes de cátedra son tan sólo estudiantes aventajados de semestres superiores y no docentes calificados.

d) Infraestructura

El problema acerca del cual se presentaron más quejas por parte de docentes y estudiantes fueron las condiciones físicas de los laboratorios. Cada laboratorio dispone tan sólo de 25 máquinas de las cuales una está reservada para el docente y del resto siempre hay alguna en mal estado. Ello implica que no se pudo contar con una máquina por estudiante. Por otro lado, los laboratorios tienen malas condiciones en lo que se refiere a la distribución espacial de las máquinas lo cual dificultad la audición y la visión de lo que el docente realiza al frente cuando da alguna explicación o reflexión relativa al tema.

e) Instrumentos de medición

Siempre que se habla de instrumentos de medición aparece la dificultad de cómo crear indicadores que permitan medir con fiabilidad . Nuestro interés fue medir los siguientes aspectos:

- Grado de motivación de los estudiantes
- Porcentaje de abandono
- Rendimiento académico.
- Capacidad para resolver problemas.

La dificultad se presentó a la hora de crear un indicador o instrumento de evaluación que permitiera medir con fiabilidad en qué medida los estudiantes mejoraron su capacidad para resolver problemas o en qué medida habían adquirido dicha capacidad en caso de no tenerla previamente.

Por otro lado, la implementación de las encuestas y pruebas diagnósticas se llevó a cabo en la primera semana de clase cuando aún no se había realizado ninguna práctica de laboratorio para no condicionar las respuestas de los estudiantes. Sin embargo, el período de adición y retiro de materias se prolonga por dos semanas con lo cual la conformación de los grupos varía en algunos casos sensiblemente. Esto impide poder comparar fiablemente los resultados inicial y final de los estudiantes de un mismo grupo y profesor.

f) Sistema de evaluación

Al implementar el uso de los laboratorios de cómputo como metodología surge la inquietud acerca del modo de evaluación. Lamentablemente, dadas las condiciones físicas de los laboratorios no era posible evaluar a los estudiantes de forma individual y presencial salvo en uno de los grupos que contaba con diez estudiantes. Esto obligó a realizar evaluaciones en grupo o bien individuales pero elaboradas fuera de la sesión de trabajo grupal.

g) Actitud de las autoridades ante la experiencia

Sorpresivamente, la actitud de las autoridades académicas (vicerrectora y decano de la facultad de ingeniería) fue muy positiva y de apoyo a la implantación de la nueva metodología de trabajo. Incluso ha surgido la apertura para la compra del toolbox de Matemática Simbólica para el próximo semestre lo cual nos permitirá ampliar el alcance de las prácticas de laboratorio.

Resultados de la encuesta y pruebas diagnósticas iniciales

Encuesta

La encuesta realizada solicitaba a grandes rasgos la siguiente información:

1. Edad
2. Sexo
3. Carrera que cursa el estudiante
4. ¿Ha cursado Algebra Lineal antes?
5. ¿Cuántas veces cursó la materia Introducción a las Matemáticas?
6. ¿Te gustan las matemáticas?
7. ¿Qué importancia otorgas a las matemáticas en tu carrera?
8. ¿Qué resultado(rendimiento académico) esperas obtener en Algebra Lineal?
9. ¿Qué grado de dificultad otorgas a esta materia?
10. ¿Has usado alguna vez la computadora?
11. ¿Te agradaría la incorporación del uso de la computadora como instrumento de trabajo en Algebra Lineal?

La tabulación de la encuesta arrojó los siguientes datos :

1. 2. 64% de mujeres y 36% de hombres.
2. Todos los estudiantes eran de carreras del área de Estudios Empresariales.
3. 9% de los estudiantes repetían la materia.
4. El 19.4% de los estudiantes había repetido la materia Introducción a las Matemáticas.
5. El 90% de los estudiantes manifestó que le gustan las matemáticas.
6. El 3.9% expresó la opinión de que las matemáticas son poco importantes en su carrera, el 43.7% opinó que son importantes y el 52.4% restante que son muy importantes.
7. El 3.97% de los estudiantes opinó que su rendimientos académico sería medio, el 41.6% que sería bueno y 54.5% restante, que sería muy bueno.
8. Respecto al grado de dificultad de la materia , el 4.12% estimó que la materia sería fácil, el 14.4% que sería medianamente fácil, el 71.13% opinó que sería difícil, el 8.25% que sería muy difícil y el 2.06% que no tenía idea al respecto de la dificultad.
9. El 92% de los estudiantes expresaron haber utilizado la computadora alguna vez.
10. El 95% de los estudiantes indicó que le agradaría la incorporación del uso de la computadora como instrumento de trabajo en Algebra Lineal.

Observación

Como puede observarse a partir de la encuesta, el grupo en cuestión presentaba caracteristicas óptimas en lo que se refiere a actitud hacia la matemática, antecedentes académicos en el área de las matemáticas y motivación lo cual restó interés a los posibles resultados por la aplicación de la experiencia. Por otro lado, el hecho de que la mayoria de los estudiantes hubiese utilizado la computadora con anterioridad y que tuviese una buena disposición para su uso allanaba el camino para la ejecución de la prueba piloto.
Lo que si llama la atención es que siendo que el 79.38% de los estudiantes consideraba que la materia es dificil o muy dificil , sin embargo, más del 96% considerara que su rendimiento seria bueno o muy bueno.

Prueba diagnóstica

Esta prueba estaba dividida en dos partes:

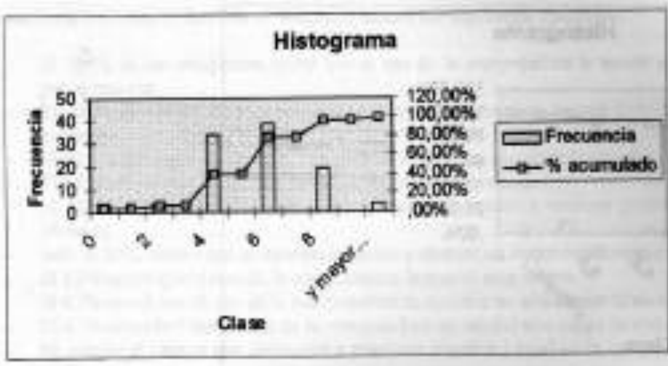
- Dominio de conceptos teóricos de apoyo a la materia.
- Capacidad para plantear y resolver problemas asi como la capacidad para interpretar los resultados obtenidos.

Los resultados obtenidos en la misma son:

En lo que se refiere al dominio de conceptos teóricos, se obtuvo:

Resumen estadístico	
Media	5,48076923
Error típico	0,20631406
Mediana	6
Moda	6
Desviación estándar	2,10399882
Varianza de la muestra	4,42681105
Curtosis	0,47979614
Coeficiente de asimetría	-0,27547618
Rango	10
Mínimo	0
Máximo	10
Suma	570

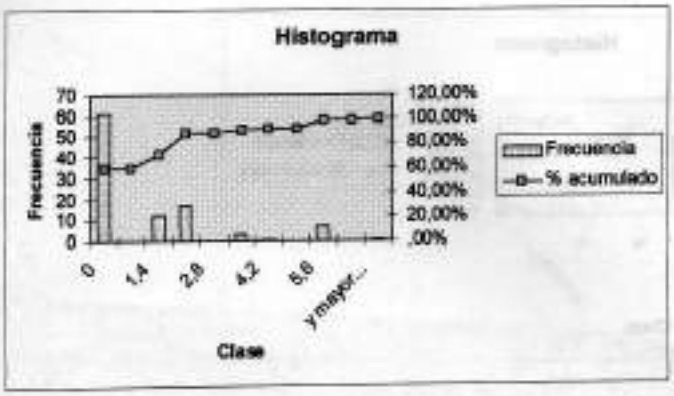
Clase	*Frecuencia*	*% acumulado*
0	4	3,85%
1	0	3,85%
2	4	7,69%
3	0	7,69%
4	34	40,38%
5	0	40,38%
6	39	77,88%
7	0	77,88%
8	19	96,15%
9	0	96,15%
y mayor...	4	100,00%



En lo que se refiere a la capacidad para resolver problemas:

Resumen estadístico	
Media	0,99019608
Error típico	0,15483855
Mediana	0
Moda	0
Desviación estándar	1,56379266
Varianza de la muestra	2,44544749
Curtosis	2,74448403
Coeficiente de asimetría	1,79118475
Rango	7
Mínimo	0
Máximo	7
Suma	101

Clase	*Frecuencia*	*% acumulado*
0	61	59,80%
0,7	0	59,80%
1,4	12	71,57%
2,1	17	88,24%
2,8	0	88,24%
3,5	3	91,18%
4,2	1	92,16%
4,9	0	92,16%
5,6	7	99,02%
6,3	0	99,02%
y mayor...	1	100,00%



Como puede observarse, mientras que el dominio de conceptos teóricos ronda en media el 5.48 de puntaje, la capacidad de resolver problemas presentó una media de puntuación de 0.99. En realidad , estos resultados no nos sorprendieron ya que la habilidad para resolver problemas no ha sido desarrollada en nuestras aulas hasta el momento, siendo éste un nuevo objetivo en nuestros planes de estudio mientras que el involucramiento de los estudiantes con el contenido teórico viene siendo desarrollado en los últimos años.

Experiencia en el grupo MT-211B

De los ocho grupos que intervinieron en esta experiencia, hubo uno con unas caracteristicas muy especiales, el grupo MT-211B:

- El profesor del grupo es el que elaboró los materiales de apoyo, es tiempo completo en la universidad y tiene una especialidad en Metodología y Didáctica de la Matemática.
- El grupo contaba con tan sólo doce estudiantes.
- El 70% eran estudiantes repitentes de la materia Algebra Lineal.
- El 80% habían repetido la materia previa más de una vez.
- Al 70% de ellos no le gustaban las matemáticas.
- El 40% consideraba que las matemáticas son poco importantes en sus carreras respectivas.
- En lo que respecta al resultado de la prueba diagnóstica, el 100% obtuvo una calificación de 0 en el apartado de resolución de problemas. El promedio en el apartado de dominio de conceptos teóricos previos fue de 3.2.

Debido a las características de este grupo (poco número de estudiantes) fue en él donde pudo aplicarse cabalmente la experiencia con el uso de la computadora además de tratarse del grupo con un peor historial académico y con una baja motivación por la materia. En este grupo, se realizó una práctica de laboratorio semanal, se realizaron exámenes prácticos en papel y computadora, los exámenes parciales y final se realizaron en papel y en computadora con un valor del 50% para cada parte. Las observaciones mostraron que:

- El resultado de los exámenes tomados en computadora fue mejor que aquellos realizados con lápiz y papel
- El juego es una buena estrategia de aprendizaje con adultos.
- Las capacidades gráficas de la computadora mejoran el nivel de significación del aprendizaje.
- El uso de la computadora muestra una visión más realista de las capacidades y aplicaciones de la matemática.

La encuesta realizada al finalizar el semestre mostró los siguientes resultados:

- El 100% de los estudiantes opinó que el uso de la computadora le ayudó a mejorar su motivación por la materia.
- El 100% de los estudiantes recomendó que se siga empleando esta metodología en los próximos semestres.
- El 83% estimó que el uso de la computadora hizo más divertida la materia.
- El 67% estimó que le ayudó a aprender mejor los conceptos.
- El 100% indicó que el uso de la computadora le ayudó a resolver problemas de un modo más eficiente.
- Sólo el 50% estimó que el método le ayudó a obtener un mejor rendimiento académico.
- El 83% opinó que el uso de la computadora le aportó algo nuevo.
- El 83% opinó que el uso de la computadora le ayudó a no abandonar la materia.
- El 83% consideró que el uso de la computadora no añadió una carga de trabajo extra significativa
- En cuanto al tiempo que dedicaron a practicar Algebra Lineal en la computadora, el 100% invirtió menos de 5 horas por semana.

Un ejemplo de práctica de laboratorio

Práctica de laboratorio 10.
Combinaciones lineales y espacio generado.

Combinación lineal

Dados los vectores $u_1,\dots,u_n$ del espacio vectorial V, llamaremos combinación lineal de los n vectores a toda expresión del tipo:

$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ donde $\alpha_1 \dots \alpha_n$ son escalares.

En particular, diremos que el vector w del espacio V es combinación lineal de $u_1,\dots,u_n$ si existen escalares $\alpha_1 \dots \alpha_n$ tales que:

$w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$

1. Construya tres vectores de R^2, u, v y w. Escriba el comando lincomb(u,v,w). Repita con otros juegos de vectores.

2. Escriba el comando cogame. ¡ Qué lo disfrute!. Puede jugar sólo o con un compañero. Para conocer las reglas del juego, escriba help cogame.

3. Genere aleatoriamente un vector de R^2,u . Genere seis escalares aleatoriamente. Multiplique escalarmente el vector u por cada uno de los escalares. Grafique los siete vectores en un mismo gráfico y con el mismo color. ¿Qué pasaría si aumentásemos el número de vectores indefinidamente?

4. Repita el ejercicio anterior en R^3. Utilice el comando **drawvec3(u,'c',m).**

5. Genere aleatoriamente dos vectores en R^2, u y v. Genere 12 números aleatorios. A seis de ellos llámelos (k1, k2,k3,...) y a los otros seis (t1,t2, t3...). Construya los vectores :

   wi= ki*u+ti *v i={1,2,...6}

Se dice que wi es una combinación lineal de u y v.
Grafique conjuntamente los vectores u, v y los vectores wi con el mismo color. Observe la gráfica. ¿Qué hubiera pasado si aumentáramos el número de escalares indefinidamente?

Espacio generado por varios vectores

Dado el espacio vectorial , V, llamaremos Espacio vectorial generado por $u_1,...,u_n$ al conjunto formado por todas las combinaciones lineales de $u_1,...,u_n$.
Es decir,

$gen(u_1,...,u_n) = \{x \in V: \ x = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$ para algunos escalares $\alpha_1 ... \alpha_n \in \Re\}$

El espacio generado por $u_1,...,u_n$ es un subespacio vectorial de V.

6. (Lápiz y papel). ¿Qué tipo de subespacio vectorial de R^2 será el espacio generado por:
   a) El origen
   b) Un solo vector
   c) Dos vectores paralelos
   d) Dos vectores con diferente dirección.

7. Escriba el comando **gen2** y juega con el concepto ESPACIO GENERADO.

8. Utilizando el comando **espacio_generado** determine el espacio generado por:
   a) El origen de R^2
   b) Un solo vector
   c) Dos vectores paralelos
   d) Dos vectores no paralelos.
   e) Tres vectores paralelos
   f) Tres vectores con diferente dirección

9. Problema

Una fábrica de pinturas mezcla ciertas cantidades de pintura azul, amarilla y roja para conseguir dos colores especiales C1, C2 . La siguiente tabla muestra las cantidades de cada color necesarias para formar 1 litro de los colores especiales:

	C1	C2
Azul	2	1
Amarillo	3	2
Rojo	0	2

a) Determinar si sería posible formar un color combinando apropiadamente C1 y C2 sabiendo que dicho color podría formarse utilizando 5 unidades de azul, 8 de amarillo y 2 de rojo.
b) Suponiendo que cualquier color puede ser formado combinando apropiadamente los colores azul, amarillo y rojo, ¿será posible formar cualquier color combinando apropiadamente los colores especiales C1 y C2?
c) Si se hubieran formado los colores especiales de otra forma, ¿habría sido posible conseguir cualquier color combinando apropiadamente esos dos colores especiales?

Conclusiones

A partir de la experimentación realizada, se llegó a diversas conclusiones que servirán de información de partida para la experimentación formal que se realizará en el semestre I/2000.

- Los beneficios obtenidos en el uso de la computadora como herramienta didáctica están estrechamente relacionados con las características del profesor del grupo respectivo en cuanto a: su dominio de MATLAB, sus capacidades pedagógicas, su interés por el nuevo método, su involucramiento en la elaboración de los materiales...
- El uso de la computadora ayuda sensiblemente a mejorar la motivación de los estudiantes por la materia. (El 82% de los estudiantes así lo expresó en una encuesta final).
- Parece que el rendimiento académico no se ve afectado positivamente por el uso de la computadora. El grupo de docentes argumenta que la mejora en el nivel de motivación no fue suficiente para romper con la cultura de nuestros estudiantes la cual proclama: "Estudio sólo

para los exámenes". Por otra parte, el uso de la computadora reduce la atención en los procesos operativos mecánicos para obligar al estudiante a centrar su atención en desarrollos teóricos, en la resolución de problemas, en el razonamiento lógico... todas ellas habilidades de orden superior que requieren de un esfuerzo mayor que el desarrollo de la buena memoria.

- El nivel de abandono no parece verse afectado por el uso de la computadora.
- La capacidad para resolver problemas mejora, sin embargo,no podemos otorgar el mérito enteramente al uso de la computadora dado que, por primera vez, existió un esfuerzo conjunto por parte de los docentes en desarrollar dicha habilidad como objetivo central del programa de estudios. (El 72% de los estudiantes opinó que el uso de la computadora le ayudó a resolver problemas con más eficiencia).
- Creemos que los aspectos positivos más importantes del uso de la computadora como herramienta didáctica están en:
  - Mejora de la motivación de los estudiantes
  - Capacitación en el uso de herramientas computacionales
  - Mejora en el nivel de significación del aprendizaje, lo cual no redunda necesariamente en un mejor rendimiento académico.
  - Crear una visión más realista de las capacidades y aplicaciones de la matemática.

Sugerencias y recomendaciones

- Continuar implementando el uso de la computadora como herramienta didáctica.
- Crear un indicador que mida suficientemente bien el nivel de significación del aprendizaje de los estudiantes como influencia del uso de la computadora.
- Crear un indicador que muestre la influencia de las capacidades gráficas para mejorar la significación del aprendizaje.
- Explorar la influencia del uso de la computadora en la motivación y en el nivel de significación del aprendizaje tomando como factores de influencia:
- El juego como metodología.
- Las capacidades gráficas de la computadora.
- Será necesario reducir el número de alumnos por aula para optimizar el uso de la computadora como herramienta didáctica.
- Capacitar a los docentes en el uso didáctico de las prácticas de laboratorio e involucrarlos en la elaboración de los materiales.

Bibliografía

1. Dale H., Schunk, *Teorías del Aprendizaje*. Prentice Hall, 2ª ed., 1997.
2. Du Boucheron, L.B. *Algebra Lineal Interactiva*. Mc Graw-Hill, 1995.
3. Leon, S.; Herman, E., Faulkenberry, R. *ATLAST Computer Exercises for Linear Algebra*. Prentice Hall, 1997.
4. Sanz, P.; Vázquez F.C.; Ortega, P. *Problemas de Algebra Lineal. Cuestiones, ejercicios y tratamiento en Derive*. Prentice Hall, 1ª ed., 1998.
5. Stanley I. Grossman. *Algebra Lineal*. Mc. Graw-Hill 5ª ed., 1996.

Resolución gráfica de inecuaciones mediante el método de una franja

Sigurd Ramos M.; Laura Barahona I.; Irene Herrera Z.[1]

Introducción

El propósito de esta ponencia es mostrar un programa computacional, desarrollado con el paquete Mathematica 3.0, el cual permite resolver inecuaciones algebraicas mediante el método de una franja. Dicho software da la posibilidad de graficar las expresiones involucradas en una desigualdad, mostrar las soluciones en el gráfico, ya sea mediante una franja con la información de los signos para cada intervalo, o resaltando la porción de la curva donde se cumple la desigualdad. Otra opción que da es la de presentar el proceso realizado para obtener la solución incluyendo la franja.

El proceso de enseñanza-aprendizaje necesita ser cada vez más ágil. El uso de la computadora como apoyo a la educación es un medio para lograr dicho objetivo. El desarrollo de aplicaciones para determinados temas, sobre todo en la matemática, ayuda en el proceso de comprensión de la misma. En este caso, se quiere presentar este programa como una herramienta que facilite el proceso de análisis y solución de inecuaciones algebraicas. El cual puede ser utilizado tanto por estudiantes como por profesores dado su relativa facilidad de operación.

Antecedentes

El fin de milenio es una realidad en nuestras vidas y sin duda alguna, las cosas han cambiado. Hoy día, es común escuchar como el gobierno y otras entidades encargadas de la educación en toda Latinoamérica y específicamente en Costa Rica, se interesan por involucrar nuevas tendencias pedagógicas y en especial, se siente una continua preocupación por dotar con los más novedosos avances tecnológicos a nuestras escuelas y colegios en general. Y es que la premisa de la que se parte es sin duda alguna muy acertada, ya que invertir en las futuras generaciones, es sinónimo de asegurarnos prosperidad en un futuro bastante cercano. Esto obliga al educador actual a prepararse de manera integral y a que consciente de su papel fundamental en la sociedad en la que vivimos, busque maneras de complementar o renovar el proceso de enseñanza-aprendizaje. De ahí que la informática educativa poco a poco haya ido tomando mayor auge, ya que permite una mayor agilidad y simplicidad dentro de dicho proceso.

Y es que el entorno escolar, ha de asumir dichas realidades técnicas presentes en el entorno sociocultural de nuestros alumnos, en función de su gran potencial en cuanto a comunicación de masas y almacenamiento masivo de múltiples tipos de información. Además, es deber del docente, el preparar al estudiante ya que la progresiva implantación de estas técnicas en el tejido social, generan la necesidad futura de profesionales con acceso o manipulación de informaciones cada vez más variadas y complejas sobre soportes de tipo informático, audiovisual o ambos a la vez.

Todo ello genera nuevas perspectivas hoy ya presentes en nuestra sociedad en diversos órdenes: En el orden cultural, se requiere dominio de conocimientos básicos informáticos que permitan autonomía ante el acceso a la información. En el orden económico, el campo informático y audiovisual se muestra con amplias posibilidades profesionales y amplias necesidades de formación básica, continua y permanente.

[1] Estudiantes de la Carrera Enseñanza de la Matemática asistida por Computadora del I.T.C.R.

En el orden político, es bien clara la posición de introducir nuevas tecnologías, como ya le mencionamos, dentro de los planes de estudio escolares y colegiales.

Ahora, consecuentemente con lo establecido en los puntos anteriores, y como complemento para el diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje, se tienen en cuenta los siguientes criterios didácticos:

1. Fomentar la actividad y participación del alumnado como protagonista de su propia formación.
2. Procurar la reflexión, la deducción de conclusiones a partir de observaciones o sencillas investigaciones, la confrontación de opiniones, la inferencia racional, la verbalización de emociones, ideas...
3. Fomentar el interés y facilitar la utilización adecuada de los códigos convencionales: oral y escrito, matemático, gráfico, informático, etc.
4. Guiar hacia el logro de la propia autonomía en la adquisición del saber.
5. Respetar las peculiaridades de cada alumno o alumna y de cada grupo, adaptando métodos y recursos.
6. Utilizar métodos y recursos variados que permitan el desarrollo de la capacidad crítica y creativa, así como la motivación para continuar aprendiendo.
7. Tener en cuenta los aprendizajes que exigen un ámbito mayor que las experiencias de aula (actividades extra escolares, usos de la biblioteca, recreo, revista del centro, etc.).
8. Potenciar la creación y el uso de estrategias propias de búsqueda y de organización de los elementos requeridos para resolver un problema o afrontar una situación.

Generalidades del Programa

- El presente programa, realiza un estudio gráfico de las desigualdades el cual está en capacidad de mostrar no sólo las soluciones de dichas desigualdades, sino que presenta gráficamente los intervalos de solución y una franja que especifica aún más dichos resultados.
- La interfaz cuenta con cuatro celdas principales entre las que están: "Acerca de las desigualdades", "Desigualdades entre dos expresiones algebraicas", "Limitaciones del Programa" y la celda de "Acerca del programa". (Véase figura 1).

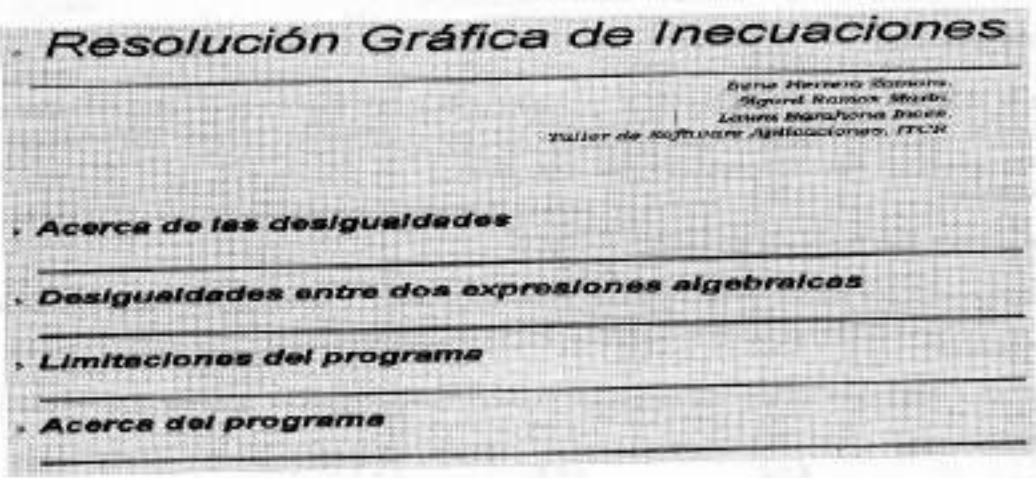


Figura 1. Interfaz principal del programa

- La celda de "Acerca de las desigualdades" contiene algunas generalidades importantes acerca de las inecuaciones.

- La celda de "Desigualdades entre dos expresiones algebraicas" presenta un detallado estudio de las inecuaciones de la forma $F(x)>G(x)$, $F(x)<G(x)$, $F(x)\geq G(x)$, $F(x)\leq G(x)$. Además, se presenta una explicación de la estrategia utilizada para resolver dichas inecuaciones, una paleta de ejemplos para que el usuario se familiarice con la forma de escritura de las expresiones recibidas por el programa. Además, se tiene una celda en la que el usuario tiene la posibilidad de digitar nuevas desigualdades. Finalmente, el programa cuenta con tres botones que se detallan seguidamente (véase figura 2):

a) Botón "Gráfica": muestra la gráfica de las expresiones involucradas a uno y otro lado de la desigualdad, resaltando en el gráfico y en los ejes los intervalos de solución (en color rojo).

b) Botón "Franja": presenta un gráfico con una franja en la parte inferior del mismo, la cual indica los signos correspondientes a cada intervalo.

c) Botón "Proceso": efectúa el proceso algebraico correspondiente hasta obtener la solución de la desigualdad. Y muestra, además, la franja que indica los signos para cada intervalo. Valga agregar, que el programa permite factorizar en todo el conjunto de los números reales y puede utilizar cualquier variable (sólo una para cada caso).

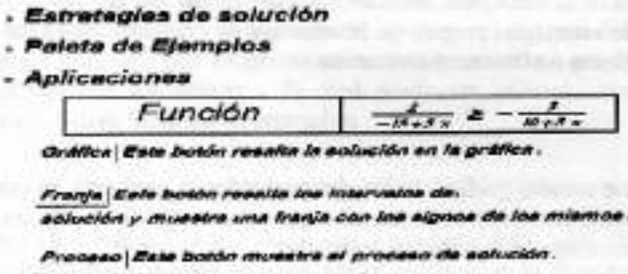


Figura 2: Opciones de la sección "Desigualdades entre dos expresiones algebraicas"

Uso del programa

Antes de explicar la manera de utilización del programa explicaremos con un ejemplo en qué consiste el "Método de una franja". Tal como su nombre lo dice, este método consiste en presentar la(s) solución(es) de una inecuación algebraica mediante una sola franja. Para ello se debe seguir el siguiente procedimiento:

Por ejemplo: Para resolver la inecuación: $\dfrac{x+1}{x+3}\leq 2$

1. Es primordial que todos los términos diferentes de cero se hallen a un mismo lado del símbolo de la desigualdad: $\dfrac{x+1}{x+3}-2\leq 0$
2. Se deben juntar todos los términos en una sola expresión (simplificación) y factorizar el numerador y el denominador: $\dfrac{x+1-2x-6}{x+3}\leq 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{-x-5}{x+3}\leq 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x+5}{x+3}\geq 0$
3. En este caso no fue necesario factorizar.
4. Se pueden observar tres posibles intervalos: $]-\infty,-5[$, $]-5,-3[$ y $]-3,+\infty[$

5. Elegimos un valor de prueba[2] para cada intervalo, los cuales en este caso pueden ser: -6, -4 y -1 respectivamente.
6. Probamos con cada valor en la expresión obtenida en "2." Para obtener el signo correspondiente al intervalo en que se encuentra

- $\dfrac{-6+5}{-6+3}=\dfrac{-1}{-3}=\dfrac{1}{3}$ (Signo " + ")
- $\dfrac{-4+5}{-4+3}=\dfrac{-1}{-1}=-1$ (Signo " - ")
- $\dfrac{-1+5}{-1+3}=\dfrac{4}{2}=2$ (Signo " + ")

7. Entonces sintetizamos la información en la siguiente franja:

$-\infty$ -5	-5 -3	-3 $+\infty$
+	−	+

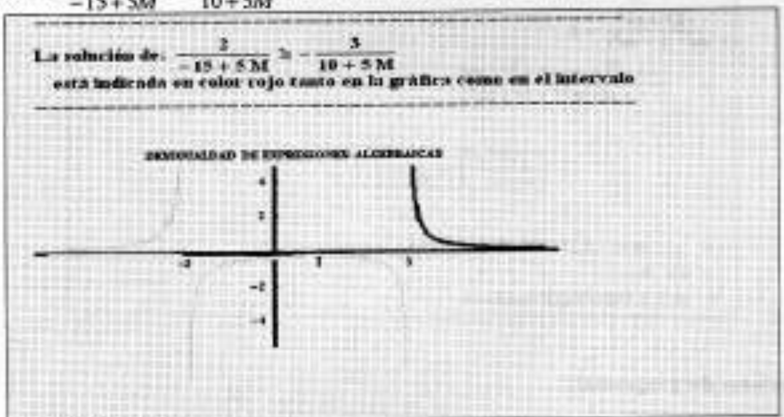
8. Finalmente, se puede observar que −3 no puede ser una solución, debido a que se indefiniría la expresión.

Utilización del programa para algunos ejemplos específicos

En la figura 2 se puede observar que hay un espacio disponible para digitar la desigualdad que se desea resolver. Entonces, una vez ingresada la respectiva inecuación, se puede hacer uso de alguno de los botones de la figura 2, como sigue

✓ Uso del Botón "Gráfica":

Digitando $\dfrac{2}{-15+5M}\geq-\dfrac{3}{10+5M}$ y presionando el botón "Gráfica", se obtiene:

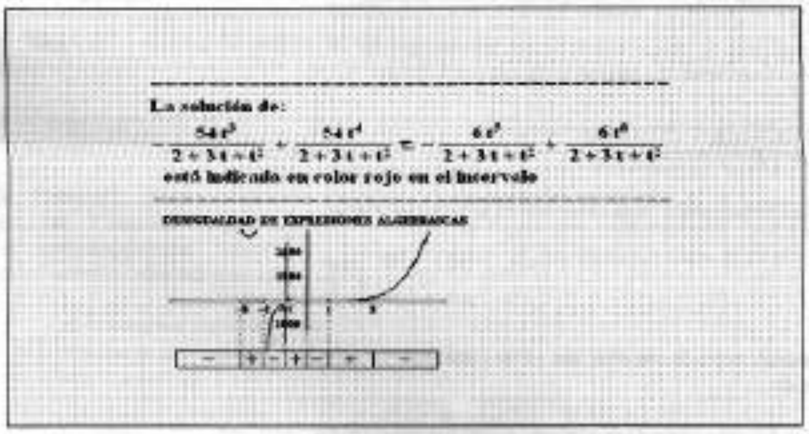


✓ Uso del Botón "Franja":

---

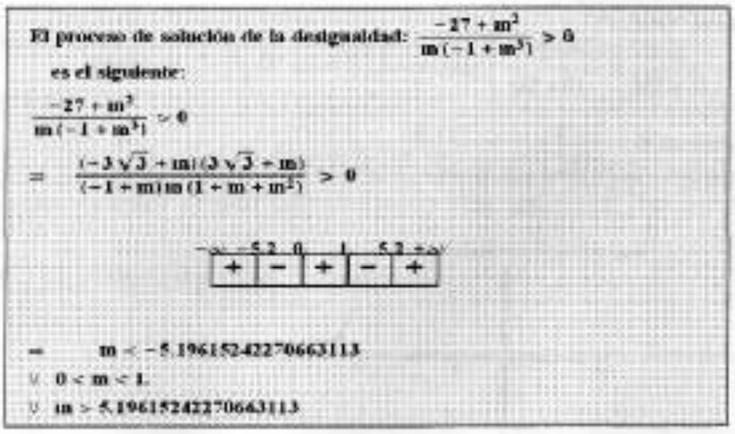
[2] Un valor prueba es un valor tomado dentro de un intervalo abierto.

Digitando $-\frac{54t^3}{2+3t+t^2}+\frac{54t^4}{2+3t+t^2}\leq-\frac{6t^5}{2+3t+t^2}+\frac{6t^6}{2+3t+t^2}$ y presionando el botón "Franja", se obtiene:



✓ Uso del Botón "Proceso":

Digitando $\frac{-27+m^2}{m(-1+m^3)}\geq 0$ y presionando el botón "Proceso", se obtiene:



Limitaciones del programa:

- El programa sólo puede correr en el software "Mathematica 3.0".
- Responde a desigualdades algebraicas solamente.

➢ Dependiendo de los ceros y los puntos de indefinición de la expresión obtenida puede ser que el gráfico no sea tan apreciable como deseáramos para todo tipo de expresiones, ya que la escala del gráfico depende de las soluciones de la misma.

➢ La celda de Limitaciones, muestra algunas de los obstáculos con los que el usuario se puede encontrar.

Bibiografía

[1] Meneses, Roxana. *Matemática 10: enseñanza-aprendizaje*. 3a ed. San José, C.R., Ediciones Farben, 1998.
[2] Astorga M, Alcides. *El Conjunto de los Números Reales*. Cartago, C.R, 1996.
[3] Swokoswski, Earl. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. 2a ed. México D.F., Grupo Editorial Iberoamérica, 1990.
[4] Arya, Jagdish y Lardner, Robin. *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía*. 3a ed. México D.F., Prentice Hall, 1992.

Graficación de Funciones

Evelyn Agüero C.; Mauricio Gamboa G.; Kory Castillo C.[1]

Resumen

Este es un trabajo que fue realizado en Mathematica 3.0 durante el curso de Taller de Software de Aplicaciones que pertenece al plan de estudios de la carrera: Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Con el afán de presentar al estudiante de matemática una visión gráfica de algunos conceptos matemáticos, en apoyo del estudio formal y conscientes del beneficio que esto tiene, es que se desarrolla este trabajo el cual da esta facilidad de trabajar con las gráficas de funciones de una variable. Un tema que con los métodos convencionales el simple hecho de presentar ejemplos resulta tedioso, difícil y el algunos casos imposible.

1. Objetivos

1. Que los estudiantes, principalmente los de secundaria refuercen mediante el apoyo visual conceptos en los que generalmente es difícil verificar resultados obtenidos al analizar una función y su gráfica.

2. Presentar los puntos desarrollados en forma consistente con lo que orden que tiene la materia que se desarrolla, iniciando con las primeras intuiciones sobre la gráfica de una función, como lo es el determinar los pares ordenados de la forma *(x, f (x))* para luego ubicarlos en un plano cartesiano graficando una tabla de valores y continuar con otros aspectos de funciones como lo son:

- Intersecciones con los ejes de ordenadas y abscisas.
- Intervalos de monotonía.
- Intervalos positivos de una función.
- Valor absoluto de una función.
- Traslaciones de funciones.

Para proporcionar una mejor idea de lo que este trabajo pretende, se presenta a continuación una descripción de lo que permite trabajar cada uno de los puntos anteriormente mencionados.

2. Tabla de valores

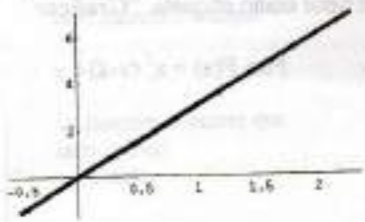
Permite generar una tabla de valores, basada en el criterio de una función que el usuario digita en la celda para tal efecto y el valor de un máximo de 8 abscisas. Luego de proporcionar estos datos se tiene la posibilidad de:

- Graficar los puntos de la tabla.

[1] Estudiantes de Enseñanza de la matemática Asistida por Computadora, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

- Conectar esos puntos mediante segmentos de línea recta para obtener una aproximación de la gráfica.

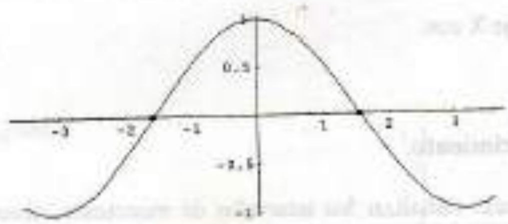
- Graficar la función.



3. Imágenes y Preimágenes.

Dada un a función permite obtener la imagen de una abscisa , observando tanto la gráfica de estos puntos como los resultados en una pantalla emergente.

Ejemplo



Para F(x) = Cos [x] las preimágenes de 0 son

X = Pi / 2
X = - Pi / 2

4. Intersecciones con los ejes de las ordenadas y las abscisas.

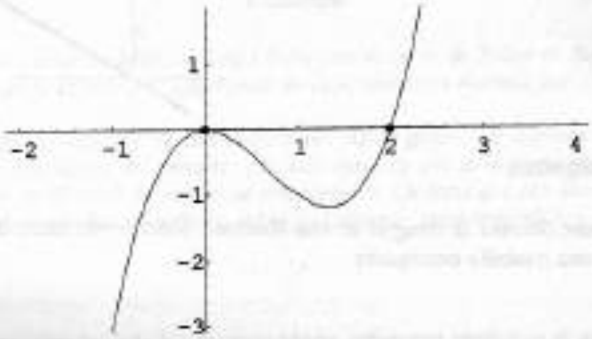
Permite al usuario obtener las intersecciones con los ejes de una función, para tal efecto se le presenta al usuario lo siguiente.

INTERSECCIONES CON LOS EJES

Nombre	Terminología	Definición	Como calcularla
Intersección con x	Abscisa en el origen	La coordenada x de los puntos en los cuales la gráfica interseca el eje x	Al igualar y = 0, y despejar x
Intersección con y	Ordenada en el origen	La coordenada y de los puntos en los cuales la gráfica interseca el eje y	Al igualar x = 0, y despejar y

Donde luego de proporcionar los datos necesarios se podrán visualizar los resultados presionando el botón que tiene como etiqueta **"Graficar"**

Ejemplo. Para $F(x) = x^2 (x-2)$:



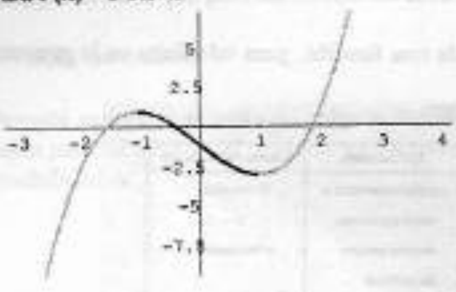
Las intersecciones con el eje X son:

X = 0
X = 2

5. Crecimiento y Decrecimiento.

Este punto permite al usuario visualizar los intervalos de monotonía, observándolos en la gráfica de la función que él digita, en un intervalo que también es proporcionado por el usuario. Luego de presionar el botón que tiene como etiqueta **"Graficar"** el programa presenta los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y la gráfica de dicha función con dichos intervalos graficados en diferente color con el fin de que sea más fácil identificarlos.

Para $F(x)=-1-3x- x^3$



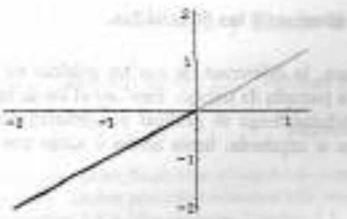
Crece :] -∞,-1] y [1,∞[

Decrece : [-1,1]

6. Intervalos positivos de una función

En este punto se mantiene el formato presentado en el punto anterior con la diferencia de que lo que muestra la gráfica son los intervalos en que la función es positiva y en los que es negativa.

Ejemplo



La función es mayor que cero cuando x cumple:

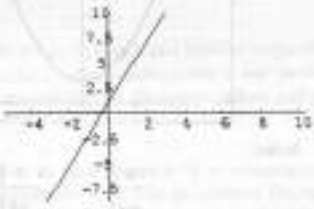
$x > 0$

La función es menor que cero cuando x cumple:

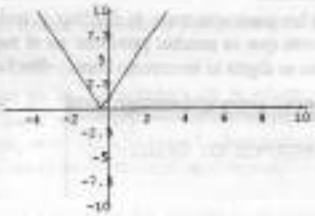
7. Valor absoluto de una función

En este punto la forma en que los datos son introducidos es igual a la de los puntos anteriores ya que se debe digitar el criterio de la función y los valores entre los que se desea ver la gráfica. Luego presionar el botón que tiene como etiqueta "Graficar" y observar tres gráficas:

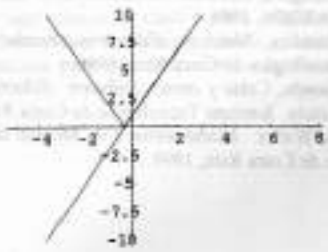
1. **La gráfica de la función original.**



2. **La gráfica de la función en valor absoluto.**

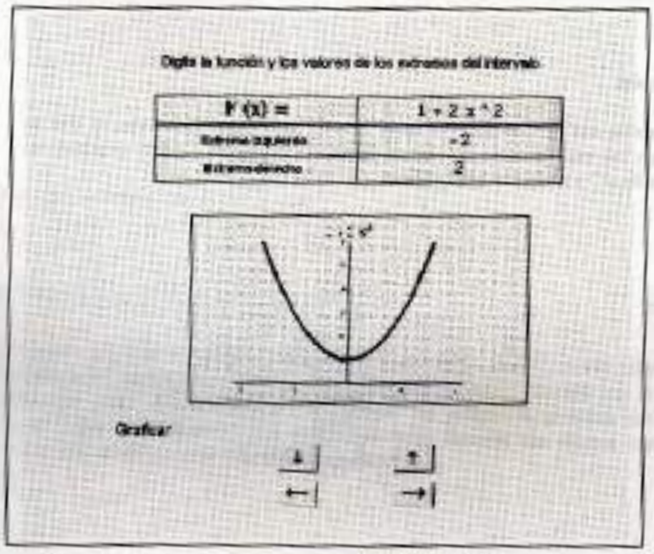


3. **Ambas gráficas en un mismo plano.**

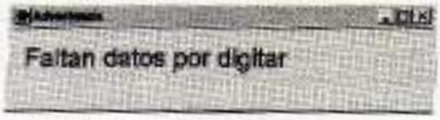


8. Traslaciones de funciones en los ejes de las abscisas y las ordenadas.

Este punto mantiene el esquema de presentación, con la diferencia de que las gráficas no son presentadas en pantallas emergentes sino en la misma pantalla de trabajo. Esto con el fin de hacer el trabajo más interactivo y dar al usuario la posibilidad luego de graficar por primera vez la función, de trasladar esta gráfica hacia la derecha o izquierda, hacia arriba o abajo con los botones para tal efecto.



En cada uno de los puntos se trata de facilitar el trabajo del usuario y proteger las celdas de escritura contra posibles errores que se puedan presentar en el momento de digitar los datos, por ejemplo, si en el criterio de la función se digita al incorrecto como: -8bx9w, el programa responderá de la siguiente forma.



Bibliografía

[1] Meneses Rodríguez, Rosanna. *Matemática 7: enseñanza-aprendizaje*. 3ª ed. San José, Costa Rica. Ediciones FARBEN, 1996.

[2] Arguedas Ramírez, Mario A. *Educar es... mucho más que una simple fórmula*. Cartago,Costa Rica. Editorial Tecnológica de Costa Rica, 1996.

[3] Vargas Elizondo, Celso y otros. *Software didáctico para la educación general básica en Costa Rica I y II ciclo*. Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica, 1990.

[4] Mora Flores, Walter. *Mathematica 3.0, Manual de referencia rápida*.Cartago, Costa Rica, Instituto Tecnológico de Costa Rica, 1999.

Suma y Resta de Fracciones

Mauricio Brenes C.; Cristhian Páez P.; Ronald Rodríguez S.

Resumen

El presente trabajo, tiene como fin abarcar el estudio de la suma y resta de dos fracciones, mediante procedimientos aritméticos y gráficos. Dichos procedimientos han sido implementados en una computadora, haciendo uso de dos software: Mathematica 3.0 y Macromendia Director 6.5. Además, la herramienta pretende ser una tanto para docentes como para estudiantes.

Introducción

El proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática ha sido estereotipado a lo largo de la educación costarricense. Algunos la califican de difícil, otros la asocian con la inteligencia, otros le tienen terror o miedo y por último, hay quienes hablan de la matemática como algo agradable.

Independientemente de cual sea su posición, lo cierto es que, la matemática requiere de gran pericia por parte del docente, pues implica el desarrollo de un área muy importante en nuestro quehacer diario: *el razonamiento*.

¿Cómo mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática?, una posible respuesta sería la incorporación de la computadora, otra sería, brindar seminarios de actualización a los profesores de secundaria, que abarque aspectos meramente matemáticos, metodológicos (la computadora podría ser una metodología a estudiar), entre otras cosas.

En los últimos años, se ha venido dando una revolución en la incorporación de la computadora en los procesos de enseñanza – aprendizaje. En el campo de las matemáticas, ha sido el Instituto Tecnológico de Costa Rica, el primero en abrir e impulsar una carrera orientada a la "Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora" en el año de 1996.

Mediante la creación de esta carrera, se pretende formar educadores con la destreza de crear ambientes de aprendizaje en los que se utilice la computadora.

Se debe tener muy claro, que la incorporación de la computadora en la educación no implica el mejoramiento de la misma. Su utilización debe darse sólo cuando ofrezca mejores ventajas que otras herramientas metodológicas (pizarra, carteles, juegos, entre otros.). No debe pensarse que la computadora resolverá todas las "deficiencias" de una enseñanza conductista, tal es el caso de nuestro país.

La computadora debe verse como una herramienta más dentro del proceso de enseñanza – aprendizaje, es un instrumento explicar o entender de mejor manera en un determinado tema.

El presente trabajo tiene como finalidad poner a disposición de estudiantes y profesores de un programa computacional que les permita resolver operaciones de suma o resta con números racionales, mediante dos métodos: aritmético y gráfico. Además, cuenta con una pequeña aplicación en donde se presentan ejemplos gráficos animados y una práctica para que el alumno o la alumna conjeture la respuesta.

Objetivos

1. Sumar y restar números racionales en forma aritmética.
2. Sumar y restar números racionales en forma gráfica.
3. Facilitar la comprensión de la suma y resta de números racionales mediante gráficos
4. Reforzar y/o dominar el algoritmo para sumar y restar racionales.
5. Incorporar la herramienta computacional en el proceso de enseñanza – aprendizaje.
6. Brindar una breve reseña histórica acerca del nacimiento de los números racionales.

¿Por qué utilizar la computadora para desarrollar este tema?

La educación primaria, nos comienza a introducir en el manejo de los procedimientos de suma, resta, multiplicación y división de números naturales. Es en esta misma etapa, en donde se inicia el estudio de la suma y resta de números racionales, que viene a ser reforzado en los dos primeros años de la educación secundaria.

La computadora viene a convertirse en una buena opción para mejorar la impresión visual que se puede tener acerca de los números racionales; así mismo, libera al profesor o a la profesora de hacer cálculos tediosos, los cuales se logran verificar directamente en el computador.

El estudio de los números racionales, se puede prestar para la confusión si no es tratado de la manera adecuada. Por ejemplo: la maestra les dijo a un grupo de estudiantes que un medio (½) siempre es más grande que un cuarto (¼). Cuando Juan (estudiante) llega a su casa tiene una discusión con su madre, pues ésta le dice media naranja es menor que un cuarto de sandía, Juan le refuta a su madre lo dicho diciéndole que la maestra les enseño que ½ siempre era mayor que ¼.

Nótese que el error en el ejemplo anterior está, en que la maestra nunca habló de que ½ era mayor que ¼ siempre y cuando estuviéramos hablando de la misma unidad, para efectos prácticos: sólo naranjas o sólo sandías.

La aplicación desarrollada permite visualizar las fracciones como círculos de igual tamaño, subdivididos en tantas partes como el denominador indique y repintadas las partes que el numerador señala. Lo anterior, no permite que se dé confusión alguna, pues todos los círculos que se presentan dentro del programa son de igual tamaño.

La parte aritmética puede ser confirmada con el método gráfico, dando más seguridad al o a la estudiante que interactúa con la aplicación, al verificar la respuesta obtenida en forma aritmética con la mostrada por el método gráfico.

¿Qué se necesita para desarrollar la aplicación?

Para correr esta aplicación se necesita como mínimo lo siguiente:

- Tener instalado Windows 95
- Mouse (fundamental).
- Tener instalado Mathematica 3.0
- 32 MB en memoria RAM
- Procesador Pentium I
- 4.3 G en Disco Duro.
- Parlantes (para la aplicación realizada en Macromedia Director 7.0).

La aplicación realizada en Mathematica 3.0 puede ser ejecutada con menos requerimientos de los solicitados (excepto los primeros tres puntos), sin embargo, los autores no garantizan una ejecución muy eficaz. La aplicación realizada en Director 7.0 puede ser ejecutada sin los parlantes pero no sin el mouse.

¿A quién va dirigido?

El programa va dirigido a estudiantes de matemática de primaria y secundaria (7° y 8° años principalmente), así como a maestras, maestros, profesores y profesoras de enseñanza de la matemática.

Conocimientos previos

1. Manejo básico de la computadora

2. Para comprender los procedimientos aritméticos es necesario manejar los siguientes conocimientos:

- Conmutatividad en el conjunto de los números enteros.
- Operaciones básicas en el conjunto de los números enteros.
- Fracciones Propias e Impropias.
- Fracciones Homogéneas y Heterogéneas.
- Relación de orden entre dos fracciones.
- Valor absoluto.
- Números decimales, mixtos y opuestos.

Los últimos tres contenidos serán evaluados en el juego que se realizó en Director 7.0

Características de la aplicación

La aplicación cuenta con dos partes: una desarrollada en Mathematica 3.0 y otra desarrollada en Macromedia Director 7.0

[1] *Aplicación desarrollada en Mathematica 3.0*

- La interfaz cuenta con varias opciones, entre ellas están:

  - Autores: se menciona el nombre de los autores, institución en que se realizó, curso en el que se desarrollo, mes y año.
  - Instrucciones: se especifican la forma en que deben digitarse los datos.
  - Historia: breve reseña histórica acerca del nacimiento de los números racionales.
  - Ejemplos: serie de ejemplos aritméticos y gráficos.
  - Iniciar sesión: se inicia una sesión para la digitación de datos y resolución de las operaciones, ya sea en forma aritmética o gráfica.

    Para digitar las fracciones pueden utilizarse dos formatos:

1) a/b + c/d ó 2) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$

El primer formato no es difícil pues se obtiene vía teclado, para trabajar en el segundo formato se debe ir a la barra de menú, dar clic en File, seleccionar Palettes y escoger BasicInput. La paleta BasicInput contiene diversos formatos de operaciones y simbología griega, en nuestro caso, sólo nos interesa el formato de fracciones que se halla en la parte superior derecha; luego de seleccionarlo, se digita la operación que se desea realizar (+ ó -) y se vuelve a seleccionar el formato de fracción en BasicInput.

Importante:* *Los formatos primero y segundo no se pueden combinar.

Cuando digite los datos tenga en cuenta las siguientes consideraciones:

- ✓ Los valores de los denominadores deben ser diferentes de cero.
- ✓ Los valores, del numerador y del denominador, deben ser números enteros.

Luego de digitar las fracciones y el operador, usted tiene la posibilidad de resolver la operación en forma aritmética o gráfica. Para resolver el ejercicio en forma aritmética, sólo debe tener en cuenta las dos consideraciones anteriores. Para resolverlo de manera gráfica se deben tener en cuenta, además, los siguientes aspectos:

Para la suma

- ✓ Por aspectos estéticos ambas fracciones deben ser mayores que cero y menores o iguales que tres, es decir:

$$0 < \frac{a}{b} \leq 3 \text{ y } 0 < \frac{c}{d} \leq 3$$

- ✓ Como consecuencia de lo anterior, el resultado final quedará entre cero y seis (inclusive), es decir:

$$0 < \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \leq 6$$

Para la resta

- ✓ Por aspectos estéticos la primera fracción debe ser mayor que cero y menor o igual que seis, la segunda fracción debe ser mayor que cero y menor que seis, es decir:

$$0 < \frac{a}{b} \leq 6 \quad \text{y} \quad 0 < \frac{c}{d} < 6$$

- ✓ Como consecuencia de lo anterior, el resultado final quedará entre cero y seis, es decir:

$$0 < \frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 6$$

Para la suma y resta

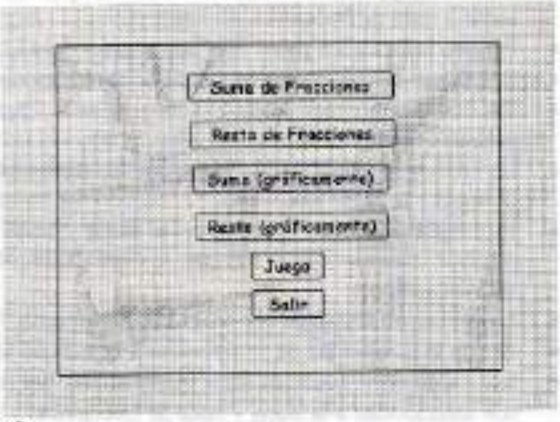
- ✓ El común denominador debe ser menor o igual que treinta, esto pues, las subdivisiones de los círculos no se ven muy bien con comunes denominadores mayores a este número.

✓ Se quiere dejar en claro que, la aplicación tiene la capacidad de resolver cualquier ejercicio en forma gráfica, sin embargo, por razones meramente estéticas se programó con las tres restricciones anteriores.

✓ La representación gráfica de cada una de las fracciones aparece a la par de la fracción que se está representando. Para comprender el proceso de suma y resta se procede a graficar cada una de las fracciones, luego se grafican las mismas fracciones utilizando el común denominador para, por último, expresar el resultado en función del denominador común obtenido.

Aplicación desarrollada en Macromedia Director 7.0

- Se presenta una lámina con los créditos correspondientes a los autores, institución donde fue realizado, escuela y carrera a la que pertenecen los autores.
- Se presenta una lámina con un menú que contiene los siguientes subtítulos: suma de fracciones, resta de fracciones, suma de fracciones homogéneas (gráficamente), resta de fracciones homogéneas (gráficamente), juego y salir
- Al dar un clic sobre el primer subtítulo, aparece una lámina en donde se explica, mediante una animación, el procedimiento de *suma de dos fracciones*. Posteriormente, se brindan dos ejemplos con el fin de comprender mejor el procedimiento.
- Al dar un clic sobre el segundo subtítulo, aparece una lámina en donde se explica, mediante una animación, el procedimiento de *resta de dos fracciones*. Posteriormente, se brindan dos ejemplos con el fin de comprender mejor el procedimiento.
- Si se le da clic a *salir*, la ejecución del programa finaliza.
- *La suma y resta de dos fracciones homogéneas*, se abarca mediante ejemplos gráficos acompañados de pequeños procedimientos aritméticos.
- Al dar un clic sobre el *juego*, la aplicación mostrará un cuadriculado, el cual posee una imagen debajo de él. Para descubrir la imagen será necesario responder a una serie de preguntas, que tienen relación con representación de fracciones, números decimales, números mixtos, números opuestos, valor absoluto, relación de orden entre fracciones, fracciones homogéneas, heterogéneas, propias e impropias.



Para maniobrar el juego en forma correcta, se deberán seguir las siguientes instrucciones:

- ➢ Las fracciones deben darse en el formato **a/b**.
- ➢ Los números mixtos deben darse en el formato **a/b/c**, donde **a** es la parte entera, **b** es el numerador de la fracción y **c** es el denominador de la parte fraccionaria.
- ➢ Para la notación decimal se admite el uso de la coma o el punto.
- ➢ El programa posee una celda de lectura, en donde se deberán digitar las respuestas a cada pregunta planteada. Para saber si la respuesta es correcta, se deberá presionar *enter*.
- ➢ Cuando acierte una pregunta aparecerá una estrella, con el segundo acierto (consecutivo) desaparecerá una porción de la cuadrícula. Si al acertar una pregunta, falla la siguiente, la estrella desaparecerá.
- ➢ Al final del juego, se presenta al usuario la nota obtenida.

La siguiente imagen muestra la pantalla que presenta uno de los ejemplos de la aplicación.

Ventajas

- Brinda la oportunidad al y la estudiante, al profesor y profesora de verificar el procedimiento de la suma o resta de fracciones.
- Permite reforzar los pasos más importantes del algoritmo de suma y resta de fracciones.
- Brinda una buena impresión visual de las fracciones mediante las representaciones gráficas.
- Facilita la labor del profesor y la profesora, pues puede poner una infinidad de ejemplos que le permitan ilustrar el tema.
- La impresión visual que se logra con las representaciones gráficas facilita la compresión del proceso de suma y resta de fracciones.
- El programa es muy efectivo en la suma y resta de fracciones. El método aritmético es capaz de resolver cualquier ejemplo que se le digite, siempre y cuando se cumplan las condiciones indicadas en las instrucciones.
- La aplicación realizada con Macromedia Director 7.0 es ejecutable en cualquier PC compatible.
- Brinda la posibilidad de entretenerse a la vez que se aplican conocimientos matemáticos.
- Integra diversos conocimientos matemáticos, por medio del juego, que deben de haber sido estudiados con anterioridad a la suma y resta de fracciones.

Limitaciones

- Es indispensable tener el Software Mathematica 3.0 ó una versión más reciente para poder ejecutarlo (sólo para la aplicación realizada con este software).
- El programa conmuta algunas operaciones en el numerador.
- Es necesario el mouse (ratón), pues sin él, no se pueden accesar los botones de ejemplos, así como los botones de Resolver Aritméticamente y Resolver Gráficamente del módulo Iniciar Sesión.

- Puede crear una actitud pasiva en el y la estudiante.
- Sólo suma o resta dos fracciones. Es importante hacer notar que la aplicación sólo fue programada para sumar o restar dos fracciones, si se quisieran sumar más de dos, deberá operarse las primeras dos, luego el resultado de esta operación deberá sumarse o restarse con la siguiente fracción y así sucesivamente.
- Cuando se utiliza el formato a/b + c/d, no fue posible resolver el caso siguiente: a/b – c/d, el cual sí funciona con el otro formato (BasicInput).
- Los valores de "a", "b", "c" y "d", deben ser necesariamente números enteros, cualquier otro intento por digitar valores entre paréntesis u operaciones combinadas, activará en el programa una ventana de "error" o lo ejecutará de manera incorrecta (los autores no se hacen responsables por errores que se cometan debido al incumplimiento de las instrucciones).
- La aplicación realizada en Director se presenta en forma lineal, es decir, una vez iniciada la aplicación no hay oportunidad de devolverse.

Conclusiones

El proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas se ve muy enriquecido con la incorporación de la computadora, pues permite al profesor y la profesora valerse de una infinidad de recursos para mejorar la impresión visual y el dominio de ciertos algoritmos que son estudiados durante el proceso educativo.

Se debe tener claro, como se mencionó en la introducción, que la incorporación de la computadora no implica un mejoramiento de la educación, se debe tomar consciencia de cuándo y cómo utilizarla. La computadora no se presta para la explicación de cualquier tema, existen muchas otras metodologías que vienen a brindar un aporte importante al proceso educativo, tales como: lección de juegos, lección interrogativa, método de los cuatro pasos, y otros que son dignos de tomar en cuenta.

Los autores son partidarios de que la utilización de la computadora, calculadora y otras herramientas tecnológicas, simplifican algunos procesos tediosos que realiza el profesor y la profesora durante la lección; por ejemplo: cálculo de integrales, derivadas, reducción de matrices, gráficas de funciones en dos y/o tres dimensiones, construcciones geométricas, animaciones de diferentes fenómenos, entre otros. Sin embargo, ante esta facilidad aparente, se debe ser cuidadoso o cuidadosa, pues la incorporación de estas herramientas debe obedecer al cumplimiento de objetivos educativos, y no a un simple capricho de utilizar algo nuevo y diferente, arriesgando con ello, el proceso de enseñanza - aprendizaje.

A todos aquellos profesores y profesoras que sean partidarios, o no, de la incorporación de las computadoras, nos permitimos recordarles que su labor nunca podrá ser reemplazada, pues ante tanto avance tecnológico no se ha inventado aún, una computadora que sea capaz de sentir, identificar las necesidades (educativas y/o espirituales) de cada uno de sus alumnos y/o alumnas, brindar apoyo moral y levantar la autoestima en esos momentos difíciles, cuando todo parece estar perdido.

Con la presentación de este proyecto, se espera complementar algunas metodologías educativas relacionadas con la suma y resta de fracciones. Todas aquellas sugerencias sobre esta aplicación, se ruega las hagan llegar mediante correo electrónico:

> **e-mail:** aastorga@itcr.ac.cr, o alcidesastorga@hotmail.com, dirigido a alguno de los autores de este trabajo.

Bibliografía

[1] Meneses R., Roxana. *Matemática 7: enseñanza-aprendizaje*. 3ª ed. San José, CostaRica. Ediciones Farben, 1996.

[2] Arguedas R., Mario A. *Educar es... mucho más que una simple fórmula.* Cartago, Costa Rica. Editorial Tecnológica de Costa Rica, 1996.

[3] Vargas E., Celso et al. *Software didáctico para la educación general básica enCosta Rica I y II ciclo*. Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica, 1990.

[4] Mora F., Walter. *Mathematica 3.0, manual de referencia rápida*. Cartago, Costa Rica, Instituto Tecnológico de Costa Rica, 1999.

[5] Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP). *Programa de estudios de educación diversificada*. San José, Costa Rica.

Dr. GEO

Alexander Borbón Alpízar[1]

Resumen

Dr. Geo es un programa educativo para la enseñanza interactiva de la geometría en primaria y secundaria, además de una poderosa herramienta para todos los amantes de la geometría.

1. Introducción

En los últimos años se ha visto un gran auge de la tecnología en todos los campos. Se observa que cada vez más gente tiene acceso a la computación y que al pasar los años van en aumento el número de instituciones que adoptan las computadoras a su vida cotidiana.

En educación, el fenómeno no es distinto, ya se tienen laboratorios en la mayoría de las escuelas y colegios del país y se les debe sacar el mayor provecho, una forma es buscar software educativo que les pueda enseñar a nuestros estudiantes de la mejor manera.

Uno de estos programas que se puede conseguir en Internet y que es recomendable para la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria es Dr. GEO.

Dr. GEO es un programa de geometría interactivo; es "freeware", lo que significa que no se tiene que pagar por su licencia y se puede distribuir a cualquier persona o institución sin problemas legales. El único requisito es que no se cambie el programa de ninguna forma y comunicar al autor que está siendo distribuido, así él podrá enviarles la última versión.

Dr. GEO permite la construcción de figuras geométricas interactivas. Este programa utiliza el mouse de forma intensiva pues Dr. GEO no tiene menús al estilo de Windows (siempre están presentes), sino que haciendo un clic derecho sobre la pantalla nos aparece un menú emergente, lo que nos permite visualizar el menú sólo cuando se necesite.

Esta manera de utilizar los menús y la forma en que está desarrollado el programa, permite que cualquier estudiante aprenda a usarlo rápidamente y se sienta muy a gusto con él.

El software se adapta muy bien para profesores de matemática en los procesos de enseñanza de geometría, los estudiantes pueden realizar sus propias investigaciones en clase y todos los amantes de la geometría lo pueden utilizar como una poderosa herramienta de investigación.

Dr. GEO se puede utilizar en varios idiomas, actualmente el usuario tiene la posibilidad de accesarlo en Chino, Francés, Inglés y Español, pero se pueden encontrar más idiomas en Internet o contactando al autor.

---

[1] Estudiante de la carrera Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora en el Instituto Tecnológico de Costa Rica

2. Requerimientos de Dr. GEO

1. Procesador 486 DX o mejor. También se necesita un coprocesador aritmético por la gran cantidad de cálculos reales que se necesitan.
2. Sistemas a partir de MS-DOS, Windows 3.11 o versión posterior.
3. Mousse compatible con Microsoft. Pueden haber problemas con los drivers de un mousse Logithech.
4. Tarjeta de video Súper VGA de 32 bits o superior. Aún así el software trabaja con tarjetas VGA pero trabaja más lento. Si hay problemas con la tarjeta de video se podría tratar de instalar un driver VBE

3. Usando el Software

El menú del programa nos permite hacer puntos, puntos medios, puntos de intersección entre dos figuras y dibujar puntos coordenados; podemos construir también líneas, rayos, segmentos, vectores, círculos, construir el lugar geométrico de una figura, realizar líneas paralelas, perpendiculares, hace la simetría a un eje, a un punto, traslada y rota objetos; además da medidas de longitud, de ángulos y mide coordenadas; se pueden crear y utilizar macros. El programa tiene opciones para los objetos como los colores y también se puede seleccionar el grueso de las líneas, se pueden borrar objetos y se captura el trabajo que estemos haciendo en archivo.

El menú a la par es una copia en blanco y negro del menú principal de Dr. GEO, cada uno de estos menús se divide en submenús (la copia se hizo en blanco y negro para las memorias, se tomo de base el menú real y se pintó lo mas cercano posible).

Lo que realmente hace diferente este programa a otros de su mismo estilo es que, una vez hecha una construcción, podemos mover los puntos de ésta para ver como varía la figura conforme se cambian las medidas que hayamos realizado en ella.

Con las herramientas que Dr. Geo da, se pueden elaborar ambientes de aprendizaje que le permitan a nuestros estudiantes aprender de una forma diferente y aumentar la investigación por parte de ellos. La idea no es darles los resultados, sino que ellos sean los que los descubran.

Algunos ejemplos que permiten visualizar mejor la elaboración de dichos ambientes de aprendizaje son los siguientes:

4. Ejemplos

4.1 La desigualdad triangular

Veamos como se puede utilizar Dr. GEO para enseñar la desigualdad triangular sin necesidad de enunciar el teorema para que los estudiantes se lo aprendan.

Primero se construye un triángulo cualquiera (hacemos tres puntos y luego hacemos los segmentos que unen los puntos), después se realizan las medidas de los tres lados.

Luego se le dice al estudiante que sume la medida de dos lados y que la compare con la del tercero; luego se le dirá que mueva el triángulo como él desee y que repita las mediciones.

Después de repetir el procedimiento varias veces, se le solicitará al estudiante que escriba los resultados obtenidos y que los compare con los de los compañeros.

4.2 Construcción de un triángulo equilátero

Con este software también se le puede enseñar al estudiante algunas construcciones interesantes que normalmente construiríamos en el cuaderno con regla y compás (el software también utiliza la filosofía de la regla y compás).

Lo primero que se hace son dos puntos (A y B) y se construye el segmento entre estos dos puntos, luego se construye el círculo con centro en A y que pase por B, también se construye el círculo con centro en B y que pase por A, se construye el punto de intersección de estos dos círculos (C) y se trazan los segmentos AB, BC y CA.

El estudiante puede deducir que la construcción es válida (que el triángulo en realidad es equilátero), pues se le hace notar que los círculos tienen igual radio y que los segmentos del triángulo construido son radios de dichos círculos; por lo tanto los tres lados del triángulo son congruentes.

La idea principal del autor para este programa es que llegue a la mayor cantidad de personas posible y traducirlo en la mayor cantidad de idiomas ya que, como lo menciona él mismo, "la educación no tiene fronteras".

Para el futuro de Dr. GEO se esperan mayores avances; esta es todavía una versión beta, el programa se encuentra en desarrollo y el autor quiere que usted le comunique si encontró algún tipo de problemas (pulgas) con el programa, además quiere se le haga llegar cualquier comentario y/o sugerencia sobre el mismo.

Para las futuras versiones de Dr. GEO se quieren agregar arcos y cónicas, más opciones numéricas y algún texto con figuras.

Si se necesita algún tipo de ayuda, el programa trae un archivo donde se explica la función de cada una de las opciones del menú (el archivo está en inglés), este archivo está muy completo y fue de donde se tomó la guía para hacer el manual y el presente resumen.

Esperamos que este programa les sea útil para la enseñanza de la geometría en secundaria y así, de alguna forma, llenar este vacío en el uso de la computación para la enseñanza de las matemáticas en general.

Para finalizar, les damos tres formas distintas de contactar al autor:

E-mail: hilaire.fernández@iname.com
www: http://www.drgeo.seul.org/last_version.html
Dirección Postal: Hilaire Fernández
Chung Chan North Road
Section 7, lane 141, No 14
Taipei, ROC, Taiwan

Bibliografía

[1] Galvis, A. "Reflexión acerca del uso del computador en educación primaria y secundaria." *Informática Educativa*. V. 4 . Nº. 1. Colombia, 1991.
[2] Hilaire Fernández, "*Archivo de Ayuda original de Dr. GEO*", 1998.
[3] Meza C., Luis G. et al. "Planeamiento de procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática asistidos con software matemático". Memorias de V Encuentro Centroamericano de Investigadores en matemática (ECADIM). Javier Trejos (editor). Liberia, Costa Rica, 1997.
[4] Rojas, T. "Creatividad y programación" *Informática educativa*. V.4. Nº.1. Colombia, 1991.
[5] Sancho, L. "*Aplicaciones de la informática a la educación II*". EUNED. San José, Costa Rica, 1997.
[6] Scott, P. "La computadora y la enseñanza de la matemática.". *Educación matemática*. V.2. Nº.1 México, 1990.
[7] Trujillo, C. "Informática para apoyar el mejoramiento de la educación." *Informática Educativa*. V.5. Nº.1. Colombia, 1992

En busca del Tesoro: Números Racionales

Evelyn Agüero C. , Cristhian Páez P. [1]

Resumen

En busca del tesoro: Números Racionales, es una aplicación completamente ejecutable desarrollada en Macromedia Director 6.5, como proyecto final del curso Multimedios en la Educación, el cual pertenece al plan de estudios de la carrera Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, la cual se imparte en el Instituto Tecnológico de Costa Rica.

La aplicación consiste en un juego, el cual trata de la búsqueda de un tesoro que está resguardado por un dragón dentro de una montaña; para obtenerlo se debe haber respondido correctamente una cantidad determinada de preguntas.

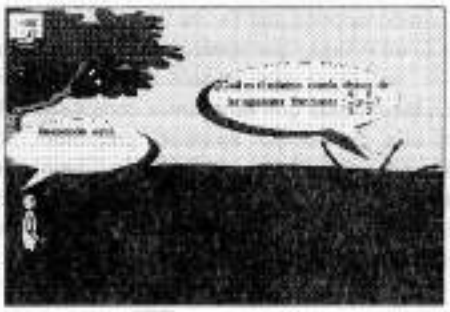
Objetivos

1. Evaluar el concepto de Número Racional.
2. Representar en forma gráfica los Números Racionales.
3. Amplificar y simplificar fracciones.
4. Obtener el recíproco de un Número Racional.
5. Expresar Números Racionales en notación mixta y fraccionaria.
6. Identificar fracciones homogéneas y heterogéneas.
7. Efectuar operaciones de suma, resta, multiplicación y división de Números Racionales.

Uso de la aplicación y usuarios potenciales

Práctica para estudiantes de secundaria e instrumento de medición para profesores y profesoras de enseñanza de la matemática.

Descripción



La aplicación comienza con un mago, que va a buscar al personaje principal para indicarle cuál es la misión que va a emprender, así, este avanza por el bosque, encuentra pistas y debe enfrentar al guardián de aquel que lo someterá a una serie de preguntas (la imagen de la izquierda muestra una de las pantallas que aparecen en la aplicación); luego continúa por los linderos de la arboleda y llega a una montaña, la cual tiene un cúmulo de nubes en la cima, por lo que al escalarla no se percata del precipicio existente y cae en él. De esta forma llega a la entrada secreta del risco, donde vive el Gran Troll, este es muy amargado y no le gusta que entren a sus dominios, por lo que somete al personaje principal a dos rondas de preguntas, una vez superadas estas, pasa por un tubo mágico y sale al bosque que lo conducirá a la montaña solitaria donde vive el Dragón.

---

[1] Estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

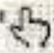
El camino no es nada fácil, ya que es el territorio de las Arañas Gigantes, y no tarda en encontrarse con una de ellas que lo someterá a una serie de preguntas que debe responder correctamente, de lo contrario se le restará puntaje; luego sigue su camino hacia la Montaña Solitaria, entra al túnel del amor que lo conducirá al corazón de esta, donde se encuentra el Dragón sintiendo que alguien se aproxima.

Antes de llegar a la cámara, sitio donde se encuentra este y el tesoro, hay un pasadizo bordeado por fuego que se bifurca en dos direcciones, una conduce directamente al Dragón y la otra a una etapa más donde se encuentra un Troll que le hará más preguntas. Si se escoge la primera, se debe tener un puntaje mínimo, establecido en cuarenta puntos, para poder enfrentarlo, de lo contrario se debe ir a la etapa donde está el Troll, en este lugar, se tiene la posibilidad de subir puntaje. Si se contesta correctamente una cantidad determinada de preguntas que le hace el Dragón consigue el Tesoro: Números Racionales. A la derecha se muestra la imagen que se presenta al final de la aplicación.

Especificaciones de la Aplicación

➢ Indicaciones para el manejo de la aplicación

El cursor por defecto durante toda la aplicación es  representa que se puede actuar sobre la escena. Para comenzar se debe dar clic al título cuando aparece el cursor por defecto.

En algunos personajes, al dar clic sobre ellos, representan pistas o ayudas sobrema de Números Racionales, se reconocen cuando aparece la siguiente manita al pasar sobre ellos con el mouse. Para salir de las pistas se debe dar clic en el cuadro blanco.

Cuando se pone una flecha de cursor indica la dirección que tomará el personaje principal al dar clic en el lugar que aparece este cursor.

En las escenas que no aparece cursor significa que la aplicación avanza por sí sola y no se puede actuar sobre ella; en las que aparecen preguntas, hay un recuadro blanco pequeño que contiene el puntaje. Solamente en la escena de la Araña Gigante se resta puntaje si se contesta mal la pregunta que se le ha planteado, en las restantes, si se contesta erróneamente, el puntaje se mantiene; este es importante, ya que, en la escena final se necesitan cuarenta puntos, como mínimo, para poder enfrentarse al Dragón y conseguir el Tesoro.

La imagen anterior es otra de las escenas que aparecen en la aplicación.

La respuesta se digita en el espacio indicado y se le da clic al personaje principal para hacerla efectiva. Si la respuesta es correcta se asigna un punto más, si no lo es, no hay castigo, aparte de un sonido indicando que la respuesta es incorrecta.

Para salir de la aplicación, se presiona la letra "q" en la escena final.

➢ *Limitaciones*

La aplicación está diseñada para que se pueda salir sólo en la escena final, pudiéndose considerar esto como una limitación para usuarios que deseen salir, en cualquier momento, de esta, sin completar la obtención del Tesoro, lo cual es el objetivo del juego.

➢ *Requerimientos mínimos*

- 12 Mb de espacio en disco duro o unidad de CD-ROM.
- 16 Mb en RAM (recomendado).
- Equipo multimedia (tarjeta de sonido, parlantes).
- Procesador Pentium o semejante (recomendado).
- Windows 95 o posterior.

Conclusiones

Sin duda alguna, la enseñanza de la matemática se debe ir enriqueciendo con los avances tecnológicos, y en especial, el uso de la computadora llega a ser una herramienta importante para los y las docentes, sin embargo, esta debe utilizarse sólo cuando ninguna otra metodología de enseñanza sea más eficiente. La herramienta computacional llega a ser muy importante en la educación actual ya que, en cierto modo, el usar estrategias metodológicas que incluyan la computadora atrae a los y las estudiantes, logrando así, que estos muestren interés de aprender durante el desarrollo de las lecciones.

La idea de crear juegos u otras actividades que hagan que sea agradable el desarrollo de situaciones de aprendizaje debe tomarse en cuenta con mayor detalle, ya que sin duda alguna, esta es la base de un ambiente de aprendizaje enriquecedor (metodológicamente hablando).

Con la aplicación desarrollada se espera que los usuarios y las usuarias tengan una forma divertida de aprender, además, que los educadores y las educadoras adquieran ideas de cómo desarrollar actividades educativas que sean divertidas y que ayuden a lograr los objetivos de llegar al aprendizaje de los contenidos que se estén desarrollando.

Bibliografía

[1] Lee, Allis. *Inside Macromedia Director 6 with Lingo*. Edt. Prentice Hall, USA, 1997.

[2] Meneses R., Roxanna. Matemática 7: enseñanza-aprenizaje. 3ª ed. San José, Costa Rica. Ediciones Farben, 1996.

[3] Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP). *Programa de estudios de educación diversificada*. San José, Costa Rica.

[4] Arguedas R., Mario. *Educar es... mucho más que una simple fórmula*. Cartago, Costa Rica. Edt. Tecnológica de Costa Rica, 1996.

[5] Vargas E., Celso et al. *Software didáctico para la educación general básica en Costa Rica I y II ciclo*. Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica, 1990.

Solución[1]

Alexander Borbón A.; Jeffry Nedrick M.; Dúbar Villalobos J. [2]

1. Introducción:

"Las nuevas tecnologías pueden ofrecer oportunidades sin paralelo para mejorar el ambiente educativo para estudiantes, maestros...; para obtener estos beneficios, los profesionales en la educación necesitan conocer cómo aprovechar mejor la tecnología de vanguardia para lograr sus metas" [3].

El factor tecnológico en la educación ha sido muy discutido en los últimos años. Se está consciente de la necesidad de mejorar el sistema de enseñanza – aprendizaje y que se ha de introducir la computadora como ente de desarrollo. Sin embargo, esta herramienta que presenta múltiples facetas no ha sido explotada a su máximo nivel, ya que uno de los grandes paradigmas en la utilización de esta tecnología es precisamente determinar situaciones de aprendizaje en las cuales pueda ser utilizada en una forma clara, tomando en cuenta que en este momento los profesores tienen una idea confusa de cómo emplear la computadora en el aula, se crea este software que permite hacer un análisis de la solución de una ecuación o una inecuación, aprovechando el poder de cálculo de la computadora.

Este trabajo fue realizado no como un sustituto del profesor sino como un material de apoyo que este pueda emplear para los temas ya planteados.

Los estudiantes pueden emplear este paquete para verificar el trabajo de clase y para aumentar su nivel de conocimiento por medio de la revisión y corrección de los trabajos extra clase.

"Zolución" es un programa que consta de:

- Una reseña histórica, la misma cuenta con la biografía de Johann Carl Friedrich
- Gauss, Evariste Galois y Niels Henrik Abel, precursores del álgebra.
- Una paleta de ejemplos, con seis muestras para cada una de las seis distintas aplicaciones del paquete.
- La celda de edición, donde se digitan las expresiones que serán evaluadas.
- La paleta de aplicaciones, en ella se encuentra los botones que introducen a cada una de los módulos del programa.
- Opción de ayuda, donde se resumen las distintas partes del programa y su utilización.
- Acerca de..., donde encontrará información de los creadores del Software.

2. Utilización de "Solución"

[1] Título original de los autores: "Zolución", que es el nombre dado al software. En esta memoria se escribe "Solución" para no generar posibles conflictos con el lenguaje (Nota del editor).

[2] Estudiantes de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, Instituto Tecnológico de Costa Rica. Los autores agradecerán cualquier consulta, crítica, comentario o sugerencia que deseen mandar a las siguientes direcciones: E-mail: alexborbon@hotmail.com; black_iori@latinmail.com; dubar_emilio@hotmail.com
Dirección: Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica.

[3] Bill Gates.

Para utilizar el software basta conocer tres de sus partes: **la paleta de ejemplos, la celda de edición y la paleta de aplicaciones**.

2.1 Utilizando la paleta de ejemplos

Primero se abre la celda de ejemplos presionando el marcador, dentro encontrará otra serie de celdas cerradas donde se encuentran los ejemplos respectivos a cada utilidad, se debe presionar el marcador correspondiente, lo que hará que la celda se abra. Oprima el botón del ejemplo que quiere observar, esto hará que la expresión se escriba en la celda de edición, luego se da clic encima de la aplicación correspondiente.

Los botones de ejemplos se han escrito de una manera matemáticamente correcta, pero aparecerán expuestos en la celda de edición en la manera en que deben ser digitados, siguiendo el esquema de programación utilizado y el lenguaje propio de la plataforma utilizada (Mathematica 3.0).

2.2 La celda de edición

En ella deben ser digitadas las expresiones que se desean evaluar, recordando utilizar el lenguaje propio de Mathematica 3.0, los usuarios que ya conozcan Mathematica, podrán hacer uso de la paleta basic input para introducir los enunciados.

2.3 Dentro de la paleta de aplicaciones

Del programa se derivan seis aplicaciones, presentes todas en esta paleta:

- Ecuaciones:

  Resuelve, paso a paso, ecuaciones que no involucren términos trascendentes (logaritmos, funciones trigonométricas ni exponenciales) y que sean reducibles por métodos algebraicos.

- Inecuaciones:

  Resuelve, paso a paso, inecuaciones que no involucren términos trascendentes y que sean reducibles por métodos algebraicos.

  Limitaciones: Si la ecuación o inecuación es irreducible por métodos algebraicos, no se presenta el proceso de solución, esto también sucede si no es factorizable en el conjunto de los números enteros.

- Simplificación:

  Simplifica, paso a paso, expresiones algebraicas, basado en un proceso de factorización y cancelación de términos.

- Logarítmicas:

  Resuelve, paso a paso, ecuaciones logarítmicas, basándose en una serie de primitivas o reglas, aplicadas a la ecuación escrita.

- Trigonométricas: Resuelve, paso a paso, ecuaciones trigonométricas, utilizando una serie de reglas o primitivas y un algoritmo recursivo basado en árboles utlizando la técnica de búsqueda primero en profundidad.

Limitaciones: Para que este modulo funcione adecuadamente necesita una computadora con gran cantidad de recursos.

- Factorización:

Factoriza expresiones algebraicas en el campo de los números enteros con algunas extensiones en el campo de los números racionales. Además factoriza números enteros.

Limitaciones: El campo de factorización es muy reducido ya que tiene una extensión muy pequeña y el tiempo de cálculo puede ser bastante grande (tres minutos).

3. Limitaciones generales del programa

- Al escribir las expresiones en la celda de edición se debe ser muy riguroso para no fallar en la sintaxis pues esto inevitablemente sería interpretado de una manera errónea por el computador.
- El programa consume mucha memoria, además ocupa la plataforma **Mathematica** 3.0 para funcionar.
- La plataforma es muy inestable y puede ocasionar que el sistema se bloquee.

4. Ejemplos

Ejemplo 1. Este ejemplo muestra el modelo de resolución a seguir por el módulo **"Inecuaciones"**:

Solución :

$$3 + 6x > 91 - 5x$$

▷ $3 + 6x - 91 - 5x > 0$

▷ $-88 + 11x > 0$

▷ $11 \;\; -8 + x > 0$

Tabla de Signos

$-\infty$	8	∞
	-	+

De donde obtenemos :

Intervalos de solución :

$x > 8$

Ejemplo 2. Este ejemplo muestra el modelo de resolución a seguir por el módulo **"Logarítmicas"**:

Solución :

$\text{Log}_{10}\ x = 1$

▸ $\text{Log}_{10}\ x - 1 = 0$

▸ $-1 + \text{Log}_{10}\ x = 0$

▸ $\text{Log}_{10}\ x = 1$

▸ $10^{\text{Log}_{10}\ x} = 10$

▸ $x = 10$

▸ $x - 10 = 0$

▸ $-10 + x = 0$

Factor : $-10 + x = 0$

$x = 10$

Prueba con : $x = 10$

$\text{Log}_{10}\ x = 1$
$\text{Log}_{10}\ 10 = 1$
$1. = 1$
La igualdad es válida
$x = 10$ SI es una solución

De donde obtenemos :

Soluciones Reales :

$x_1 = 10$

Soluciones Imaginarias :

No hay soluciones imaginarias ó estas no pueden ser obtenidas por métodos algebraicos

5. Requerimientos del Programa:

Hardware:

- Computadora IBM Compatible.
- Procesador Pentium (Pentium II Recomendado).
- 32 Mb (64Mb recomendado).

Software:

- Windows 95 o versión actualizada.
- Mathematica 3.0 o versión actualizada.

6. Conclusión

Este software puede contribuir de una manera importante en el aprendizaje y capacitación de los estudiantes en temas tales como: álgebra, trigonometría, funciones y aritmética.

El máximo desempeño de este programa se alcanzará cuando pueda ser implementado en los colegios del país, colaborando activamente con el profesor en los contenidos ya mencionados.

Bibliografía

[1] Meneses R., Roxana. *Matemática 11° Enseñanza – Aprendizaje* – 6 ed – San José Costa Rica : Ediciones Farben S.A., 1994.
[2] Hernández D., Fabio. Notas del Curso: *Matemática II*, ITCR. II Semestre, 1997.
[3] Mora F., Walter. Notas del Curso: *Mathematica 3.0*, ITCR. I Semestre, 1999.
[4] Astorga M., Alcides. Notas de cursos, ITCR, 1984-1995.
[5] Winston, P.; Paul, B. *LISP*, 3ra. Edición, Addison-Wesley, 1991.

Representación geométrica de los números complejos y sus operaciones en Mathematica®

Luis Rodriguez; Alvaro Ramirez

Resumen

La enseñanza asistida por computadora no es la solución al problema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La enseñanza no se puede automatizar y el profesor no se puede reemplazar. No obstante, las nuevas tecnologías abren espacios en los que el estudiante puede vivir experiencias matemáticas difíciles de reproducir con los medios tradicionales como el lápiz y el papel. En estas experiencias matemáticas el estudiante puede realizar actividades de exploración en las que es posible manipular directamente los objetos matemáticos y sus relaciones y en las que él puede construir una visión más amplia y más potente del contenido matemático. Para que esto suceda es necesaria la participación del profesor. El profesor es quien tiene la responsabilidad de diseñar las situaciones didácticas más apropiadas para aprovechar las potencialidades de la tecnología de acuerdo a las dificultades y las necesidades de los estudiantes. Esta actividad de diseño e implantación de situaciones didácticas hace parte trascendental de la integración de la tecnología al currículo. Por está razón, se debe mirar la tecnología educativa como el encuentro de dos vertientes: aquella que produce sistemas computacionales con los que el estudiante puede vivir experiencias matemáticas y aquella (a cargo de los diseñadores de currículo y los profesores) que produce las situaciones didácticas para que estas experiencias matemáticas sean fructíferas desde el punto de vista de las dificultades y las necesidades del estudiante en el proceso de construcción de su conocimiento matemático. Esta interacción entre la tecnología, el profesor y el estudiante está cambiando la visión que los actores tienen del contenido matemático y del proceso didáctico. Este es el mayor aporte de la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora.

Introducción

Representación Geométrica de los Números Complejos y sus Operaciones surge como proyecto final de tres estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora en Instituto Tecnológico de Costa Rica para el curso *Taller de Software Didáctico* en el primer semestre de 1999. La aplicación se desarrolló completamente bajo el software *Mathematica® 3.0* (*Wolfram Research, Inc.*) y con la supervisión del profesor Walter Mora.

Esta aplicación en particular permite representar los números complejos en el llamado plano complejo, y así mismo representar y ayudar a interpretar, de manera geométrica, los resultados de algunas de sus operaciones.

La aplicación consta de un único módulo, en el cual se divide en cuatro secciones: la aplicación principal, una reseña histórica, una sección de ejemplos y finalmente una sección acerca de los autores.

Desarrollo

La aplicación principal permite trabajar con dos números complejos, Z y W, introducidos por el usuario. Para estos dos números se pueden realizarlas las cuatro operaciones básicas, sin embargo también se pueden realizar operaciones tales como obtener un análisis del número, su recíproco, así como potencias y raíces.

La representación de números complejos haciendo uso de *Mathematica® 3.0* es en realidad sencilla, pues tiene funciones que permiten separar la parte imaginaria de la parte real, por tanto basta hacer un par ordenado de la forma (*real, imaginario*) y se grafica en el plano cartesiano que viene a representar el plano complejo.

Análisis de un número complejo

Esta función no sólo muestra la representación del número complejo en el plano cartesiano, también obtiene y desglosa su parte real, su parte imaginaria, su módulo o valor absoluto, su argumento, además de mostrar también su conjugado. (Figura 1).

Suma de números complejos

La representación de la suma de números complejos en el plano complejo es análoga a la suma de vectores en el plano cartesiano, de manera que el resultado de sumar W y Z se puede obtener al trasladar el origen del vector W a la cabeza del vector Z. (Figura 2).

Resta de números complejos

La resta en el conjunto de los números complejos, al igual que en otros conjuntos, es una caso particular de la suma, donde a un número se suma el opuesto de otro, por esta razón la representación de esta operación también es análoga a la resta de vectores en el plano cartesiano. (Figura 3).

Multiplicación de números complejos

Al realizar esta operación se obtiene un número complejo que al ser representado en el plano complejo permite formar triángulos semejantes. Para construir estos triángulos basta tomar como vértices de un triángulo los puntos que representan los números {0, 1, W} y como vértices del otro triángulo los puntos que representan los números {0, Z, W*Z}. Análogamente se pueden tomar como vértices los números {0, 1, Z} y {0, W, W*Z}. (Figura 4).

División de números complejos

Así como la resta se puede expresar como una suma, la división también se puede expresar como una multiplicación, razón por la cual cumple también la propiedad de formar triángulos semejantes, pero en este caso se deben tomar como vértices los puntos {0, W, W/Z} y {0, Z, 1}. (Figura 5).

Recíproco de un número complejo

El recíproco de un número complejo es un caso particular de la multiplicación de números complejos, pues es sabido que W * W-1 = 1, por lo que los triángulos semejantes son los formado por los puntos {0, 1, W} y {0, W-1, 1}. (Figura 6).

Potencia de un número complejo

Otro caso particular de la multiplicación de números complejos, donde al representar en el plano complejo W, W2, W3, ..., Wn se obtienen n triángulos semejantes consecutivos. (Figura 7).

Raíces de un número complejo

En el conjunto de los números complejos, la raíz n-ésima de W tiene n valores, los cuales al ser representados en el plano complejo forman un polígono regular de n lados inscrito con centro en el origen y con radio igual a la n-ésima raíz del módulo de W. (Figura 8).

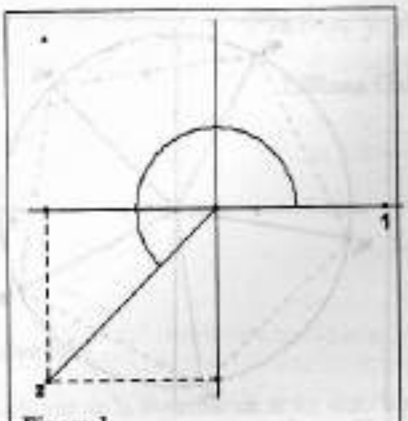


Figura 1.

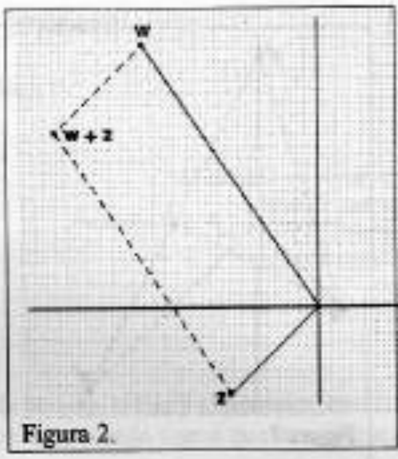


Figura 2.

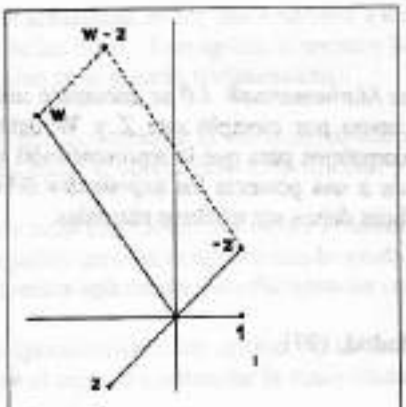


Figura 3.

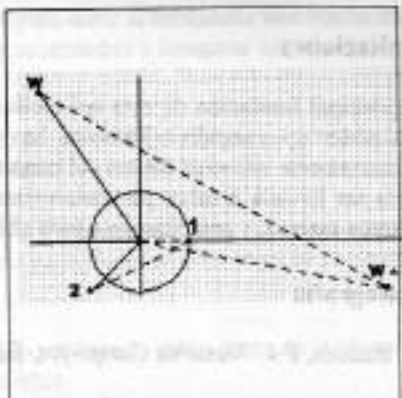


Figura 4.

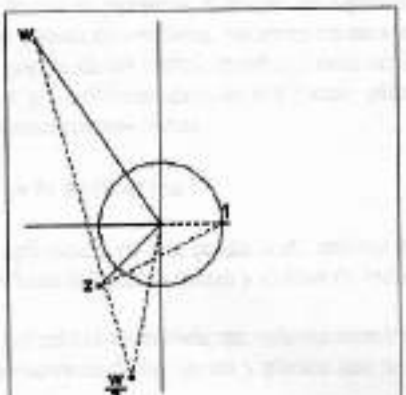


Figura 5.

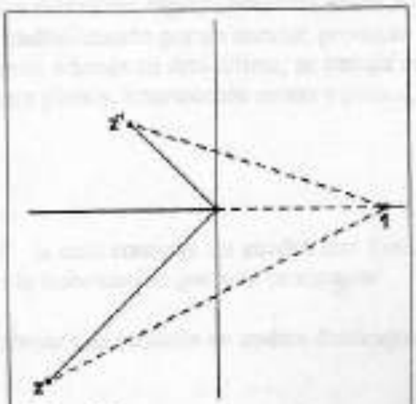


Figura 6.

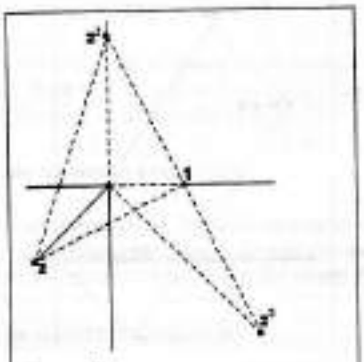


Figura 7.

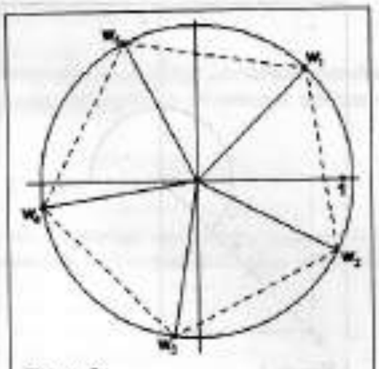


Figura 8.

Limitaciones

La principal limitación de esta aplicación es que requiere que *Mathematica® 3.0* se encuentre instalado para poder ser cargado. También hay otras limitaciones, como por ejemplo que **Z** y **W** deben ser necesariamente números dentro del conjunto de los números complejos para que la representación gráfica pueda ser llevada a cabo; particularmente en el caso de elevar a una potencia los exponentes deben ser números enteros, y análogamente para obtener una raíz los índices deben ser números naturales.

Bibliografía

[1] Budden, F.J. *Números Complejos.* Editorial Alhambra, Madrid, 1971.

Planos y vectores en el espacio

Lilliana Calvo H.; Gabriela Mena R.[1]

El hombre no puede nunca
dejar de aprender;
es lo que nos distingue
de otras especies.[1]

Introducción

La enseñanza de la matemática se ha visto limitada al empleo de la pizarra, la tiza y el borrador, en algunos casos esto dificulta el aprendizaje de los estudiantes, sobre todo cuando tienen que imaginarse un sólido que está en tres dimensiones.

En la actualidad, existe una tendencia a utilizar la computadora para darle al estudiante una visión más exacta de las cosas. Esto agiliza la mente y hace que el alumno se acostumbre a imaginar no solo en el plano, sino en el espacio tridimensional.

Más que acostumbrar la mente del alumno es darle la opción de que realice diferentes tipos de pruebas para que tenga la oportunidad de conjeturar y llegue a sus propias conclusiones.

Todo estas situaciones nos llevan a buscar soluciones para dichos problemas. Existen software que al manipularlos correctamente brindan la ayuda que se necesita, como parte de estas soluciones se presentan las siguientes aplicaciones confeccionadas en Mathematica 3.0.

Las aplicaciones tienen el objetivo de facilitar la comprensión de vectores y rectas tanto en el plano como en el espacio y estimular la manipulación e imaginación de éstas.

Este software permite ampliar los recursos que se utilizan en el proceso de enseñanza -aprendizaje para realizar una práctica y verificar resultados; además de estimular la creatividad del usuario para ir más allá de lo que se presenta. Constan de algunos conceptos generales dentro del álgebra vectorial como lo es la suma y resta de vectores, vectores en un sistema coordenado, multiplicación por un escalar, producto punto, norma de un vector, producto cruz en dos y tres dimensiones, además en ésta última, se trabaja con espacios geométricos como lo son rectas, planos, intersección entre planos, intersección rectas y planos, intersección rectas- rectas.

¿Qué es la aplicación?

La aplicación es una pantalla de trabajo en Mathematica 3.0. la cual contiene un cuadro con botones que realizan diferentes tareas y celdas de lecturas para introducir la información que será procesada.

En las celdas se introducen valores numéricos, si se quiere trabajar con vectores en ambas dimensiones, o las ecuaciones de las rectas y planos que se quieren graficar.

---

1 Estudiantes de la Carrera de Enseñanza de la Matemática asistida por Computadora
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Estas tareas son sumar y restar vectores, multiplicar un vector por un escalar, producto punto, norma de un vector, etc. tanto para dos como para tres dimensiones y dentro de los botones algunos cuentan con la presencia de un botón llamado giro que hace que el vector rote alrededor del eje " y ", y se puede observar su comportamiento en diferentes posiciones.

También existen botones para planos y rectas, sus intersecciones, etc.

Instrucciones para el uso de las aplicaciones

Cada uno de estos apartados posee celdas de lectura en las cuales el usuario introduce los datos que se solicitan dependiendo de lo que se esté desarrollando, luego podrá oprimir el botón para observar la representación gráfica de lo que se trabajó, manipulando la información de las celdas de lecturas en ambas dimensiones.

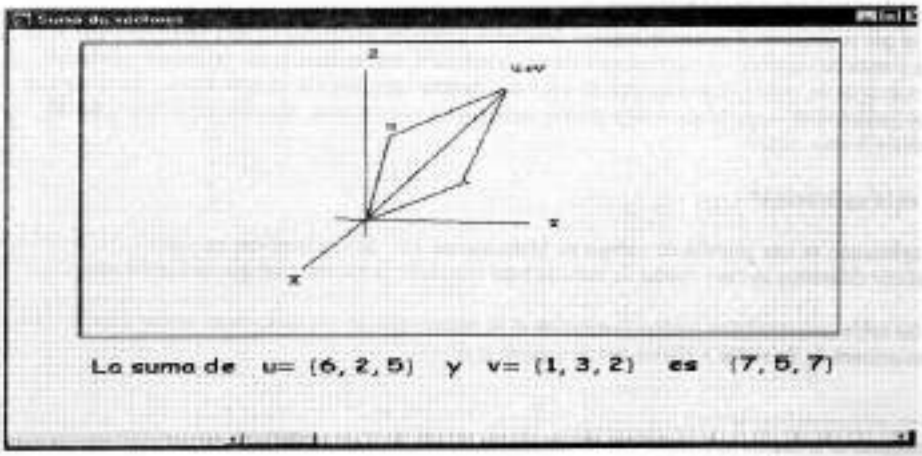
Por ejemplo, para vectores en tres dimensiones se introducen los valores numéricos de cada coordenada y al presionar el botón se ejecuta la aplicación.

Se introduce el vector con coordenadas (6,2,5) y el vector con coordenadas (1,3,2):

Vector 1	(6, 2, 5)
Vector 2	(1, 3, 2)

Suma de vectores

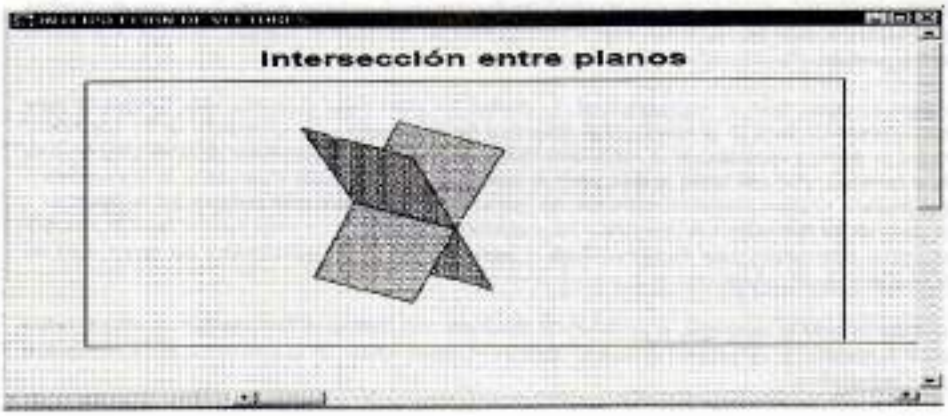
La gráfica y su resultado algebraico:



Así, para intersección de planos se introducen las ecuaciones de los planos y se presiona el botón que se encuentra en la parte inferior

Ecuación 1	`1 - 2 x + 4 y - z == 0`
Ecuación 2	`1 + x - 4 y - z == 0`

obteniendo:



Conclusiones

La utilización de estas aplicaciones permite al usuario tener una mayor perspectiva de los gráficos en tres dimensiones.

En ocasiones, al manipular vectores la comprensión de algunos conceptos como la suma de ellos, es difícil. Mediante el uso de gráficas ésta se facilita.

Esta aplicación permite ilustrar ciertos resultados, entre ellos que la intersección de dos planos corresponde a una línea y que la intersección de dos rectas corresponde a un punto.

Bibliografía

[1] Grossman, S. *Algebra lineal.* Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1990.
[2] Grossman, S. *Algebra lineal con aplicaciones.* 4ta. Edición. McGraw-Hill, México, 1991.
[3] Mora, Walter. *Notas del curso Mathematica 3.0.* I.T.C.R, 1999.
[4] Murillo, Manuel. *Notas del curso de Algebra Lineal.* I.T.C.R, 1999.

Introducción a la trigonometría: una sesión de aprendizaje en ToolBook

Luis Rodríguez[1]

Resumen

La enseñanza asistida por computadora no es la solución al problema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La enseñanza no se puede automatizar y el profesor no se puede reemplazar. No obstante, las nuevas tecnologías abren espacios en los que el estudiante puede vivir experiencias matemáticas difíciles de reproducir con los medios tradicionales como el lápiz y el papel. En estas experiencias matemáticas el estudiante puede realizar actividades de exploración en las que es posible manipular directamente los objetos matemáticos y sus relaciones y en las que él puede construir una visión más amplia y más potente del contenido matemático. Para que esto suceda es necesaria la participación del profesor.

El profesor es quien tiene la responsabilidad de diseñar las situaciones didácticas más apropiadas para aprovechar las potencialidades de la tecnología de acuerdo a las dificultades y las necesidades de los estudiantes. Esta actividad de diseño e implantación de situaciones didácticas hace parte trascendental de la integración de la tecnología al currículo. Por esta razón, se debe mirar la tecnología educativa como el encuentro de dos vertientes: aquella que produce sistemas computacionales con los que el estudiante puede vivir experiencias matemáticas y aquella (a cargo de los diseñadores de currículo y los profesores) que produce las situaciones didácticas para que estas experiencias matemáticas sean fructíferas desde el punto de vista de las dificultades y las necesidades del estudiante en el proceso de construcción de su conocimiento matemático.

Esta interacción entre la tecnología, el profesor y el estudiante está cambiando la visión que los actores tienen del contenido matemático y del proceso didáctico. Este es el mayor aporte de la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora.

Introducción

Como parte del programa de estudios de la carrera Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, impartida en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, se encuentra el curso Multimedios en la Educación. En dicho curso se presentan diferentes paquetes de software que permiten diseñar desde una situación de aprendizaje elemental hasta sesiones de aprendizaje más elaboradas y definidas.

Uno de los paquetes presentados en este curso fue el *Asymetrix ToolBook*, dentro del cual se elaboró una sesión de aprendizaje que pretende introducir el concepto de razón trigonométrica mediante la semejanza de triángulos.

Introducción a la Trigonometría fue diseñado para ser utilizado de manera individual, es decir, debe ser instalado en cada computador que vaya a ser utilizado por estudiantes. No obstante vale la pena aclarar la finalidad de esta aplicación: servir como material de apoyo al profesor para introducir el tema; de lo anterior se desprende que la aplicación por si sola no garantiza el aprendizaje del tema, esto se podría lograr bajo la supervisión del profesor en las actividades planteadas dentro de la aplicación de manera que el profesor sirva como guía del proceso de aprendizaje y no como un simple observador.

---

[1] Estudiante, Carrera de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, I.T.C.R.

Desarrollo

Introducción a la Trigonometría consta de dos módulos principales: Teoría y Práctica. En el módulo de teoría se localizan las actividades que permiten al estudiante asimilar el concepto de razón trigonométrica mediante la semejanza de triángulos. El módulo de práctica presenta diferentes ejercicios que le permiten al estudiante aplicar lo aprendido.

En el módulo de teoría el estudiante primero recordará el concepto de semejanza y sus implicaciones y con base en ello poder calcular las razones existentes entre los dos catetos de un triángulo rectángulo dado y luego encontrar esta misma razón en un triángulo semejante.

La interfaz básica de la aplicación divide la pantalla en tressecciones: botones, sección de texto y sección de ilustraciones. Los botones son iconos significativos, no obstante al detener el puntero del mouse sobre ellos se puede leer su función en la esquina inferior derecha. La sección de texto se presenta en la parte derecha de la pantalla y está diseñada para mantener el texto de la pantalla anterior, o al menos las ideas principales, pero desvaneciendo un poco el color para llamar la atención sobre el nuevo texto. Respecto a la sección de ilustraciones, se muestra únicamente cuando es necesario para no desviar la atención del estudiante.

Limitaciones

Al igual que cualquier aplicación realizada en el Asymetrix Toolbook, requiere de ciertos archivos de configuración e inicialización necesarios para poder cargar la aplicación sin tener instalado Asymetrix Toolbook. Así mismo, para poder hacer uso del botón de la Calculadora es necesario tener instalada la calculadora de Microsoft Windows en el directorio c:\windows.

Conclusiones

La enseñanza asistida por computadora no es la solución al problema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La enseñanza no se puede automatizar y el profesor no se puede reemplazar. No obstante, las nuevas tecnologías abren espacios en los que el estudiante puede vivir experiencias matemáticas difíciles de reproducir con los medios tradicionales como el lápiz y el papel. En estas experiencias matemáticas el estudiante puede realizar actividades de exploración en las que es posible manipular directamente los objetos matemáticos y sus relaciones y en las que él puede construir una visión más amplia y más potente del contenido matemático. Para que esto suceda es necesaria la participación del profesor.

El profesor es quien tiene la responsabilidad de diseñar las situaciones didácticas más apropiadas para aprovechar las potencialidades de la tecnología de acuerdo a las dificultades y las necesidades de los estudiantes. Esta actividad de diseño e implantación de situaciones didácticas hace parte trascendental de la integración de la tecnología al currículo. Por esta razón, se debe mirar la tecnología educativa como el encuentro de dos vertientes: aquella que produce sistemas computacionales con los que el estudiante puede vivir experiencias matemáticas y aquella (a cargo de los diseñadores de currículo y los profesores) que produce las situaciones didácticas para que estas experiencias matemáticas sean fructíferas desde el punto de vista de las dificultades y las necesidades del estudiante en el proceso de construcción de su conocimiento matemático.

Esta interacción entre la tecnología, el profesor y el estudiante está cambiando la visión que los actores tienen del contenido matemático y del proceso didáctico. Este es el mayor aporte de la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora.

Bibliografía

[1] Gertler, N. Multimedia Illustrated, 1995.

[2] Hall, T.L. Utilizing Multimedia ToolBook 3.0. Boyd-Fraser, 1995.

[3] Holtz, M. The Multimedia Workshop: Toolbook 3.0. Wadsworth, 1995.

[4] "Online Learning: Asymetrix Learning Systems Inc"; http://www.asymetrix.com;

[5] "ToolBook Discussion List"; http://www.mailbase.ac.uk/lists-p-t/toolbook

[6] "ToolBook User's Web"; http://www.ilrt.bristol.ac.uk/toolbook>

Aplicación de Director 6.5 para la enseñanza de operaciones con números racionales

Alexander Borbón A.; Gabriela Mena R.[1]

Introducción

Gracias a los avances tecnológicos, diversos campos donde se desenvuelve el ser humano han evolucionado, presentándose ahora más eficientes. La educación no debe quedarse atrás. Es por esto, que se debe incursionar en metodologías que permitan el uso de la tecnología de la que disfrutamos hoy, para procurar mejorar el proceso educativo.

"Una investigación realizada por la UNESCO demuestra que el alumno retiene un 30% cuando oye, un 40% cuando ve; un 50% cuando oye y ve, y un 70% cuando participa activamente.
Por eso es tan importante apoyar el símbolo oral que es la palabra con las imágenes y los objetos que entran por la vista y el hacer del alumno que permite participar activamente" ([1]).

La cita anterior da pie a la utilización de la tecnología de multimedios, para crear ambientes de aprendizaje donde se combinen, gracias al uso de la computadora, elementos como: sonido, video y animaciones, los cuales permitirán un mayor nivel de retención, además, el alumno tendrá la oportunidad de interactuar con todos estos elementos.

Por otra parte, la utilización de dicha tecnología como medio para lograr el aprendizaje de los estudiantes, servirá de motivación para éstos. En materias como la matemática, que en ocasiones, por su abstracción, presenta dificultad para que el alumno la entienda, la utilización de metodologías donde se utilice la computadora para crear ambientes o situaciones donde los conceptos matemáticos sean más tangibles, probablemente provocarán un mayor interés por parte de los alumnos.

"Lo emocional es fundamental en todo aprendizaje: todo lo que se aprende tiene una coloración emocional. Por ello se aconseja a los docentes que cuando deban enseñar temas áridos o abstractos, preparen una actividad agradable para producir en los alumnos una experiencia placentera" ([1]).

Por lo anterior se ha creado una aplicación en Director 6.5 para explicar y evaluar las operaciones con números racionales.

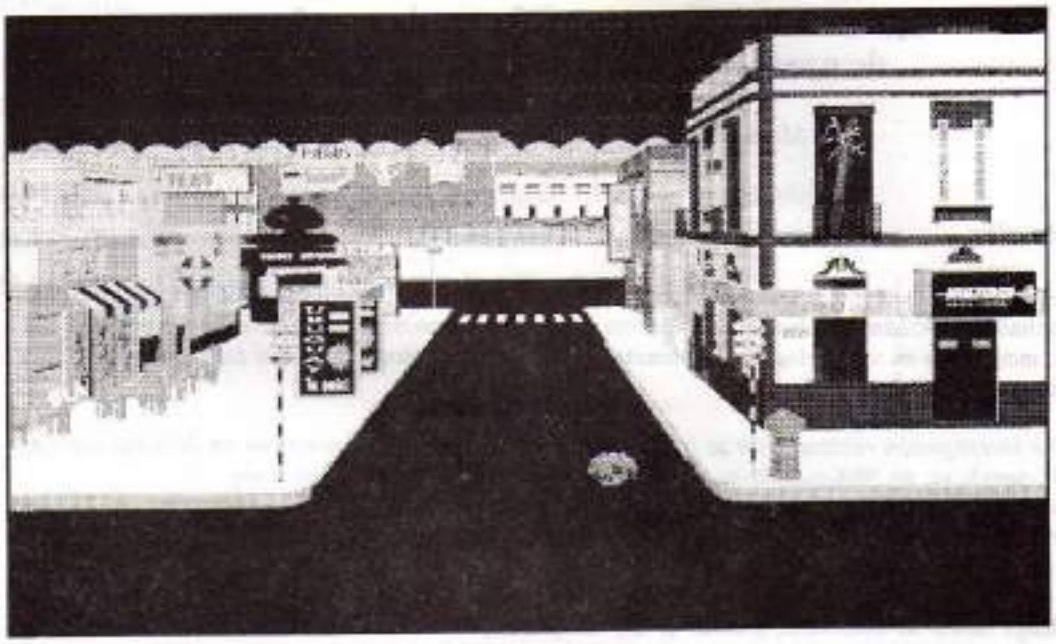
¿A quiénes va dirigida la aplicación?

La aplicación va dirigida a estudiantes de primaria o secundaria que estén iniciando el estudio del tema de operaciones con números racionales o deseen hacer un repaso del tema.

¿En qué consiste la aplicación?

La metáfora de la aplicación consiste en una ciudad, donde sus habitantes deben resolver en su vida cotidiana, diversos problemas. Para encontrar solución a dichos problemas se deben emplear las operaciones con los números racionales.

[1] Estudiantes de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, Instituto Tecnológico de Costa Rica



La aplicación posee un protagonista que es un perrito (ver dibujo). Este hace un recorrido por toda la ciudad. Además, aparecen otros cuatro personajes: una ama de casa, un comerciante, un agricultor y un científico, cada uno de ellos debe resolver un problema que se le ha presentado en su trabajo, de esta forma se explican las cuatro operaciones básicas con números racionales. Después de la explicación se le presenta al estudiante una práctica para que el usuario refuerce lo aprendido.

En la ciudad aparece también una biblioteca en la que se puede tener acceso a tres libros, de los cuales, uno presenta una reseña histórica acerca del desarrollo de los números racionales, en el otro el usuario podrá evaluar lo aprendido en una práctica general, y en el tercer libro se encuentra el acerca de...

Conclusiones

Al utilizar la computadora en la enseñanza, podemos crear situaciones reales donde se aplique lo abstracto de algunos conceptos tales como: las operaciones básicas de los números reales.

Además de la explicación del profesor en clases, con aplicaciones como ésta, el estudiante tendrá la posibilidad de repasar los conceptos y evacuar algunas dudas que le hayan quedado.

Se debe procurar que el uso de la computadora no se convierta en un fin en sí mismo, sino un medio para beneficiar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Al utilizar esta aplicación la tecnología de multimedios, se puede motivar a los estudiantes, los cuales se encuentran en una edad en la que desean explorar.

Bibliografía

[1] Medaura, Julia O. Didáctica para un profesor diferente. Editorial Hvmanitas, Buenos Aires, Argentina, 1990.

[2] Meneses R., Roxanna. Matemática 7º; enseñanza-aprendizaje. 4. ed. Ediciones Farben S.A., San José, Costa Rica, 1994.

[3] Macromedia. Learning Director. Macromedia Director V.5. San Francisco, CA, 1996.

[4] Macromedia. Using Director. Macromedia Director V.5. San Francisco, CA, 1996.

[5] Meza C., Luis G. et al. "Planeamiento de procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática asistidos con software matemático". Memorias del V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemática (ECADIM). Javier trejos (Editor). Liberia. Costa Rica, 1997.

Rotación de objetos tridimensionales alrededor de una recta. Implementación en MATHEMATICA

Walter Mora F.[1]

Resumen.

Si A es una matriz ortogonal, $A\mathbf{v}$ es una rotación del vector $\mathbf{v}$ alrededor de un vector $\mathbf{u}$. En este trabajo, a partir de un ángulo θ y un eje de rotación $\mathbf{u}$ arbitrario, se obtiene una matriz ortogonal que describe esta rotacin. Se hace una implementación en MATHEMATICA y se aplica a algunos objetos tridimensionales. También se discute la relacin entre los ángulos de Euler y el ángulo y el eje de rotación.

1 Introducción

Cuando se hacen manipulaciones de gráficos tridimensionales por computadora (en animación y simulación, etc.), una tarea muy conveniente es hacer rotaciones de estos objetos alrededor de una recta en el espacio. Cuando el objeto tridimensional es, en general, un lista de primitivas y las primitivas son una lista de puntos $P = \{P_1, \cdots, P_k\}$ entonces, para hacer una animación del objeto tridimensional, que incluya rotaciones, lo mejor es tener una parametrización $P_i = P_i(\theta)$. La animación es una sucesión de gráficos (frames) obtenidos al hacer variar θ. Una parametrización de los puntos, para hacer una rotación, se puede lograr con herramientas matriciales (matrices ortogonales). Una manipulación más poderosa de las rotaciones se puede lograr con el álgebra de cuaterniones, con esta última se puede establecer, e manera sencilla, la relación entre la rotación alrededor de un eje y los ángulos de Euler.

En las bibliotecas estándar de MATHEMATICA 3.0 (4.0) hay dos alternativas para rotar un objeto tridimensional, una es usando ángulos de Euler (`RotateShape[]`) y otra es manipulando el `ViewPoint` (`SpinShow[]`). Ambas opciones son en general inadecuadas para tareas generales de animación. En el caso de los ángulos de Euler, no hay una relación adecuada entre estos ángulos y un eje de giro arbitrario. Sin embargo, se puede implementar un comando (de manera relativamente sencilla) para la rotación de cualquier objeto tipo `Graphics3D` alrededor de un eje arbitrario.

1.1 Matrices de rotación

Si A es ortogonal (i.e. $A^tA = I$) y si $\lambda = 1$ es un valor propio de A y $\mathbf{u}$ es un vector propio asociado a $\lambda = 1$, entonces $< A\mathbf{v}, \mathbf{u} >=< A\mathbf{v}, A\mathbf{u} >=< \mathbf{v}, \mathbf{u} >$. Esto hace que $A\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}$ tengan la misma norma y el mismo ángulo respecto a $\mathbf{u}$. $A\mathbf{v}$ es una rotación de $\mathbf{v}$ alrededor de $\mathbf{u}$.

En general, si A es ortogonal, $A\mathbf{v}$ es una rotación de $\mathbf{v}$ (algunas de estas rotaciones son 'impropias', es decir, corresponden a reflecciones, inversiones o "rotoreflecciones"). Ahora, dada A ortogonal, ¿cuál es el ángulo de giro y cuál es el eje de giro?

Teorema (Matrices ortogonales)

[1]Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Matemática, e-mail: wmora@itcr.ac.cr

Sea $A_{3\times 3} = (a_{ij})$ real ortogonal
Sean ω y $\bar{\omega}$ complejos conjugados. Si $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \omega$ y $\lambda_3 = \bar{\omega}$ son los valores propios de la matriz A, entonces $A\mathbf{v}$ es una rotación de $\mathbf{v}$, de ángulo ϕ, alrededor de la recta generada por cualquier vector propio $\mathbf{u}$ asociado al valor propio $\lambda = 1$. El ángulo de rotación ϕ satisface la ecuación $\cos(\phi) = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}A - 1)$. Además podemos tomar

$$\mathbf{u} = \left(\frac{a_{32} - a_{23}}{2\mathrm{sen}\phi}, \frac{a_{13} - a_{31}}{2\mathrm{sen}\phi}, \frac{a_{21} - a_{12}}{2\mathrm{sen}\phi}\right)$$

■

- En la fórmula del teorema si $\phi = 0$, $\mathbf{u}$ es indeterminado. Esto se considera razonable puesto que el eje de rotación pierde sentido en este caso.

EJEMPLO 1 .

La matriz ortogonal $A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

cumple las condiciones del teorema, sus valores propios son 1, $0.550477 \pm 0.83485\,\mathrm{i}$. *El ángulo de rotación es* 1.31812 *radianes alrededor de* $\mathbf{u} = (0.663291, -0.210819, 0.508961)$.

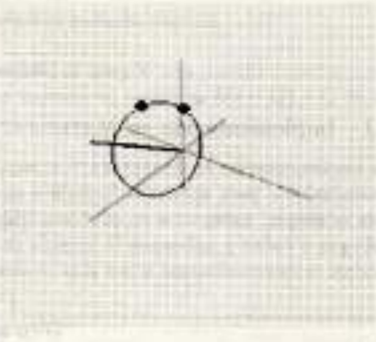


Figura 1: Efecto de la matriz ortogonal A

2 Parametrización para la rotación alrededor de una recta

Consideramos primero el problema de encontrar una matriz de rotación correspondiente a un giro de ángulo ϕ alrededor del vector unitario $\mathbf{u}$. Este problema se puede resolver geometricamente

Teorema. Dado ϕ y $\mathbf{u}$ unitario entonces

$$A\mathbf{v} = \mathbf{v} + (\mathrm{sen}\phi)(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + 2(\mathrm{sen}^2\frac{\phi}{2})\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

es un giro de $\mathbf{v}$ de ángulo ϕ alrededor del vector $\mathbf{u}$.

■

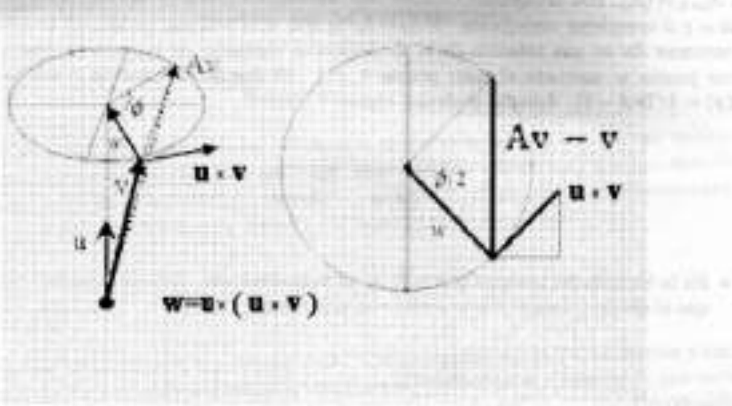


Figura 2: Deducción de la parametrización

2.1 Implementación en MATHEMATICA

La implementación en MATHEMATICA requiere de dos ingredientes, la fórmula de rotación y un procedimiento para aplicar la fórmula a una imagen tridimensional de tipo `Graphics3D[ ]`. La idea es simple: navegamos en el objeto tridimensional buscando las primitivas con "Head" `Line`, `Polygon` o `Point` y aplicamos la fórmula de rotación a la lista de puntos de cada primitiva. En el módulo ortonormalizamos u por si se le olvida al usuario.

Giro alrededor de un vector

```
Rotar[objeto_,u_,phi_]:=Module[{A},

A=(#+Sin[phi]*Cross[u/Sqrt[u.u],#]+
  2(Sin[0.5*phi]^2)*Cross[u/Sqrt[u.u],Cross[u/Sqrt[u.u],#]])&;

  objeto /. {poly  : Polygon[_] :> Map[A, poly, {2}],
             line  : Line[_]    :> Map[A, line, {2}],
             point : Point[_]   :> Map[A, point, {1}]}];
```

EJEMPLO 2 : *Rotación alrededor de un vector.*

Se puede usar la parametrización dada por el teorema anterior para rotar un vector alrededor de una recta que no pasa necesariamente por el origen: primero se traslada la recta hasta que pase

```
ejes=Graphics3D[...];
Rotar[objeto_,u_,phi_]:=Module[...];
tri=Graphics3D[{
    {EdgeForm[RGBColor[0.5,0,0.2],Thickness[0.01]],
     FaceForm[GrayLevel[0.7],RGBColor[0,0.5,0.75]],
     Polygon[{{0,0,0},{0,1,1},
             {0,1,0},{0,0,0}}]} }];
```

```
Show[{tri,ejes,Rotar[tri, {0,1,0},Pi/4]},
      PlotRange->{{-0.1,1},{-0.1,1.2},{-0.1,1}},
      ViewPoint->{0.933,3.17,2.04},
      Boxed->False,Axes->False,
      Lighting->False]
```

por el origen, se hace la rotación y de nuevo se traslada a la posición original.

Teorema. Sea u unitario. Consideremos la recta $L : Q + t\,\mathbf{u}$. Sea $A\mathbf{v}$ una parametrización correspondiente a un giro de ángulo ϕ alrededor del vector unitario $\mathbf{u}$, entonces $A(\mathbf{v} - Q) + Q$ es una rotación de v, de ángulo ϕ, alrededor de la recta L. ■

Implementación en Mathematica

Procedemos de manera análoga que en la sección anterior

```
RotarLin[objeto_, Q_, u_, phi_] := Module[{A},

A=((#-Q)+Sin[phi]*Cross[u/Sqrt[u.u],(# - Q)]+
  2(Sin[0.5*phi]^2)*Cross[u/Sqrt[u.u],Cross[u/Sqrt[u.u],(# - Q)]] + Q)&;

objeto /. {poly : Polygon[_] :> Map[A, poly, {2}],
           line :    Line[_] :> Map[A, line, {2}],
          point :   Point[_] :> Map[A, point, {1}]}];
```

Ejemplo 3 : *Animación: rotación de una de las caras de un Dodecaedro.*

En MATHEMATICA, un Dodecahedro es una lista de 12 polígonos `{Polygon[{...}],...,Polygon[{...}]}`. Cada comando `Polygon[{V1,...,V5}]` contiene los 5 vértices de la cara correspondiente. Para hacer una rotación de una cara del Dodecahedro, fijamos un vértice (digamos V1) y tomamos el punto medio del lado opuesto al vértice. La recta que une estos puntos será el eje de giro. Luego usamos el comando `RotarLin[]` definido anteriormente. El código de la animación sería la siguiente

```
<< Graphics'Polyhedra'
Clear[d, cara, u, Q];
d = Dodecahedron[];
cara = Graphics3D[{ d[[1]] }];
u = d[[1,1,1]]-(d[[1,1,3]]+d[[1,1,4]])/2;
Q = d[[1, 1, 1]];
dode = Graphics3D[{ Drop[d, {1}] }];
RotarLin[ob_,Q_,u_,phi_]:=Module[{A},...];

Do[
Show[{dode, RotarLin[ cara, Q, u, t ]},
 PlotRange->{{-1.5,1.5},{-1.5,1.5},{-1.5,1.5}}
 AspectRatio -> Automatic,
 ViewPoint -> {0.031, 0.032, 3.383},
 Boxed -> False, Axes -> False]
, {t, 0, 2Pi, 0.2}]
```

- Para obtener el arreglo de 'frames' anterior se usa el código

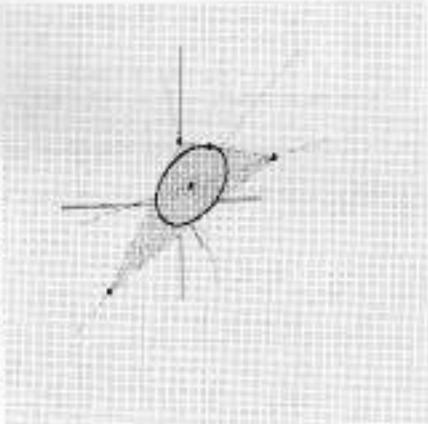
```
Needs["Graphics'Animation'"];\
<< FlipBookAnimation.m
Graphics'Animation'$Columns=2;

Animate[
Show[{dode,RotarLin[ cara, Q, u, t ]},
 PlotRange -> {{-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}},
 AspectRatio -> Automatic,
```

```
ViewPoint -> {0.031, 0.032, 3.383},
Boxed -> False, Axes -> False]
,{t, 0, 2Pi, 0.8}]
```

2.2 Parametrización de un círculo en un plano

El último teorema nos dice también, como parametrizar un circunferencia en un plano: consideremos el plano Π : $[(x, y, z) - O_c] \cdot \mathbf{n} = 0$ y la circunferencia C, en el plano Π, de centro O_c y radio $||O_c - P||$, $P \in C$. Una parametrización de C es $A(P - O_c) + O_c$.



Ejemplo 4 : *Circunferencia en un plano.*

Considere el triángulo con vértices
$A = (-1, 1, \frac{1}{2})$, $B = (1, 1, -\frac{1}{2})$, y $C = (0, 0, \frac{1}{2})$
Podemos dibujar las bisectrices, el incentro y la circunferencia inscrita del triángulo. El incentro es la intersección de las bisectrices. Sean $V = A - C$, $W = B - C$ y $U = A - B$ entonces dos bisectrices son $L_1 : C + t\left(V + \frac{||V||}{||W||}W\right)$ $L_2 : B + s\left(U - \frac{||U||}{||W||}W\right))$ y el incentro es $Ic = L_1 \bigcap L_2 = \{(0, 2/3, 1/6)\}$.
Para parametrizar la circunferencia, tomamos como centro el incentro Ic; el radio es $||Ic - P||$ donde $P = Proy_{(A-B)}(Ic - B)$, P es el punto de tangencia del círculo con un lado del triangulo. Parte del código para desplegar la figura es

```
triangulo=Graphics3D[{...}];
Clear[A]; u=Cross[{-1,1,0},{1,1,-1}];
A[v_,Q_,u_,phi_]:=(v-Q)+Sin[phi]*Cross[u/Sqrt[u.u],(v-Q)]+
            2(Sin[0.5*phi]^2)*Cross[u/Sqrt[u.u],Cross[u/Sqrt[u.u],(v-Q)]]+Q;

circunferencia=
ParametricPlot3D[Evaluate[A[P,Ic,u,phi] /. phi->t]
                ,{t,0,2Pi},DisplayFunction->Identity];

Show[{triangulo, circunferencia},
      Boxed->False, Axes->False,
      ViewPoint->{0.405,2.768,1.904},
      DisplayFunction->$DisplayFunction];
```

3 Cuaterniones y Angulos de Euler

En Mathematica, la rotación de un objeto tridimensional se puede hacer con
`RotateShape[obj,α,θ,ψ ]` con $\theta \in [0, \pi]$. La rotación dada por los ángulos de Euler α, θ y ψ

puede ser descompuesta en una sucesión de tres rotaciones sucesivas. La primera rota un ángulo α alrededor del eje Z, la segunda rota un ángulo θ alrededor del eje X y la tercera rota un ángulo ψ alrededor del eje Z nuevamente. `RotateShape[ ]` determina la matriz de rotación correspondiente y la aplica a todas los puntos del objeto geometrico. El comando `RotationMatrix3D[`α, θ, ψ`]` da la matriz de rotación correspondiente a las tres rotaciones sucesivas determinadas por los ángulos de Euler.

El problema es, dado ϕ y $\mathbf{u}$, ¿cuál es la relación entre los ángulos de Euler y ϕ y $\mathbf{u}$?. La relación más sencilla se obtiene usando quaterniones.

Los quaterniones son objetos $[a, \mathbf{v}]$, donde a es un escalar y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

- La suma y la multiplicación (no commutativa) de quaterniones se define así:

- $[a_1, \mathbf{v}] + [a_2, \mathbf{u}] = [a_1 + a_2,\ \mathbf{v} + \mathbf{u}]$
- $[a_1, \mathbf{v}][a_2, \mathbf{u}] = [a_1 a_2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u},\ a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}]$

- La norma de un quaternion se define como $|||\mathbf{a}, \mathbf{v}||| = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$

- Si $\mathbf{1} = [\mathbf{1}, (0,0,0)]$ entonces $[\mathbf{a}, \mathbf{v}]\mathbf{1} = \mathbf{1}[\mathbf{a}, \mathbf{v}]$.

- $[\mathbf{a}, \mathbf{v}]^{-1} = \dfrac{[\mathbf{a}, -\mathbf{v}]}{|||\mathbf{a}, \mathbf{v}|||^2}$, i.e. $[\mathbf{a}, \mathbf{v}][\mathbf{a}, \mathbf{v}]^{-1} = \mathbf{1}$

Con esta álgebra se puede mostrar que un vector $\mathbf{v}$ puede ser rotado alrededor de un eje con la operación $\mathbf{q}\mathbf{v}\mathbf{q}^{-1}$. Lo que hacemos es, abusando del lenguaje, identificar $\mathbf{v}$ con $[0, \mathbf{v}]$. De esta manera, si $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ (unitario), si $\mathbf{q} = [cos(\phi/2),\ sen(\phi/2)\mathbf{u}]$ y si $[0, \mathbf{v}'] = \mathbf{q}\,[0, \mathbf{v}]\,\mathbf{q}^{-1}$, se tiene que $\mathbf{v}'$ es una rotación de $\mathbf{v}$, de ángulo ϕ, alrededor de $\mathbf{u}$.

Con este último resultado podemos determinar una relación entre los ángulos de Euler y una rotación de ángulo ϕ, alrededor de $\mathbf{u}$. Para esto, ponemos las rotaciones correspondientes a los ángulos de Euler en lenguaje de quaterniones e igualamos:

$$[\cos(\phi/2),\ \mathrm{sen}(\phi/2)\mathbf{u}] = [\cos(\alpha/2),\ \mathrm{sen}(\alpha/2)\mathbf{k}]\,[\cos(\theta/2),\ \mathrm{sen}(\theta/2)\mathbf{j}]\,[\cos(\psi/2),\ \mathrm{sen}(\psi/2)\mathbf{k}]$$

luego, desarrollando la multiplicación de la derecha e igualando, se obtiene

$$\begin{aligned}
\cos(\phi/2) &= \cos(\theta/2)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\psi)\\
u_1 &= -(\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}\phi)^{-1}\,\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}\theta\,\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha-\psi)\\
u_2 &= (\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}\phi)^{-1}\,\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}\theta\,\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\psi)\\
u_3 &= (\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}\phi)^{-1}\,\cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha+\psi)
\end{aligned}$$

Esto nos dice que, en general, para hacer animaciones que involucran rotaciones de objetos tridimensionales alrededor de una recta, es mejor usar una implementación matricial (o en términos de quaterniones).

Bibliografía

[1] Adams A; Rogers, D. "Mathematical Elements for Computer Graphics". McGraw-Hill, NY, 1990.

[2] Altmann, S. "Rotations, Quaternions and Double Groups". Clarendon Press, Oxford. 1986.

[3] Noble, B; Daniel, J."Algebra Lineal Aplicada".Prentice-Hall. 1989.

[4] Vince, J "3-D Computer Animation". Addison-Wesley, 1992.

[5] Wolfram, S. "The Mathematica Book". 4th ed. Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999

Conjeturas con Mathematica

Juan F. Avila H.[1]

Resumen

Este trabajo presenta una serie de conjeturas obtenidas a partir de cálculos realizados con el programa de computadora conocido como Mathematica. El interés de este documento no es tanto las conjeturas en sí mismas, sino evidenciar la enorme posibilidad de hacer matemáticas contando con esta poderosa herramienta.

1 Algunos comentarios sobre Mathematica

Desde 1988 Mathematica se convirtió en uno de los mejores (probablemente el mejor) ambiente completamente integrado para realizar computación técnica marcando (sin querer exagerar), un hito en esta área. Si bien es cierto desde los años sesenta se han producido esfuerzos importantes en tareas específicas como análisis numérico, álgebra lineal, graficación, etc, una de las grandes ventajas de Mathematica estriba en la integración de todas estas facilidades, mediante un lenguaje simbólico de fácil manipulación.

Además de las áreas en las que uno esperaría que su impacto fuese relevante (Matemáticas, Ingenierías, Física), Mathematica ha sido un asistente importante en otras disciplinas tales como biología, química, economía. Su capacidad simbólica le permite ser útil en Inteligencia Articial, al poder consignar reglas y manipularlas sin mucha dificultad.

Mathematica ha servido también de plataforma para desarrollo de software educativo en muchos cursos en primaria, secundaria y universidad. La capacidad de crear tutores expertos que exhiban un significativo grado de inteligencia nos muestra (sobre todo a los docentes), la posibilidad de tener apoyo para lidiar con grupos poco homogéneos, en donde algunos estudiantes avanzan muy rápido pero otros no tanto.

2 Conjeturando

En lo que sigue estudiaremos una serie de conjeturas que permiten evidenciar el poder de Mathematica como asistente computacional para hacer matemáticas. Probablemente algunos (sino todos) los resultados que se presentan a continuación son conocidos, sin embargo lo que se intenta no es proclamar nuevos descubrimientos matemáticos, sino más bien ilustrar como los estudiantes, y nosotros mismos, tenemos a la mano una herramienta que se encarga de hacer el "trabajo sucio" dejándonos descubrir (o más bien redescubrir) resultados importantes. Como este es nuestro objetivo, nos abstendremos de adicionar pruebas que demuestren o refuten la validez de los resultados que aquí se consignan.

2.1 Conjetura #1

Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$, considere la matriz cuadrada $A_n[x]$ en donde la entrada uno de la fila uno es x, la entrada 2 de la misma fila es $x+1$ y se continúa incrementando en una

[1]Escuela de Informática, Universidad Nacional

unidad hasta completar todas las entradas de la matriz. Así obtenemos por ejemplo:

$$A_3[x] = \begin{bmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{bmatrix} \quad A_4[x] = \begin{bmatrix} x & x+1 & x+2 & x+3 \\ x+4 & x+5 & x+6 & x+7 \\ x+8 & x+9 & x+10 & x+11 \\ x+12 & x+13 & x+14 & x+15 \end{bmatrix}$$

La conjetura en este caso consiste en que todas las matrices $A_n[x]$ con $n \geq 3$ son singulares, i.e. $\det(A_n[x]) = 0$. De hecho si construimos las matrices $A_n[x]$ incrementando en y unidades ($y \in \mathbb{R}$) en lugar de una unidad, por ejemplo

$$A_3[x,y] = \begin{bmatrix} x & x+y & x+2y \\ x+3y & x+4y & x+5y \\ x+6y & x+7y & x+8y \end{bmatrix}$$

el resultado sigue siendo válido, i.e. $\det(A_n[x,y]) = 0$.. Aún más, si tomamos la k-ésima potencia con $1 \leq k \leq n-2$ en cada entrada de $A_n[x,y]$ la matriz resultante sigue teniendo determinante nulo.

2.2 Conjetura #2

Sea $\mathcal{P}[k]$ el k-ésimo primo, de esta forma $\mathcal{P}[1] = 2$, $\mathcal{P}[2] = 3$, $\mathcal{P}[210] = 1291$, etc. Estudiemos la convergencia de

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathcal{P}[k]}$$

Iniciemos sumando hasta 100000:

$$\sum_{k=1}^{100000} \frac{1}{\mathcal{P}[k]} \approx 2.90615$$

Si la serie fuese convergente, deberíamos tener ya una buena aproximación al valor de la suma. Agreguemos ahora algunos términos extra a la suma para observar si se produce alguna variación significativa. Al calcular

$$\sum_{k=1}^{500000} \frac{1}{\mathcal{P}[k]} \approx 3.02234$$

lo cual es el comportamiento típico de una serie divergente. Conjeturamos entonces que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathcal{P}[k]}$$

es una serie divergente. Dado que la divergencia de una serie deja a veces un sentimiento de frustración analicemos el comportamiento de

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\mathcal{P}[k]}.$$

Iniciemos calculando

$$\sum_{k=1}^{100000} \frac{(-1)^k}{\mathcal{P}[k]}$$

de donde obtenemos -0.269606. Al agregar más términos a la suma obtenemos

$$\sum_{k=1}^{500000} \frac{(-1)^k}{\mathcal{P}[k]} \approx -0.269606$$

¡Bingo! Parece que tenemos un resultado interesante ahora. Aparentemente estamos ante una serie convergente cuya suma es aproximandamete $x = -0.269606$. Pero ¿cuánto vale su suma exacta? Para tratar de averiguar esto podemos intentar formar una ecuación cuya solución sea x y luego intentar resolverla en forma exacta. Jugando un poco llegamos a

$$\sqrt{2} - \frac{1}{(-3-1/x)} - \frac{1}{250} \approx -1.934 \times 10^{-7}$$

de donde podemos pensar que el valor buscado es una solución de

$$-\frac{1}{250} + \sqrt{2} + \frac{x}{3+x} = 0$$

Resolviendo esta ecución llegamos entonces a la siguiente conjetura

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\mathcal{P}[k]} = \frac{62500\sqrt{2} - 375247}{1063991} \approx -0.2696062771$$

Debemos añadir sin embargo que no hay ninguna garantía de que en realidad la serie converja a tal valor.

Dejamos al lector como un reto determinar el radio de convergencia de la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{\mathcal{P}[k]}.$$

2.3 Conjetura # 3

Considere la siguiente función

$$p_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x+k)$$

que Mathematica reconoce como la función $Pochhammer[1+x, n]$. Estudiemos la integral

$$q_n(x) = \int \frac{dx}{p_n(x)}$$

¿Hay alguna fórmula para esta integral?

1. Veamos algunos casos [2] $n = 2$

$$q_2(x) = \int \frac{dx}{p_2(x)} = \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \ln(x+1) - \ln(x+2) + C$$

2. Consideremos ahora el caso $n = 3$

$$q_3(x) = \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{\ln(x+1)}{2} - \ln(x+2) + \frac{\ln(x+3)}{2} + C$$

[2] Para simplificar la notación usamos aquí $\ln x$ en lugar de $\ln|x|$.

3. Veamos ahora el caso $n = 4$

$$q_4(x) = \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

o bien

$$q_4(x) = \frac{\ln(x+1)}{6} - \frac{\ln(x+2)}{2} + \frac{\ln(x+3)}{2} - \frac{\ln(x+4)}{6} + C$$

4. Consideremos ahora el caso $n = 5$

$$q_5(x) = \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$$

o bien

$$q_5(x) = \frac{\ln(x+1)}{24} - \frac{\ln(x+2)}{6} + \frac{\ln(x+3)}{4} - \frac{\ln(x+4)}{6} + \frac{\ln(x+5)}{24} + C$$

5. Hagamos sólo uno más: $n = 9$

$$q_9(x) = \int \frac{dx}{p_9(x)}$$

o bien

$$\begin{aligned} q_9(x) \;\; = \;\; & \frac{\ln(x+1)}{40320} - \frac{\ln(x+2)}{5040} + \frac{\ln(x+3)}{1440} - \frac{\ln(x+4)}{720} + \\ & \frac{\ln(x+5)}{576} - \frac{\ln(x+6)}{720} + \frac{\ln(x+7)}{1440} - \frac{\ln(x+8)}{5040} + \\ & \frac{\ln(x+9)}{40320} + C \end{aligned}$$

Conjeturamos entonces que

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\ln(x+k)}{\alpha_n(k)} + C$$

en donde $\alpha_n(1) = \alpha_n(n) = (n-1)!$, $\alpha_n(2) = \alpha_n(n-1) = (n-2)!$, $\alpha_n(3) = \alpha_n(n-2) = 2(n-3)!$. Dejamos al el reto de clarificar la validez de esta conjetura.

2.4 Conjetura # 4

Sea A_n la matriz cuadrada obtenida al poner los primos consecutivos hasta completar todas las entradas. De esta forma:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \\ 23 & 29 & 31 & 37 \\ 41 & 43 & 47 & 53 \end{bmatrix}$$

En este caso obtenemos que $\det(A_3) = -78$, $\det(A_4) = 880$, $\det(A_5) = -4656$, $\det(A_6) = -14304$, $\det(A_{500}) \approx -9.51 \times 10^{1099}$. Obtenemos así la siguiente conjetura:

$$\lim_{n\to+\infty} |\det(A_n)| = +\infty.$$

¿Qué pasa sin embargo, si empezamos a tomar raíces cuadradas, cúbicas, etc, sobre las entradas de A_n? Designemos con $B_n(k) = \sqrt[k]{A_n}$ la matriz que se obtiene al tomar la raíz k-ésima sobre cada una de las entradas de A_n. Observamos por ejemplo que $\det(B_{100}(4)) = -8.20133 \times 10^{-228}$, y también

$$\det(B_{500}(6)) \approx -1.275382985372737 \times 10^{-1818}$$

Basados en estos cálculos y en otros que no incluimos llegamos a la suposición de que para k entero se cumple:

$$\lim_{n \to +\infty} \det(B_n(k)) = 0, \quad \text{para todo} \quad k > 1.$$

2.5 Conjetura # 5

Consideremos ahora la función zeta de Riemann

$$\xi(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Investiguemos si podemos hallar una fórmula para la suma

$$f_p(n) = \sum_{i=1}^{n} \xi(p \cdot i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p \cdot i}}$$

Si centramos nuestra atención en el caso p = 2, obtenemos $f_2(2) \approx 2.7272$, $f_2(3) \approx 3.7446$, $f_2(4) \approx 3.7446$, $f_2(50) \approx 50.7500$, $f_2(100) \approx 100.7500$, de donde conjeturamos que

$$f_2(n) = \sum_{i=1}^{n} \xi(2i) \approx n + 3/4$$

o bien

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2i}} \approx n + 3/4.$$

Procediendo en forma similar podemos llegar a la siguientes suposiciones.

1. Usando $p = 3$

$$f_3(n) = \sum_{i=1}^{n} \xi(3i) \approx n + 0.2216893951092670$$

2. Usando $p = 3$

$$f_4(n) = \sum_{i=1}^{n} \xi(4i) \approx n + 0.08666297626570941$$

3. Usando $p = 4$

$$f_5(n) = \sum_{i=1}^{n} \xi(5i) \approx n + 0.03795390323440254$$

Dado que la sucesión $\beta_1 = 0.75$, $\beta_2 = 0.2216893951092670$, etc, parece ser decreciente, podemos entonces conjeturar que para p "grande", tenemos

$$f_p(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{pi}} \approx n.$$

Solamente una cosa más. Mathematica es capaz de dar valores exactos para $f_2(n)$, de donde podemos concluir (usando $n = 7$) por ejemplo que

$$\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^4}{90} + \frac{\pi^6}{945} + \frac{\pi^8}{9450} + \frac{\pi^{10}}{93555} + \frac{691\,\pi^{12}}{638512875} + \frac{2\,\pi^{14}}{18243225} \approx 7 + 3/4.$$

En general parece que podríamos plantear este tipo de relaciones para valores pares de p.

2.6 Conjetura # 6

Recordemos ahora la definción de la función gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt,$$

y la definición de la función incompleta de gamma

$$\Gamma(a, z) = \int_z^{+\infty} t^{a-1} e^{-t}\, dt.$$

Tratemos de determinar la convergencia de la serie

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k)}$$

Al calcular su suma parcial obtenemos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(k)} = \frac{e\Gamma(n,1)}{\Gamma(n)},$$

de modo que

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{e\Gamma(n,1)}{\Gamma(n)}.$$

Definamos

$$g(n) = \frac{\Gamma(n,1)}{\Gamma(n)},$$

y tratemos de establecer el límite de esta sucesión. Notamos que $g(1) = 1/3$, $g(5) = 0.9963401532$, $g(20) = 0.9999999999$, y y utilizando otros valores "grandes" de n podemos llegar a suponer que

$$\lim_{n\to\infty} g(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n,1)}{\Gamma(n)} = 1,$$

de donde obtenemos la siguiente conjetura:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k)} = e.$$

2.7 Conjetura # 7

Recordemos ahora la sucesión de Fibonacci dada por la siguiente recurrencia

$$F_1 = F_2 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Es bien conocido que existe una fórmula explícita para esta sucesión dada por

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}, \quad \text{en donde} \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Estudiemos la convergencia de

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{F_k}.$$

Como de costumbre analicemos el comportamiento de su suma parcial

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_k}.$$

Notamos que $S_{100} \approx 3.3598856662$, $S_{1000} = 3.3598856662$, $S_{10000} \approx 3.3598856662$, de donde podemos presumir que la serie es convergente y satisface

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{F_k} \approx 3.3598856662.$$

Tratemos de hallar un valor cerrado para esta serie. Inciamos formando una fracción continua (truncada) con $y = 3.3598856662$ que luego de ser simplificada se convierte en

$$\frac{-709060673101079 + 62810810946448\,y^2}{-2104154319837048 + 186392567236057\,y^2} \approx -1,$$

con lo que podemos conjeturar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{F_k} = \sqrt{\frac{2813214992938127}{249203378182505}}.$$

3 Conclusión

Mathematica nos proporciona un laboratorio en el que podemos poner a prueba nuestros conocimientos y conjeturas. Esta poderosa herramienta se encarga del trabajo tedioso, dejándonos avanzar en las distintas ramas de las matemáticas concentrando nuestra atención en lo que realmente requiere análisis. Se han consignado en este trabajo "resultados originales" obtenidos por el autor, sin embargo de ninguna forma se está asegurando que no hayan sido descubiertos antes.

Bibliografía

[1] Luger, G. F.; W.A. Stubblefield, W. A. *Artificial Intelligence and the design of Expert Systems*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc, USA, 1989.

[2] S. Wolfram, S. *Mathematica*. Third Edition, Cambridge University Press, USA, 1996.

Programando con Derive en un curso de Cálculo Integral

Silvia Calderón[1]
Gabriela Mena, Ronald Rodriguez, Dúbar Villalobos[2]

Resumen

Se presenta una experimentación didáctica en la que se intenta que el estudiante de Cálculo se "apropie" del concepto de integral con el apoyo de la intuición y la visualización, de modo que la necesidad de un mayor rigor en lo aprendido surja de un modo natural al tratar de resolver problemas y hacer generalizaciones. Se hace uso de la computadora, ya que sus capacidades de graficación, de almacenamiento y de velocidad permiten realizar una serie de actividades importantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
Principalmente, en este trabajo, se hace uso del asistente matemático DERIVE . Este es un paquete computacional que se puede aprender en pocas sesiones , que conlleva una programación simple y que permite enfrentar al alumno a una gran cantidad de situaciones de aprendizaje. Se introduce gráficamente el Teorema Fundamental del Cálculo y algunas aplicaciones de la integral definida, utilizando programas funcionales realizados por algunos estudiantes.

1 Introducción

Cuando se inicia a los estudiantes en el estudio del Cálculo Diferencial e Integral de forma abstracta y con rigurosidad matemática, queda esa sensación de que el análisis matemático no alcanza a tener un verdadero significado para la mayoría de ellos, más si no pretenden especializarse en matemática. Los conceptos de *límite* ,*continuidad* y *diferenciabilidad* haciendo uso de los *epsilons*(ϵ) y *deltas*(δ), entre otros, dificultan la comprensión de las ideas fundamentales. Si bien los alumnos manejan los métodos, las definiciones, las reglas y la teoría en general, por cuanto lo aplican correctamente, lo hacen tal vez de modo rutinario o porque saben como utilizar las herramientas matemáticas, reproduciendo más bien, los pasos de memoria, que de forma significativa.

En los últimos años se han realizado trabajos sobre nuevos enfoques en la introducción al Cálculo, que tienen como objetivo resolver el problema de dar significado a los contenidos. Por ejemplo los intentos realizados por matemáticos de la Universidad de Tucumán (Argentina) , del Tecnológico de Estudios Superiores de Escatepec(México),de la Universidad Autónoma del Estado de México(México),del Instituto Politécnico "José A.Echeverría"(Cuba) y la Universidad Nacional de Colombia. Por otro lado el desarrollo vertiginoso de los medios de cómputo y su uso en la enseñanza-aprendizaje demandan una transformación en la enseñanza de la matemática.
Cabe aprovechar el uso de la computadora en las siguientes fases:
• Como medio de enseñanza; para motivar al alumno en el aula (utilizándose software preparado para este fin, como: DERIVE, MATHCAD, MATHEMÁTICA .
•Como herramienta de cálculo (dejando a la computadora el desarrollo de cálculos engorrosos y empleándose el tiempo en otras actividades, como: solución de problemas, desarrollo del pensamiento lógico), etc.
• Como medio para la elaboración individual de trabajos, como: laboratorios, desarrollo de programas funcionales, etc.
• Como medio para conjeturar resultados e investigar.

[1]Escuela de Matemática, ITCR.
[2]Estudiantes de la carrera Enseñanza de la Matemática asistida por computadora. Escuela de Matemática, ITCR.

Además la computadora hace del quehacer matemático una actividad atractiva, interesante y creativa.

2 DERIVE: un asistente matemático

Este artículo presenta algunas de las experiencias realizadas en el curso Cálculo y Análisis 2 , que forma parte del currículo de la carrera Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora , del ITCR , utilizando el asistente matemático DERIVE .
DERIVE es un software computacional que se puede aprender en pocas sesiones , que permite enfrentar al alumno a una gran cantidad de situaciones de aprendizaje y que conlleva una programación funcional simple.En una programación funcional los programas se escriben definiendo funciones que se aplican a argumentos que pueden a su vez ser funciones.

En el curso Cálculo y Análisis 2 el alumno realiza un promedio de 6 laboratorios utilizando ese asistente matemático, y son algunas de esas experiencias las que se presentan.Se han seleccionado 3 laboratorios cuyos formatos,o resúmenes de estos , aparecen a continuación . Se anexan algunos resultados.

3 Laboratorios

3.1 Una introducción al Teorema Fundamental del Cálculo (resumen)

3.1.1 El Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral como procesos inversos.

Existen dos problemas fundamentales en el Cálculola derivada y la integral. Subyacentes a ellos se encuentra el proceso de paso a límite, noción básica en la fundamentación de esta disciplina.La relación mutua entre derivación e integración constituye el llamado Teorema Fundamental del Cálculo.
La idea del laboratorio es introducir el Cálculo Integral recurriendo a los conceptos de cambio y movimiento, a partir de un conocimiento previo del Cálculo Diferencial, y concluir con el Teorema Fundamental del Cálculo
Se realiza en tres etapas en las que se experimenta con métodos gráficos, que son esencialmente cualitativos, la relación entre la función y su derivada, la relación entre la función y su integral a partir de gráficas contiguas, concluyendo con la relación entre la derivada y la integral.

Objetivo

Lograr que el estudiante, experimentando con DERIVE, introduzca geométricamente el Teorema fundamental del Cálculo.

3.1.2 Experiencia #1

El concepto fundamental del Cálculo Diferencial:la razón de cambio

Objetivos:

- Lograr que el alumno determine razones de cambio como una idea fundamental del Cálculo Diferencial.

- Lograr que el alumno capte gráficamente(cualitativamente)la conexión entre una función y la función de sus razones de cambio(su derivada).

Preliminares:

En la vida cotidiana se utilizan conceptos que son ejemplos de razones de cambio, como el concepto físico de velocidad(razón entre una distancia y un tiempo).
Dos aspectos importantes en las funciones cuyas razones de cambio se estudian son el de continuidad y el de pendiente.
No es necesario utilizar el Cálculo Diferencial para determinar razones de cambio de puntos sobre sobre una recta(la razón de cambio entre dos puntos cualesquiera siempre es la misma),mas bien interesa aplicarlo cuando queremos determinar razones de cambio que varían, en una curva representada por una relación no lineal.En este caso conviene utilizar la pendiente de una recta promedio entre dos puntos cercanos de la curva para hacer predicciones confiables de las razones de cambio de esa curva.
Estas razones de cambio se pueden graficar como función de la misma variable independiente.

Desarrollo:

Utilizando DERIVE

- Implemente un comando que le permita calcular razones de cambio para cada dos puntos consecutivos tomados de una curva.Sálvelo en un archivo con un nombre apropiado.
- Cargue el archivo definido anteriormente como utilidad.
  - Represente gráficamente una curva que modele la trayectoria que sigue una bola al ser lanzada hacia arriba.
  - Haga una descripción cualitativa de la trayectoria(Analice cómo son las razones de cambio de la altura alcanzada por la bola con respecto a variaciones pequeñas en el tiempo, el signo alcanzado por las razones de cambio, $\cdots$)
  - Establezca una tabla, de doble entrada,donde aparezcan al menos 10 valores para sus razones de cambio de esa función a lo largo de la trayectoria.
  - Trace una gráfica aproximada de la función determinada por esas razones de cambio, que en este caso corresponde a la función velocidad.

Nota:
La estrategia a seguir para poder establecer una relación cualitativa entre una función(dada en forma de curva) y su función de razones de cambio (su derivada) es calcular sucesivamente las razones de cambio para muchos pares de puntos suficientemente cercanos de la función original.

3.1.3 Experiencia #2

El concepto fundamental del Cálculo Integral: "el resultado acumulado de un proceso de cambio".

Objetivos

- Determinar el resultado acumulado de un proceso de cambio" como una idea fundamental del Cálculo.

- Captar gráficamente (cualitativamente) la conexión entre una función y la función del resultado acumulado de un proceso de cambio "(su integral).

Preliminares

Se pretende,en cierta forma ,reconstruir didácticamente el desarrollo histórico del cálculo Integral,razón por la cual se parte de sumas.Pero si bien la integral definida se introduce como el límite de una suma y se interpreta geométricamente como área, se hace en términos del resultado acumulado de un proceso de cambio.
En general, la suma de los productos de las razones de cambio multiplicadas por la longitud del intervalo , es el resultado acumulado de un proceso de cambio.

Desarrollo

Utilizando DERIVE

- Implemente un comando que determine la acumulación de razones de cambio de acuerdo al tiempo transcurrido, a partir de una tabla de valores de razones de cambio para una curva dada. Sálvelo con un nombre apropiado.

  - Cargue el archivo anterior como utilidad.
  - Grafique en DERIVE una curva que modele la velocidad de una bola cuando es lanzada hacia arriba.
  - Haga una tabla vertical donde aparezcan 10 alturas alcanzadas por la bola.

    Sugerencia:

    Suponga valores constantes de la velocidad en subintervalos pequeños del intervalo dado. La razón de cambio debe corresponder al valor de un punto de la curva en ese subintervalo (proceso de aproximación utilizado por el Cálculo Integral).Como interesa la altura alcanzada , se van sumando sucesivamente las alturas en cada lapso de tiempo ,donde cada altura corresponde al producto de la razón de cambio aproximada (velocidad) por un tiempo.La suma de estos productos nos da la altura alcanzada en un tiempo dado.Esto es el resultado acumulado del proceso de cambio o integral.
  - Grafique los resultados acumulados del proceso de razones de cambio.Utilice la tabla anterior y si es necesario construya otras tablas con valores apropiados.

3.1.4 Experiencias #3

La derivación y la integración como procesos inversos

Objetivo:

Captar gráficamente (cualitativamente) la derivada y la integral como procesos inversos.

Desarrollo

"Use su creatividad"

Sugerencia:

Utilice sus resultados de las experiencias anteriores.

3.1.5 Aproximación de integrales definidas por el metodo del rectángulo y del trapecio

Tema: Aproximación de integrales definidas por el método del rectángulo y del trapecio.

Objetivo: Lograr que el estudiante implemente en DERIVE dos comandos que le permitan aproximar el valor de una integral definida.

Preliminares:

Para aproximar el valor de la integral definida, $\int_a^b f(x)\,dx$ (1) podemos utilizar una partición regular con n subintervalos, lo cual produce n rectangulos de ancho $\frac{b-a}{n}$ y altura $f(x_i)$ (regla del extremo izquierdo) o (regla del extremo izquierdo) ó $f(x_{i+1})$ (regla del extremo derecho).También podríamos pensar en usar en lugar de rectángulos trapecios.

Desarrollo:

- Aproximación con rectángulos.
  1. Implemente en DERIVE comandos que le permitan aproximar el valor de una integral definida utilizando rectángulos, uno que use la "regla del extremo derecho",y el otro la regla del "extremo izquierdo".Sálvelos en un archivo con un nombre adecuado.(Sug.realice pasos similares a los planteados en la II parte del laboratorio).
  2. Cargue el archivo definido anteriormente.Cargue el archivo Riemann.Mth.
- Aproximación de la integral $\int_1^4 \frac{6}{2+x^3}\,dx$. El efecto de n en las sumas de Riemann.
  1. Digite en derive $f(x) := (\frac{6}{2+x^3})$. Grafique
  2. Use RPIC(1, 4, 10) para hacer una representación gráfica de la aproximación con 10 rectángulos usando la regla del extremo derecho.Luego use $n = 30$
     (Presente ambas gráficas).
  3. Use $LPIC(1, 4, 50)$ para hacer una representacón gráfica de la aproximación con 50 rectángulos usando la regla del extremo izquierdo.Grafique.
  4. Use su comando que usa la regla del extremo derecho con $n = 10$ y $n = 30$ para calcular aproximadamente la integral dada.

5. Use su comando con la regla del extremo izquierdo con ¿$n = 50$ y $n = 1000$ para calcular aproximadamente la integral dada.
6. Use DERIVE para obtener el"exacto" de esa integral.Para ello ilumine la función y presione C-I,establezca los límites de integración [Enter]

- **Aproximación utilizando trapecios**

1. Digite en DERIVE $f(x) :=$ para abrir una función.
2. Digite DERIVE $f(a + (\frac{b-a}{n})i) + f(a + (\frac{b-a}{n})(i+1))$
3. Defina en DERIVE la suma dada en (2).de la siguiente forma: $\mathrm{sum}(\#2, i, 0, n-1)$.
4. Defina en DERIVE la regla del trapecio de la siguiente forma: $trup(a,b,n) = \frac{(b-a)}{(2n)}$
5. Salve este comando en un archivo con un nombre adecuado, por ejemplo,TRap.Mth.
6. Cargue el archivo definido anteriormente como una utilidad.
7. Cambie a modo aproximado con 10 dígitos de exactitud.
8. Defina en DERIVE la función $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$
9. Use el comando Trap para generar una tabla vertical a lo sumo 12 valores , que permita aproximar el valor de la siguiente integral definida. $\int_1^3 f(x)dx$.
10. Conjeture un valor para esta integral.
11. ¿Que valor de n se debe usar en el comando trap para que el error de la aproximación sea menor que 10^{-8}? (Use la siguiente fórmula : el error en la aproximación no es mayor que $\text{error} \leq \frac{k(b-a)^3}{12n^2}$ (3) donde k es el máximo de $|f(")(x)|$ en el intervalo $[a,b]$).
12. Si tuviese que calcular aproximadamente una integral definida usando el método del rectángulo o del trapecio, para $n = 50$, ¿cuál usaría?.Justifique.

3.1.6 Aplicaciones de la Integral Definida

Objetivo:

Lograr que el estudiante aplique la integral definida al cálculo de :área entre curvas, longitud de arco y volumen de un sólido de revolución.

Preliminares:

La integral definida tiene varias aplicaciones,por ejemplo:

1. <u>Area entre curvas</u> Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$ y $g(x) \leq f(x)$, para todo $x \in [a,b]$, entonces el área de la región limitada por las gráficas de f ,g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ esta dada por

$$\int_a^b |\ f(x) - g(x)\ |\ dx$$

2. <u>Longitud de arco</u>

   Si la función $y = f(x)$ representa una curva derivable en el intervalo $[a,b]$ la longitud de arco de f entre a y b esta dada por $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$.

3. Volumen de un sólido de revolución

   La integral puede utilizarse para calcular el volumen de un sólido con sección transversal conocida, con

   área de la base: πc^2 Volumen $= \int_a^b \pi c^2\,dx$

   Planos perpendiculares al eje cortan ese sólido en secciones transversales circulares que tienen todas la misma área.El sólido de revolución obtenido es un cilindro.El volumen de este cilindro se define como el producto del área de la sección transversal por la longitud , en el ejemplo es $\pi c^2(b-a)$ y observase que es igual al valor de la integral $\int_a^b \pi c^2\,dx$.

   En general , si f es integrable en $[a,b]$ y consideramos el sólido de revolución obtenido al hacer girar el recinto de ordenadas de f alrededor del eje x, el volumen de este sólido se define por la integral $\int_a^b \pi f'^2(x)\,dx$

   $$\text{Volumen} = \int_a^b \pi f'^2(x)\,dx$$

   Supongamos ahora dos funciones no negativas f y g integrables en un intervalo común $[a,b]$ .Cuando la región entre sus gráficas gira alrededor del eje x engendra un sólido de revolución .El volumen de este sólido esta definido por la integral

   $$\int_a^b \pi(|\,f^2(x) - g^2(x)\,|\,dx$$

   Se introduce el signo de valor absoluto , a fin de que el volumen de la región situada entre los sólidos de revolución se obtenga restando del volumen del sólido mayor el volumen del sólido menor.

   Los sólidos de revolución tienen la propiedad de que cada sección transversal por un plano perpendicular al eje de rotación ,o es un círculo, o una corona (región limitada por las circunferencias concéntricas) (Apostol, Calculus,Vol I, pags 101- 102).

3.1.7 Sobre Área entre curvas

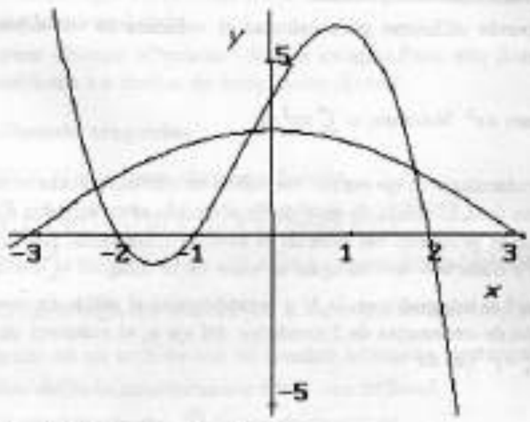
Para la representación gráfica del área entre curvas se creó un programa funcional (titulado AREASCURV.MTH.)

Desarrollo:

1. Cargar como utilidad el archivo AREACURV.MTH.
   Procedimiento: cargado.

2. Definir las funciones $F(x) := 3\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ y $G(x) := -x^3 - x^2 + 4x + 4$.
   Procedimiento: definidas.

3. Graficar las dos funciones en un mismo sistema de coordenadas:



4. Encuentre los puntos de intersección entre las curvas.
   Procedimiento:
   Empleando la sugerencia:
   Cambiamos la precisión:
   Precisión:=Approximate

   Hacemos los cálculos de las intersecciones mediante el comando Solve.
   En el intervalo $[-4,-2]$.
   $$x = \frac{-14698}{6545} = -2.245683728$$
   En el intervalo $[-2,0]$.
   $$x = \frac{-2180}{8923} = -0.244312451$$
   En el intervalo $[0,2]$.
   $$x = \frac{5143}{2808} = 1.831552707$$

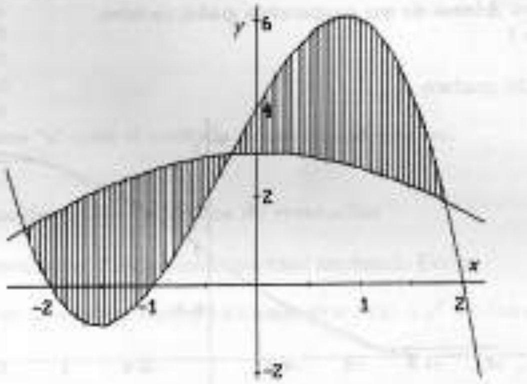
   Cambiamos nuevamente la precisión a Exact.
   Precision:=Exact

   Así los puntos de intersección entre las dos curvas tienen como abscisas:
   $x = -2.245683728$
   $x = -0.244312451$
   $x = 1.831552707$

5. Área calculada mediante la integral.
   Procedimiento:
   $$\int_{-2.247}^{1.833} |F(x) - G(x)|\, dx = \frac{11261}{1311}$$

$$\to \int_{-2.247}^{1.832} |F(x) - G(x)|\, dx = 8.58962624$$

6. Representación del área entre las curvas.
   Área graficada con un total de 80 rectángulos.



3.1.8 Sobre una aplicación gráfica del teorema de longitud de arco

Se hace un estudio del teorema de longitud de arco desde un punto de vista gráfico, mediante un programa hecho en el software matemático DERIVE (se guarda en el archivo LONARC.MTH) . Se apuntan las características de éste

El programa recibe una función $f(x) = y$, y con base en ésta representa mediante una gráfica la longitud de arco en un intervalo $[a, b]$ dado. Además devuelve una aproximación numérica del valor de la longitud de arco de la función $f(x) = y$ en un intervalo $[a, b]$, dado. Cabe mencionar que esta aproximación la hace mediante sumatorias.

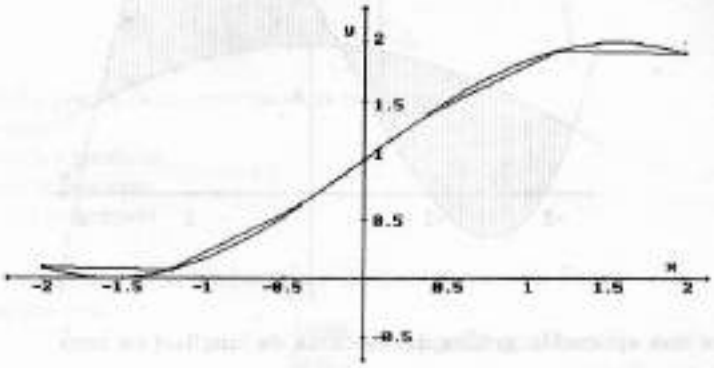
Instrucciones de uso
No hay necesidad de abrir el programa sino, que éste se debe cargar como utilidad de la siguiente manera: Transferir-Leer-Utilidad-LONARC.MTH. Luego define una función $f(x) = y$.
Para ver la representación gráfica de la longitud de arco, se escribe lo siguiente:
LONARC(a,b,n); donde "a" y "b" son los extremos inferior y superior, respectivamente, del intervalo $[a, b]$ y "n" es el número de subintervalos en que se desea dividir $[a, b]$. Luego, presione "Enter" y aparece esta expresión en la pantalla, se aproxima la expresión(con la tecla "x") y esto hace que aparezca una tabla. Por último se grafica esta tabla con Plot (la tecla P) y aparece la representación gráfica de la longitud de arco en el intervalo $[a, b]$, con "n" subintervalos de división.
Para ver la aproximación numérica del valor de la longitud de arco, se escribe lo siguiente:
SUMA(a,b,n); donde "a" y "b" son los extremos inferior y superior, respectivamente, del intervalo $[a, b]$ y "n" es el número de subintervalos en que se desea dividir $[a, b]$. Luego, presione "Enter" y aparece esta expresión en la pantalla, se aproxima la expresión(con la tecla "x") y esto hace que

aparezca un vector con la función y separado con coma(,) el valor numérico (aproximado) de la longitud de arco de la función en el intervalo $[a, b]$, con "n" subintervalos de división.
Nota: Todos los subintervalos tienen la misma medida.

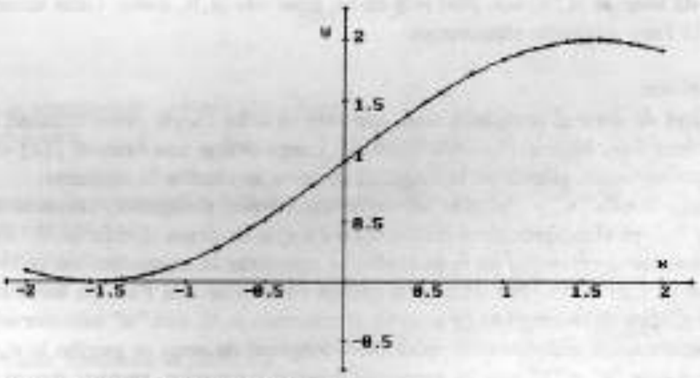
Ejemplos:

A continuación se presentan varios ejemplos, elaborados con la función $f(x) = sen(x) + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$, variando "n" para comparar el valor numérico aproximado de la longitud de arco, que se obtiene del programa, en cada caso, con el valor que da DERIVE, utilizando el teorema de longitud de arco. Además de una comparación gráfica de éstas.
$f(x) = \sin(x) + 1$

LONARC(-2,2,5), produce:



La aproximación hecha por el programa con:
SUMA(-2,2,5)=4.83495 y aplicando el teorema y con DERIVE la longitud de arco es:
$\int_{-2}^{2} \sqrt{1 + \cos^2(x)}dx = 4.70337.$
Por otra parte, variando "n" se obtiene:
LONARC(-2,2,20), produce:



Ahora, la aproximación hecha por el programa :
SUMA(-2,2,20)=4.71394. Como se puede observar cuanto mayor sea el número de subintervalos

sea mayor, los segmentos se van aproximando más a la curva y la aproximación numérica cada vez se aproxima más a la longitud de arco "L" de f en $[a, b]$.
Por ejemplo:
Sabemos que $L = 4.70339$. Ahora haciendo variar "n".
SUMA(-2,2,5) = 4.83495
SUMA(-2,2,10) = 4.74365
SUMA(-2,2,20) = 4.71395
SUMA(-2,2,40) = 4.70604
SUMA(-2,2,50) = 4.70508
SUMA(-2,2,70) = 4.70425
SUMA(-2,2,90) = 4.70390
SUMA(-2,2,100)= 4.70380
SUMA(-2,2,150)= 4.70350
SUMA(-2,2,200)= 4.70348
Como se puede ver conforme "n" crece el resultado se aproxima al valor real.

3.3.3 Sobre representación gráfica de sólidos de revolución

Graficando un sólido de revolución: Programación funcional empleando Derive.

1. Calcular el volumen de un sólido engendrado haciendo girar $F(x) = x^2$ alrededor del intervalo $0 \le x \le 4$.
   Procedimiento:

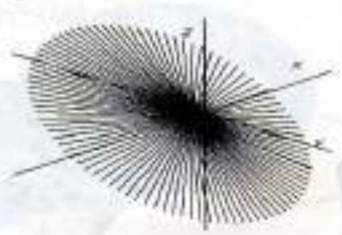
   Definimos la función: $F(x) = IF(0 \le x \le 1, x^2)$.

   Procedemos a averiguar el volumen de dicha función de en el intervalo $[0, 4]$.

$$\int_0^4 \pi \left(x^2\right)^2 dx = 643.398$$

   Dibujar el sólido obtenido de $F(x) = x^2$.

   Sólido engendrado sobre el eje x.



   Sólido engendrado sobre el eje y.

Sólido engendrado sobre el eje z.

Gráfico de una dona tradicional.

2. Encontrar el volumen (aproximado) de una dona.
   Pocedimiento:

   Se considera una dona de radio 4 cm, entonces se definen las funciones $M(x) = \sqrt{1-(x-4)^2} + 4$ y $S(x) = -\sqrt{1-(x-4)^2} + 4$. Cada una de las funciones define la mitad de un círculo de radio 1, trasladados 4 unidades tanto sobre el eje x como en el eje y.
   Se calcula la integral, para averiguar el volumen aproximado de la dona.

$$\int_3^5 \pi \left| M(x)^2 - S(x)^2 \right| dx = 78.9590$$

   Por lo tanto el volumen aproximado de la *"dona tradicional"* es de 78.9590.
   Los límites de integración son de [3, 5] por motivo de que el diámetro de ambos círculos suman 2 unidades.

Otros Sólidos de Revolución:

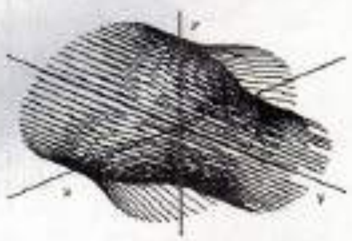
A continuación se presentan varios de los sólidos de revolución que se forman sobre los respectivos ejes (x, y, z) al hacer rotar la respectiva función.

1. Sólido de revolución engendrado sobre el eje Z en [-5, 5], al hacer rotar la función:

$$F(x) = Ln|Cot(x)|$$

2. Sólido de revolución engendrado sobre el eje Y en [3, 5], al hacer rotar la función:

$$F(x) = Ln|Cot(x)|$$



3. Sólido de revolución engendrado sobre el eje Z en [3, 5], al hacer rotar la función:

$$F(x) = Ln|Cot(x)|$$

4. Sólido de revolución engendrado sobre el eje Z en [-5, 5], al hacer rotar la función:

$$F(x) = Ln\left[\frac{x^4+5x}{5-x}\right]$$

5. Sólido de revolución engendrado sobre el eje X en $\left[-\frac{6}{5},\frac{6}{5}\right]$, al hacer rotar la función:

$$F(x) = Sen^3(Sec(x))$$

6. Sólido de revolución engendrado sobre el eje Y en [-5, 5], al hacer rotar la función:

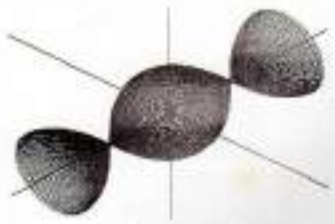
$$F(x) = Ln\left[\frac{x^4+5x}{5-x}\right]$$

7. Sólido de revolución engendrado sobre el eje X en [-2, 2], al hacer rotar la función:

$$F(x) = \sqrt{4-x^2}$$

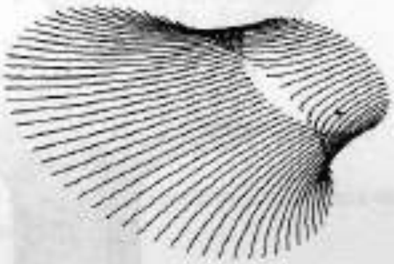
8. Sólido de revolución engendrado sobre el eje X en [-3, 3], al hacer rotar la función:

$$F(x) = Cos(x)$$



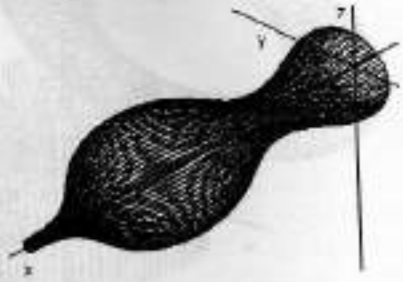
9. Sólido de revolución engendrado sobre el eje en [1, 3], al hacer rotar la función:

$$F(x) = Sec(Ln(x))$$



Sólido de revolución engendrado sobre el eje X en [1, 8], al hacer rotar la función:

$$F(x) = Acot(x^{Sen(x)})$$



Bibliografía

[1] Apostol,T. *Calculus* Vol.1, Second Edition, John Wiley, N.Y. (1970)

[2] Apostol,T. *Análisis Matemático*, Segunda Edición, Editorial Reverté,S.A. . (1977)

[3] Johnson,J.y Evans,B.*Discovering Calculus with DERIVE*, John Wiley & Sons, INC,N.Y.(1995)

[4] Larson Hostetler*Clculo y Geometría Analítica*, Ediciones McGrawHill.(1995)

[5] Mora, Walter. Elementos de Programación (funcional) con DERIVE, Escuela de Matemática. (1998) I.T.C.R.,Cartago.

[6] Wenzelburger, "Introducción de conceptos Fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral". *Educación Matemática*. Vol 5. No 3. (1993)

Parte II

Internet y educación

Internet en la Tele-Educación

Ing. Julio Córdoba Retana*

I. Introducción

Impacto de la Informática en el Desarrollo Social

Las tecnologías de la información, actualmente son elementos fundamentales para la superación y desarrollo de un país. Por eso, los países desarrollados basan su crecimiento en la aplicación y la programación estratégica de las herramientas computacionales y han definido políticas que los inducirán a su permanencia en el dinamismo mundial de los próximos años.

Ante el nuevo entorno económico mundial, los países emergentes están obligados a preparar profesionales en áreas de la informática y las telecomunicaciones, capaces de enfrentar los retos que se tienen hoy en día. Asimismo, la presencia de la informática en los sectores productivos es un factor determinante para su funcionamiento.

Por otra parte, la informática está tan popularizada que es muy difícil que una empresa adquiera una **ventaja competitiva** por tener computadoras más potentes o una red más extensa. Dicha ventaja se logra con un uso más eficiente de la tecnología y, por supuesto, optimizando la gestión del negocio y/o empresa.

El gran salto tecnológico que se proclama con la aparición de la telemática no es, en realidad, mas que una sucesión de pequeños escalones que de ninguna forma son síntoma de una revolución.

> ***La información y el conocimiento tecnológicos crecen a un ritmo del orden del 13% anual, lo que quiere decir que se duplica aproximadamente cada 6 años.***

El progreso es una actividad de la mente humana, muy raras veces marcada por revoluciones científicas.
Sin embargo, el desarrollo de las tecnologías de la información y las telecomunicaciones (TIC) puede estar preparando una de estas revoluciones, que intentará abordar uno de los retos más importantes de la sociedad actual.

Bien se trate o no de una revolución, la microelectrónica ha sido la causa de una micro-revolución en la forma de vincular la información, lo que se conoce como **convergencia de los estilos de comunicación.** Esta convergencia se deriva del hecho de que un medio físico único **(ej. Fibra óptica)**, puede servir de vehículo a servicios que, en el pasado, se suministraban a través de medios diferentes.

La convergencia entre estilos de comunicaciones, históricamente diferenciados, ha sido provocada por la electrónica y la digitalización de los mensajes. Los sonidos y las imágenes pueden ser clasificados y transmitidos como impulsos digitales.

Las computadoras pueden manejar estas grandes masas de señales digitales que representan texto, voz o imágenes, con mucho más flexibilidad que en soporte de papel. Estas señales se pueden almacenar en memorias, convertir de formato y transmitir instantáneamente por una red informática.

---

* Europa Management Consulting.

Para concluir, un dato importante menciona que el índice de imperativos de la información, se estructura a partir de veinte variables que se sintetizan en un **indicador**, el progreso de los países hacia una economía adecuada a la nueva ola impulsada por la tecnología informática.

Las veinte variables se dividen en tres categorías **de infraestructuras críticas, de comunicaciones y de computación.** En definitiva, la tecnología informática define e impulsa la nueva era, rediseña el marco que se utiliza para describir la realidad. Todos los problemas importantes del hombre se pueden convertir en problemas informáticos. Todo está interconectado, es complejo e interdependiente; la efectividad de los sistemas descansa en la seguridad y protección de la comunicación.

Antecedentes de la Red Internet

El origen de Internet se sitúa en la década de los años 60, como una estrategia del Departamento de Defensa de los Estados Unidos, encaminada a proveer un medio de comunicación eficiente, que soportara fallas parciales de llegarse a presentar eventuales bombardeos en su territorio. Fue creada por la **Agencia de Proyectos de Investigación Avanzada** (ARPA – Advanced Research Project Agency) y en su constante evolución se encuentran los siguientes hitos:

- **1969:** Se crea ARPAnet, el primer nombre de la red Internet.
- **1970:** Se interconectan las principales universidades y centros de investigación científica de EE.UU.
- **1982:** El Reino Unido se conecta a Internet sirviendo como puerta de acceso a los países europeos y marcando el comienzo de la globalización de la red.
- *1986: Japón se conecta y la administración del segmento no militar de la red se transfirió a NSFnet* (National Science Foundation Network), quien mejoró la velocidad de la conexión.
- **1987:** La vieja red es mejorada con líneas telefónicas de mayor velocidad y con equipos más poderosos por medio de grandes empresas como IBM y MCI.
- **1992:** Un millón de equipos conectados a Internet y el advenimiento de nuevos servicios
- **1994:** La masificación de los módem de alta velocidad, y la aparición de grandes y pequeños proveedores de acceso, potenciaron la irrupción del mundo comercial en Internet a través de la publicidad y el comercio electrónico.
- 1996: Más de 6 millones de equipos y más de 80 millones de usuarios conectados en todo el mundo.
- 1999: Internet alcanza a 120 países en todo el mundo. **(Internet 2)**
- **2000:** El crecimiento de la red es constante y exponencial, y se estima que Internet transportará tantos datos como lo hacen las redes de voz de la actualidad, por lo que podría superar los 300 millones de usuarios

A esta red siempre se le ha conocido como la red de redes, es decir, *es el primer medio global que a través de la interconexión de miles de redes informáticas en todo el mundo, nos permite comunicación dialógica, con capacidad de obtener y publicar información de la manera más sencilla y económica disponible a millones de usuarios individuales y corporativos siendo así un poderoso instrumento para establecer contactos comerciales y hacer negocios en el ámbito mundial sin que la distancia geográfica influya en los costos.*

Dentro de las miles de características de la red existen algunas más sobresalientes: **no tiene dueño, no hay un responsable de que Internet funcione, no existen leyes en la red y lo más importante no impone barreras de edad, raza, sexo, condición social o política.**

Es importante tener en cuenta esas características teniendo en cuenta la cantidad de servicios que ofrece: correo electrónico, foros de debate o grupos de noticias, conferencias electrónicas(chat), sesiones remotas(telnet), transferencia de archivos(ftp), dirección de información(Gopher) y la World Wide Web(WWW).

II. Tele-Educación

II.1 Definiciones, Escenarios y Tecnologías

La Tele–Educación tiene como objetivo proporcionar **nuevas formas de aprendizaje**, que enriquezcan los conocimientos de los estudiantes a través de una interface multimedia, sin restricciones de espacio y tiempo.

> ***Tele–Educación:*** ***Integración de las TIC en el ámbito educativo con objeto de desarrollar cursos y otras actividades educativas sin que todos los participantes tengan que estar simultáneamente en el mismo lugar.***

La mayoría de los conceptos técnicos a desarrollar sobre la tele-educación son independientes del colectivo profesional que se eduque, forme o entrene por este medio.

Es frecuente considerar los aspectos tecnológicos como los más importantes, y en ocasiones los únicos, que se deben de tener en cuenta. Nunca está de más recordar que las tecnologías no son más que una herramienta que, utilizada convenientemente, puede ayudar a mejorar el proceso educativo.

Esta mejora, sin embargo, puede y debe medirse desde muy distintos ángulos. No basta, por ejemplo, considerar solamente las situaciones en que la introducción de las tecnologías mejora la calidad de la enseñanza porque al posibilitar nuevas vías de comunicación entre profesores y alumnos enriquece el proceso de aprendizaje establecido, hay que considerar también la posibilidad de la Tele – Educación para **ampliar en muchos casos el acceso a la oferta educativa** a sectores de la población que por barreras geográficas, por discapacidades o por estar trabajando no tienen fácil acceso a la oferta presencial habitual.

Aprendizaje abierto y flexible a distancia: en este contexto la característica de **abierto** tiene como finalidad garantizar el acceso a este tipo de enseñanza al mayor número de usuarios sin restricciones derivadas de la ubicación geográfica, el nivel de formación tecnológico, la disponibilidad de tiempo, el estatus social o la discapacidad física.

La flexibilidad se refiere al control por parte de quien recibe los cursos sobre el lugar y momento en que se da el proceso de aprendizaje. A este concepto se han añadido algunas variaciones como: **Formación Multimedia, Teleformación, Telemática Educativa, Tele – Enseñanza,** entre otros.

Escenarios

A grandes rasgos se pueden diferenciar **tres escenarios fundamentales** para desarrollar la Tele – Educación en general:

- **Educación a Distancia**
- **Tele - presencia.**
- **Sistemas que mejoran la enseñanza presencial tradicional.**

Además existen **tres niveles de aplicación** en función del grado de innovación que se pretenda:

- **Desarrollo de sistemas y herramientas.**
- **Experiencias piloto con carácter demostrativo.**
- **Implementación de Servicios.**

Ante estos niveles es fundamental garantizar una coherencia entre los objetivos que se persiguen y las tecnologías aplicadas. En este sentido se destaca que no se puede pretender, sin estar abocado al fracaso, implementar servicios operativos con tecnologías poco probadas en el ámbito educativo y sin haber realizado las experiencias piloto pertinentes.

Desde el punto de vista de los escenarios educativos de aplicación, en la práctica se demuestra que el proceso de integración se inicia normalmente por las instituciones educativas actualmente existentes y que, salvo excepciones, desarrollan su oferta con uno de los dos paradigmas hasta ahora imperantes: **Formación presencial en el aula o Educación a distancia tradicional.**

A pesar del aparente carácter revolucionario de las nuevas tecnologías, los cambios en la cultura de la organización que su uso implica se producen muy lentamente y por tanto es inevitable que cada tipo de institución adopte las tecnologías que mejor se adapten a su forma habitual de enseñanza introduciendo los cambios lo más progresivamente posible.

Así, las instituciones educativas de carácter presencial suelen iniciarse en el ámbito de la Tele – Educación con sistemas que les permitan transmitir las clases que actualmente se imparten a colectivos de alumnos dispersos geográficamente. Asimismo, es de especial interés reflexionar sobre algunos de los criterios que se deben tener en cuenta a la hora de seleccionar las tecnologías para soporte de un curso o actividad:

- **Uso educativo.**
- **Disponibilidad.**
- **Coste Económico.**

Tecnologías Disponibles

Hoy en día no es fácil tratar de clasificar las tecnologías. Las técnicas de digitalización permiten que cualquier señal o información pueda transmitirse, procesarse y almacenarse en forma digital, lo que está difuminando la separación entre servicios y empresas tradicionalmente vinculados a las tecnologías digitales y los dedicados a la transmisión de señales analógicas, teniendo presente la mejor aceptación en el futuro de la transmisión de señales digitales.

Al hablar de tecnologías emergentes se puede hablar desde *el teléfono, la línea telefónica, Internet, Videoconferencia, correo electrónico, conferencia electrónica, la televisión, la distribución de cursos por satélite, la videoconferencia interactiva mediante RDSI (Red Digital de Servicios Integrados), la Enseñanza Asistida por Computadora (EAC) mediante los actuales CD-ROM Multimedia*, entre una infinidad de tecnologías de punta que se combinan para cumplir los objetivos de la institución o empresa.

Una de las tecnologías más usadas para esta función, ha sido el **satélite**. Este permite transmitir la clase a un número elevado de aulas dispersas en un ámbito geográfico extenso. Normalmente los alumnos remotos interactúan con el profesor durante la clase por vía telefónica o por correo electrónico en cualquier momento.

Recientemente, la **videoconferencia** está irrumpiendo con fuerza en algunos de estos escenarios en que el número de aulas no es excesiva y a cambio permite que el profesor vea a los alumnos remotos durante la clase.

Por otra parte, las instituciones que tradicionalmente impartían educación a distancia basada en el envío de textos por correo y la realización de consultas al profesor por teléfono tienden a incorporar sistemas de comunicación asincrónica que permiten, cuando menos, reducir el tradicional aislamiento del alumno a distancia.

En este sentido los sistemas de mensajería electrónica, tanto individual como de grupo, han demostrado una gran eficacia para incrementar la interacción entre profesores y alumnos, redundando en una clara mejora de la calidad del proceso formativo. Así mismo, la extensión de Internet esta facilitando el envio de documentación a los alumnos y el intercambio de ejercicios y pruebas de evaluación.

Con esto, la Tele-educación está favoreciendo la aparición de **nuevos paradigmas educativos mixtos**, en los que ya no es crítico si el alumno puede asistir presencialmente a la clase o no, y en que los que la elección entre sistemas de enseñanza en clase o de autoestudio depende más que antes de los objetivos pedagógicos propiamente dichos.

Hoy día la experiencia indica que los sistemas más significativos en las aplicaciones de la Tele – Educación, con pretensión de servicio, están apoyados fundamentalmente en tres tecnologías: **Satélite, Videoconferencia sobre RDSI e Internet**, siendo esta última tecnología el nicho de estudio de esta ponencia.

Internet

Como se ha mencionado, Internet tuvo su origen como una red para interconectar investigadores con centros de computación remotos permitiéndoles compartir recursos de cálculo y herramientas informáticas de extraordinaria capacidad.

Progresivamente fueron accediendo investigadores universitarios y aparecieron otras redes, aunque no eran parte de Internet empezaron a conectarse. Más adelante la NSF comenzó a integrar a todas las redes de computadoras institucionales que utilizasen para su intercomunicación el mismo "lenguaje" o por decirlo en términos técnicos más correctos el mismo protocolo de comunicación. El protocolo usado se denomina **TCP/IP (Transmision Control Protocol / Internet Protocol)**.

Toda red que utilizara TCP/IP podría integrarse en la nueva red que, de esa forma, ha ido creciendo progresivamente integrando una infinidad de instituciones, a modo de una auténtica tela de araña, hasta formar la red Internet que realmente constituye hoy día, una red de redes que interconecta millones de computadoras en todo el mundo. Internet ofrece fundamentalmente tres grandes utilidades a todos sus usuarios que pueden ser de gran importancia en una actividad educativa:

- **Correo Electrónico**
- **Web.**
- **Aplicación Educativa**

Aplicación Educativa

En el marco tecnológico esbozado aparecen fundamentalmente tres diferentes aplicaciones a considerar: **uso del correo electrónico, uso de sistemas de conferencia electrónica y empleo de Web**, para acceder a información en otras computadoras remotas.

Un docente puede:

- **Utilizar el correo electrónico.**
- **Crear un espacio común.**
- **Desarrollar páginas Web para el curso, entre otras.**

Todas las funcionalidades descritas pueden integrarse en un único entorno de trabajo que facilite al estudiante su labor. Progresivamente va aumentando el número de programas desarrollados para esta función. Si se pretende suministrar al estudiante información de importancia sobre el tema motivo del curso es indudable que Internet se configura como el instrumento más útil y poderoso para este fin.

Internet está cambiando el viejo esquema de la educación magistral, olvidándose del paradigma del profesor omnisciente (magister dixit) el que priva, sino que, ahora la participación de los alumnos es mucho más activa e interactiva.

En las páginas Web del curso, el profesor puede crear enlaces a otras informaciones que se han mencionado en clase, enlaces a bibliotecas, crear cuestionarios que el alumno puede cumplimentar y enviar al profesor.

Sin embargo, conviene tener en cuenta que el tiempo de preparar los documentos viene a ser prácticamente el doble que para las clases presenciales por la tendencia natural a mejorar la documentación cuando la presentación es **"on line"**. Así mismo, hay que prever que el volumen de correo electrónico que tiene que ser procesado puede llegar a ser bastante considerable.

El uso de Internet para establecer la comunicación profesor – alumno, e incluso entre los propios alumnos, al requerir el lenguaje escrito está produciendo algunos beneficios significativos como puede ser evitar el grado improvisación en las preguntas que se plantean en clases presenciales y, por otra parte, está favoreciendo la incorporación de colectivos que tradicionalmente no han estado integrados en la dinámica de las clases, como pueden ser las mujeres, las minorías raciales y las personas con discapacidades. En estos casos Internet facilita la participación activa. El avance en las investigaciones y desarrollos en torno al uso de Internet hace prever que, en el futuro, cualquier opción de enseñanza apoyada en las telecomunicaciones utilizará Internet como herramienta básica, desde instrumento de intercomunicación escrita con el simple correo electrónico a canal de transmisión de videoconferencia.

II.2 Problemática, Beneficios y Estrategias

El cambio conlleva desafíos (incluyendo posibilidades antes no previstas) y una serie de problemas también. Sin embargo, éstos no debieran siempre ser considerados como negativos, ya que también podrían ser vistos como **oportunidades transformadas.** Mientras se encuentran dificultades en nuestras situaciones y estrategias, aparecen nuevas ideas. En consecuencia, trataré ahora tres áreas problemáticas: **"la economía, lo cultural y lo humano"**.

El **área económica** se manifiesta de dos formas, el más obvio es el verdadero costo de la revolución tecnológica en sí. Mientras no existe duda que la educación mediada por la tecnología ahorra el costo de las facilidades convencionales (una inversión de capital corporativo prácticamente impensable, por lo menos en el presente y en un futuro cercano) tampoco es un regalo milagroso.

Otra área donde reside el problema económico es el efecto social del presente desarrollo económico. La tecnología como es presentada hoy día, aumenta la disparidad económica, separación de clases y el distanciamiento social en lugar de integración.

El segundo problema, íntimamente relacionado, es el **área cultural**. Se sabe desde hace mucho tiempo que los cambios tecnológicos tienden a crear su propia cultura. Uno de los cuestionamientos que surgen en este contexto es particularmente crucial.

La educación es esencialmente dirigida por contenido cultural y la necesidad social. La cultura puede ser vista como el efecto acumulativo de la experiencia humana, dentro de una forma y contenido que varía con esa experiencia. Además la varianza puede ser vista como productiva, enriqueciendo la sustancia de la humanidad como tal, algo que quizá se aprecia solo cuando es amenazada con la extinción, en gran parte como una función de la tecnología en sí.

La pregunta es si se puede contar con una cultura planetaria fomentada por una universidad del mundo que no sea una **monocultura**: el principio normativo de ésta es la codicia, y su resultado el poder en manos de pocos.

Se atestigua una paradoja curiosa, o escalofriante. Por un lado, nuevas formas de conflictos viciosos. Mientras regiones atacan las debilitadas estructuras de poder que una vez controlaba, por otro lado, existe una nueva expansión transnacional que controla el poder: las corporaciones globales cada vez más integradas y su instrumentalización financiera.

Estas agencias consideran que las diferencias culturales reprimen a las ambiciosas reformas necesarias que desean ingeniar y aceptar, que la educación mediada por la tecnología es el instrumento preferido para lograr sus fines. Efectivamente, la Tele – Educación puede estar creando su propia cultura, aunque se le preste poca atención y en consecuencia se conozca poco al respecto.

El tercer problema es la **humanidad en sí**. Por lo visto, la única razón para cualquier actividad humana "para la política, el comercio y hasta la educación" es la mejora de la condición humana (social, económica y cultural) para que la promesa de las personas puedan ser cumplidas con mayor frecuencia.

Los educadores a distancia se enfrentan a una importante pregunta: ¿Se puede controlar o formar una cultura tal que profundice en lugar de trivializar, la experiencia humana, para que libere sin explotar, para que unifique las diferencias sin homogeneizar la experiencia? ¿De qué se beneficia el triunfo de la educación a distancia o mediada por la tecnología si el precio para ello es la desaparición de la humanidad de muchos para el beneficio de unos pocos?

La concientización del significado y el potencial cataclismo de los cambios, pueden llevar a una visión en dos sentidos. **Primero**, ver lo que está sucediendo. Por supuesto esta visión debe incluir las perspectivas internas y no solo ser leída desde diagramas abstractos y ecuaciones de especialistas arrogantes cuyas categorías filtrantes no pueden escuchar o ver a las personas cuyas vidas son el laboratorio de sus grandes experimentos. Luego, la **segunda** forma, una perspectiva *"de"*, debe prevenir de una perspectiva *"desde"*. Lo que podría ser, debe surgir desde una clara percepción de lo que nos está sucediendo a todos, de otro modo sería un mero utopismo alucinógeno. Pero eso requiere de acción además de visión y el primer componente de esta acción es, por necesidad, un proceso de planificación que sea participativo y colaborativo, y que involucre a las áreas problemáticas a todo nivel, no solo el técnico.

Beneficios

Esta nueva cultura, tal como se ha concebido hasta ahora, surge de manera emergente basada en los notables desarrollos alcanzados en la transmisión de la información vehiculizada a través de extensas y sofisticadas redes de transmisión de datos. Y es también el ejemplo más destacado del aprovechamiento positivo, en términos del beneficio social de la tecnología disponible.

En la teoría, el planteo del tema parece tener alcances ilimitados, sin embargo se debe de bajar a tierra y analizar las dificultades de su implantación, que pueden ser superadas si se establecen políticas claras por parte de los gobiernos en lo que se refiere a los niveles de la educación formal e informal, pública o privada, en la elaboración de programas y estrategias para su implementación, así como en la conducción de la educación permanente.

Esta situación debe convivir y ser plenamente coherente con un desarrollo tecnológico fruto de las evaluaciones de inversores privados y no de los gobiernos. Sin alterar entonces la asignación eficiente de recursos por parte de los inversores privados, parece haber llegado finalmente el momento en que los gobiernos impulsen políticas claras y tomen acciones que tiendan al mejor aprovechamiento de las tecnologias.

En lo que refiere a la capacitación en el ámbito informal, una sea para la actualización o para la preparación y la reconversión de los trabajadores, obreros o administrativos, estos se canalizan según las necesidades propias de los sectores empresariales que deben enfrentar el mundo del trabajo productivo altamente competitivo, resultando de la globalización de la economía.
Para los países de América Latina las posibilidades de un creciente y correcto desarrollo de la Tele – Educación, podrían significar un importantísimo aporte, fomentando la igualdad de oportunidades educativas, acercando las pequeñas localidades a la información y al crecimiento que imparten calificados centros educativos o de profesores de alto nivel, que difícilmente se encuentran en ciudades pequeñas o localidades rurales, facilitando la capacitación para la reconversión laboral.

La sociedad de los países latinoamericanos enfrenta problemas educacionales como la masificación del estudiantado y la deserción infantil, debido a la falta de una relación entre lo que se estudia y el mundo real, a los bajos salarios de los docentes, a la escasez de profesores, al bajo presupuesto para la educación, que dificulta la construcción y mantenimiento de edificios escolares, y al aislamiento de algunos centros educativos entre otros.

La Tele – Educación puede no necesitar en forma imprescindible, por lo menos en algunas de sus formas, de colegios, universidades ni centros de capacitación, sino que puede vehiculizarse a través de fuentes de información como grandes bibliotecas, museos, bancos de datos, centros de I+D, laboratorios, etc.

En EEUU, pionera en la materia, ocupa apenas una pequeña porción del mercado de la enseñanza global, ya sea en los distintos niveles del sistema formal e informal de educación, como en la capacitación en los mismos niveles de enseñanza. No obstante, la Tele – Educación es considerada como una industria creciente y como tal se ha convertido en un objetivo de los proveedores de tecnología en telecomunicaciones.

Cuando se evalúa la implantación de un programa de este tipo, se encuentran algunos escollos de tipo ideológico, tales como **la resistencia rural** y entendible que parte de los sectores que agrupan gremialmente a los profesores una cierta **tecnofobia** y una **resistencia al cambio** en la estrategia educativa del sistema.

Sin embargo, en el desarrollo de este nuevo concepto de educación convergen distintos grupos de interés, que deben ser considerados en los análisis de mercado que conducen a la determinación del uso de las telecomunicaciones:

- Los centros que proveen educación formal e informal.
- Los destinatarios de los distintos niveles educativos.
- Los institutos nacionales de infraestructura de la información.
- Los proveedores de diferentes aplicaciones para la difusión de la información adecuada a la Tele – Educación.
- Los proveedores de servicio de redes de acceso local.
- Los proveedores de servicios de datos, Internet y de servicio de valor agregado.
- La red Internet.

"De la integración y el entendimiento entre estos distintos grupos dependerá el futuro de la Tele – Educación. "

Estrategias

Los profesores deberán **reciclarse** para conocer y saber utilizar las nuevas tecnologías, con el fin de poder transmitírselo a sus alumnos. Dada esta situación se dan los siguientes puntos estratégicos:

- Romper con la estructura de educación tradicional y crear una nueva cultura computacional y de investigación.
- Enriquecer la labor de los profesores a través de cátedras.
- Desarrollar un pensamiento constructivo, intuitivo, creativo, crítico y con actitudes de tolerancia, solidaridad, compromiso y responsabilidad.
- Promover la globalización de la educación a través del acceso electrónico a información y expertos, sin límites geográficos o temporales.

El desarrollo de estas nuevas tecnologías facilitan el camino hacia un modelo de aprendizaje diferente. El futuro en la educación pasa no por transmitir al alumno un contenido específico, sino por enseñarle a aprender, es decir, instruirles en las técnicas de autoaprendizaje y la autoformación que, junto con la tecnología multimedial (audiovisual), permiten un aprendizaje muy completo.

III. Aplicaciones de la Tele-educación

III.1 Educación Primaria

El notable impacto del Internet ha alcanzado, como era de suponer, a la Educación Básica, generando un impacto aún más fuerte, debido a que esta educación es la primera que a nivel formal recibe el ser humano, y por lo cual serán las bases para las futuras generaciones.

Es importante tener en cuenta **"la actitud"**, tanto del personal directivo, como del docente frente a las nuevas TIC. Muchos docentes toman a Internet como una biblioteca gigantesca solamente, sin tener en cuenta la posibilidad de contar con aulas interconectadas, tratando de aprovechar la **"Comunicación Mediada por Computadora" (CMC) o el "Aprendizaje Asistido por Computadora" (CAL), para lo cual se puede utilizar los "Sistemas de Aprendizaje Interactivos" (SAMI).**

Muchos docentes **no tienen el conocimiento** sobre los servicios que presta Internet y las herramientas con que cuenta para lograrlo. Algunos de estos servicios son: interconexión educativa, equipos virtuales de trabajo e investigación, mensajería electrónica, teleconferencia, toma de decisiones distribuida, trabajo cooperativo, sistemas de soporte de grupo, instrucción asistida por computadora, entre otros, que se pueden llevar a cabo mediante los recursos o herramientas al inicio mencionadas **(WWW, Gopher, E-Mail, Chat, Telnet, etc.)**

Y por supuesto las necesidades académicas y requerimientos personales del alumnado, según edad, sexo, interés socio-emocionales, creencias y sistemas de valores.

Un ejemplo de todo esto es el **proyecto GATES**, aprobado por la Comunidad Europea, que consiste en el desarrollo de un **SIG(Sistema de Información Geográfica)**, para la elaboración de toda clase de estadísticas en el ámbito regional, nacional y comunitario. A partir de herramientas de hipertexto y multimedia y con un CD-ROM o con un acceso a Internet a las futuras paginas del SIG, tanto profesores como alumnos, podrán obtener con mayor facilidad, la información necesaria, para complementar el estudio de la geografía, partiendo de mapas, a través de un potente motor de elaboración basado en un **sistema experto**.

III.2 Educación Secundaria

Igualmente que en el punto anterior, la Educación Secundaria enfrenta actualmente una serie de retos para mejorar y modernizar el sistema de enseñanza y aprendizaje, teniendo en cuenta que la capacidad del alumno es superior que la de un niño de edad escolar.

Tomando en cuenta esa ventaja se encuentran en Internet sitios en los cuales la información que presenta está relacionada con algún tópico especial de los distintos grados de la Educación Secundaria.

Dentro de ellos podemos encontrar el **NetTeacher**, un sitio en donde se proporcionan cursos básicos para concluir el bachillerato y la preparación adecuada para el ingreso a la universidad.

También el **"NetMaster Teaching Through Internet"**, el cual es una iniciativa privada dedicada a la enseñanza y el aprendizaje de idiomas a través de la red.

Y por último, los grandes sitios con contenidos temáticos, tales como: **"The Internet Mathematics Library"**, en donde se encuentran listados enormes de tópicos relacionados en la Enseñanza y Aprendizaje de la matemática, ejercicios resueltos, prácticas, entre otros.

III.2 Educación Universitaria

A este grado el avance de la Tele – Educación toma un auge mayor, debido a la cantidad de proyectos que se están realizando en todo el mundo. Estados Unidos marca el horizonte de las próximas tendencias, no sólo por el desarrollo tecnológico característico del país norteamericano, sino también por el hecho de que su sociedad ha incorporado desde sus orígenes los avances técnicos a su concepto de cultura.

Teniendo en cuenta que el gobierno norteamericano – nada menos que desde la propia Casa Blanca – ha tomado la decisión de potenciar la educación a través de las más recientes tecnologías y todo indica que se trata de una decisión operativa. Dentro de las muchas universidades norteamericanas que están llevando a cabo proyectos en esta área se encuentran:

- **National Technological University** (NTU - Colorado)
- **Universidad de Stanford** (Stanford - California)
- **Universidad de Phoenix** (Phoenix - Arizona)
- **Universidad de Wisconsin** (Madison - Wisconsin)
- **Universidad de Indiana** (Bloomington - Indiana)
- **Massachusetts Institute of Technology** (MIT - Massachusett)
- **Carnegie Mellon University**
- **Universidad de Texas** (Austin - Texas)
- **Georgia Institute of Technology** (Georgia - Atlanta)
- **Columbia University** (Columbia – New York)

Comparando el avance norteamericano contra el latinoamericano, hay que reconocer el gran retroceso tecnológico. Sin embargo, se puede recopilar el excepcional ejemplo del **Instituto Tecnológico de Monterrey** (ITESM), cuya Universidad Virtual se sitúa indiscutiblemente a la cabeza de las experiencias en lengua española.

Esta universidad ofrece 200 horas de cursos a la semana que se reciben vía satélite en los 26 campus que tiene repartidos por todo México. Recientemente están introduciendo el uso de Internet y vídeo conferencia.

Muy por detrás del ejemplo norteamericano se sitúa el caso europeo. A su tradicional problema de multiplicidad de idiomas y de fragmentación de mercados que frena con frecuencia muchas iniciativas, se suma tradicionalmente la falta de una orientación de aquellas iniciativas que se ponen en marcha, hacia la creación de servicios.

Ello hace que predomine la tendencia a investigar y tratar de desarrollar nuevos sistemas y herramientas, con el habitual resultado de quedarse en un nivel fundamentalmente experimental, lejos de los que realmente significa atender a una demanda social. Existen tres casos específicos que resaltan en la comunidad:

- **Open University (Reino Unido)**
- **Universite College Dublin (UCD - Irlanda)**
- **Centro de Estudios de Postgrado de Administración de Empresas (CEPADE – UPM - España)**

IV. Conclusiones y Recomendaciones

El aprendizaje experimental y el pensamiento crítico son elementos fundamentales para educar, así como también es tener métodos de hallar y seleccionar la información necesaria a través de diferentes fuentes de conocimientos. Con el paso del tiempo es cada vez mayor el avance tecnológico, y no debe quedar atrás el aspecto educativo que debe ser utilizado, para crear nuevas formas de aprendizaje que no sean sometidas al espacio y el tiempo.

La **universidad virtual**, es un proyecto con un nuevo paradigma de enseñanza – aprendizaje. Este sistema de educación basado en el **aprendizaje vitalicio y en la interacción ciberespacial**, en donde el estudiante asume la necesidad de aprendizaje, es un nuevo programa institucional que promueve la globalización del proceso de la enseñanza.

La Tele–Educación tiene la gran responsabilidad de generar cambios, a través de la integración de la tecnología al proceso educativo, con el firme propósito de promover la formación de estudiantes más creativos e independientes, crear una cultura tecnológica e incorporar la actividad científica y docentes al desarrollo tecnológico. Para lanzar un proyecto de Tele–Educación es necesario analizar cuidadosamente la información reunida y seguir dos direcciones. La primera es definir, o entrar decididamente en una **fase experimental**, con el objeto de desarrollar un conjunto de experiencias piloto correspondientes a casos reales de cursos, y la segunda dirección sería **desarrollar una serie de acciones** para crear las condiciones favorables de **promoción y difusión** de la Tele–Educación.

En la primera dirección es importante asumir el papel de líder en el desarrollo de la Tele – Educación implicando progresivamente a las autoridades educativas. Dada la proyección social de estas aplicaciones, no solo en el ámbito universitario, es indispensable contar con este apoyo para las etapas siguientes y sería un avance decisivo que el gobierno apoyase las telecomunicaciones educativas. En esta fase no se considera conveniente un alarde de avances tecnológicos que puedan complicar su desarrollo y producir reacciones negativas en los profesores. Una vez seleccionados los cursos con los cuales se va a experimentar, hay que proceder a diseñar las medidas para atender las necesidades de los profesores y alumnos, así como definir la infraestructura y los apoyos necesarios desde el punto de vista institucional.

Continuando el proceso, es importante incluir acciones informativas para dar a conocer las posibilidades de las TIC en las distintas actividades realizadas, así como identificar las necesidades de los profesores en las clases. Es necesario recalcar las acciones que favorezcan un **cambio de actitud** en gran parte de los profesores, siendo de mucha utilidad la publicación de los resultados de las distintas experiencias. Además de la información general que se pueda distribuir, podría ser interesante la asistencia de profesores a **encuentros y congresos nacionales e internacionales** sobre la aplicación de las TIC en actividades educativas de su área temática. En todo caso, es necesario que se brinden medidas de apoyo a los profesores que incursionan en este ámbito por primera vez, de manera que sientan un respaldo institucional y que su participación en dicha actividad sea valorada significativamente, aumentando así el curriculum profesional del mismo.

Finalmente, es muy importante la creación de un Centro Virtual de Servicios de Tele – Educación con el objetivo de asegurar a la institución un liderazgo en el campo de la aplicación de tecnologías en la enseñanza.

En resumen, considerando los aspectos antes mencionados, se concluye:

- El proceso de Tele – Educación es **complejo**, por lo que muchas veces la valoración negativa de esta modalidad es producto del desconocimiento.
- Es una **respuesta adecuada a la demanda educativa** de hoy y la calidad que alcance depende, al igual que la modalidad presencial, de una correcta y responsable planificación, organización, dirección y control de los procesos.
- **La responsabilidad del alumno es fundamental**. La presencia de conductas de entrada relacionadas con habilidades intelectuales, mas que con contenidos, son requisitos necesarios.
- La poca valoración que algunos dan a este tipo de modalidad es producto del **desconocimiento de la complejidad de este proceso**. También se olvida que el aprendizaje siempre es individual, se da sólo en el individuo. Por consiguiente, tanto en la participación en una clase formal, como en el silencio del estudio, de la lectura, del análisis intelectual, lo que importa es el aprendizaje.

Como consideración final me gustaría afirmar mi convencimiento de que la incorporación de las tecnologías de la información y las comunicaciones(TIC) a todas las actividades de los distintos centros educativos resulta imprescindible, tanto a corto como a mediano plazo. Confío en que esta ponencia sirva como punto de partida para la reflexión y para las primeras acciones institucionales sobre el desarrollo de la Tele – Educación que, de forma progresiva, vaya conduciendo a la existencia organizada de un futuro Campus Virtual a nivel Mundi

Bibliografía

[1] Astin, A. *Assessment as a tool for institution renewal and reform.* Washington DC, 1990.
[2] Alba Pastor, C. *Situación actual de la tecnología educativa a través del análisis de los programas que se imparten en las universidades españolas.* Sevilla, 1992.
[3] De Pablos, Pons. *La tecnología Educativa en España.* Sevilla, 1992.
[4] Gates, W. H. III. *Los negocios en la era digital. Cómo adaptar la tecnología informática para obtener el mayor beneficio.* España, 1999.
[5] UPM. *Proyecto de Tele-Educación*,1998.
[6] Escuela de Organización Industrial. *Teletrabajo, incidencia social y económica,* 1998.

Internet, como apoyo al proceso de enseñanza aprendizaje

Karolina Piedra Segura[1]

1. Introducción

Estando en las puertas del nuevo milenio la tecnología y la educación se complementan para recibirlo del modo más conveniente, tratando de satisfacer el deseo innato de aprender de los seres humanos. Los educadores pueden contribuir si ofrecen mejores condiciones para la formación de los individuos en los colegios y en las universidades, lo que será de alto beneficio para la sociedad. En dichas instituciones, hoy, en la mayor parte del mundo, se imparten las lecciones de una manera tradicional, con tiza y pizarra, cuaderno y texto, donde el profesor expone el tema y lo discute con sus alumnos y luego éste resuelve ejemplos prácticos ya sea en la pizarra o en su cuaderno. Mundialmente se observan las dificultades de este sistema de enseñanza- aprendizaje, ya que cada vez resulta más difícil captar la atención de los alumnos.

Inmersos como vivimos en las nuevas tecnologías buscamos en ellas la solución a los problemas mencionados. Pero pasa el tiempo y aunque el progreso tecnológico es cada vez más impactante, los problemas de enseñanza-aprendizaje continúan. Estamos a las puertas del siglo XXI y los computadores son hoy ya una herramienta sólida, confiable, relativamente de bajo costo; pero la razón principal por la cual es apenas ahora, cuando el computador puede tener un impacto en la educación como nunca antes, ésta en las comunicaciones, en la red mundial, que llamamos Internet y que verdaderamente cambia el mundo e incide de manera importante en la educación, probablemente más que otro factor tecnológico o metodológico.

Sin embargo el aporte de Internet en la educación genera hoy día un amplio debate, pues aún no son claros los verdaderos beneficios de su utilización, entre otras cosas, esto se debe quizás a que todavía no se conoce la mejor manera de aprovechar este recurso.

Uno de los objetivos de la informática educativa consiste en estudiar la manera de enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje por medio del computador, identificando aspectos claves del mismo que pueden y deben ser explotados por el educador.

2. La educación a distancia

Es la adquisición de conocimientos y habilidades a través de información e instrucción abarcando las tecnologías que soportan el aprendizaje a distancia. Tiene lugar cuando los estudiantes están separados por distancias físicas pero conectados por tecnología (voz, video, impresiones), entre sí y con el instructor. Tradicionalmente se ve como un grupo de composiciones de material didáctico con poca o ninguna interacción entre los participantes del modelo, donde el instructor es un facilitador, mas que un profesor magistral, guiando al participante a través del material y la tecnología.

Los estudiantes, típicamente adultos y empleados, deben tener un papel más activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es decir que deben ser más responsables del proceso. El medio tecnológico, no necesariamente es transparente para el instructor o los estudiantes. La forma de desarrollar el curso debe

[1] Estudiante, carrera de enseñanza de la matemática asistida por computadora, Escuela de Matemática, ITCR.

permitir el ajuste del estudiante a la tecnología, sgi dicha tecnología es complicada se deben preparar ciertas clases de prueba, para asegurarse que el estudiante sabe utilizarla.

La educación a distancia ha existido desde hace siglos, las cartas entre técnicos y científicos fueron una forma de dicho tipo de educación.

2.1 Medios típicos de educación a distancia (antes de Internet)

- Material impreso.
- Audio interactivo o video conferencia.
- Conferencias computacionales y correo electrónico (e-mail)
- Cintas de video
- Fax

2.2 Ventajas y desventajas de la educación a distancia

Desventajas

- Requiere de gran inversión en planificación, tiempo y esfuerzo.
- Los estudiantes deben tener igual acceso y equipo apropiado.
- Baja interacción y baja retroalimentación.
- La comunicación se realiza en forma no verbal.
- Inflexible (no se puede ajustar los métodos de enseñanza a estudiantes individuales).

Ventajas

- Audiencia más grande.
- Atiende necesidades de estudiante imposibilitados para clases presenciales.
- Conecta estudiantes de diferentes niveles de preparación y socio-económicos.

3. Tecnología de Internet

3.1 Herramientas para el trabajo colaborativo

La primera impresión que se tiene normalmente es que las herramientas colaborativas sólo pueden introducir cambios de forma o facilidades administrativas (comunicación con los estudiantes para formular trabajos o para recibirlos, anunciar novedades en el curso, etc.) a los ambientes educativos. Sin embargo, al analizar el problema en más detalle, encontramos que el trabajo colaborativo es quizás la posibilidad más novedosa desde el punto de vista educativo que aporta Internet a los ambientes computarizados. Veamos por qué, analizando las herramientas más importantes.

3.2 Principales herramientas existentes en Internet y sus usos educativos

Existen en Internet muchas herramientas que son susceptibles de ser usadas con fines educativos. Sin embargo hay que ser conscientes, de que al ser Internet un ambiente muy dinámico, es probable que aparezcan en el futuro otras herramientas que ofrecerán seguramente muchas otras posibilidades. Es por ello que se hará una descripción de las más importantes y de sus usos en educación, ilustrando como podrían ser aplicadas en casos específicos.

Las herramientas que consideramos más relevantes desde el punto de vista educativo son: las que facilitan el trabajo colaborativo (los chats, las carteleras electrónicas o grupos de noticias, el correo electrónico, los FAQs y los MOOs) y los exploradores o browsers. Analizaremos a continuación cada una de ellas.

3.3 Correo electrónico

El software de correo electrónico de Internet es eficiente y confiable. Este permite la posibilidad de intercambiar mensajes electrónicos entre personas Por lo general, a un mensaje de correo electrónico sólo le toma unos segundos llegar a su destino, además este sistema es más confiable que cualquier servicio de correo postal, ya que rara vez se pierde un mensaje. Si un mensaje no se puede entregar después de un tiempo determinado (tres días), el software automáticamente informa al transmisor.

Los sistemas actuales de correo electrónico proporcionan servicios que permiten una comunicación y una interacción complejas.

El correo electrónico se puede utilizar para:

- Enviar un solo mensaje a muchas personas.
- Enviar un mensaje que incluya texto, voz, video o gráficos.
- Enviar un mensaje a un usuario en una red fuera de Internet.
- Enviar un mensaje a quien conteste un programa de computadora.

Beneficios del correo electrónico

Proporciona una transferencia de alta velocidad y permite que el receptor escoja cuándo contestar, es decir, combina los beneficios de la comunicación instantánea con la libertad de interrumpirla.
Permite que un grupo de personas que comparten un interés en común participen en una discusión.
Debido a que el correo electrónico puede incluir texto, gráficos y voz, se puede utilizar para transferir documentos o mensajes grabados por audio.

Aunque el correo electrónico se diseñó originalmente para la comunicación entre dos personas, se ha ampliado y proporciona un medio de comunicación entre los miembros de un grupo y permite la comunicación por medio de un programa de computadora. Como resultado, el correo electrónico se ha convertido en uno de los servicios de Internet más ampliamente utilizados.

3.4 Los Chats

Son herramientas que permiten a varias personas comunicarse a través del computador, estando todos interactuando a través del mismo, a un mismo tiempo, cada uno en su propia estación de trabajo. Existen diferentes modalidades y facilidades de los chats, que van desde la interacción a través del teclado en la que lo que cada persona escribe va apareciendo en las pantallas de todos sin ningún tipo de organización, hasta los más modernos, que ofrecen una organización más sofisticada de la información (por ejemplo se manejan conversaciones entre pares de personas) o, casi en tiempo real, los que permiten la interacción a través de voz e imagen, lo cual aumenta considerablemente la calidad de la comunicación.

La gran ventaja que ofrecen los chats en los ambientes educativos es la posibilidad de establecer comunicación entre personas sin necesidad de que estén presentes en el mismo lugar, lo cual permite la participación de personas de diferentes personas y países. Otra ventaja es que impulsan la participación de ciertas personas que en un ambiente normal no lo harían por la inhibición natural que causa la presencialidad en algunos individuos.

El principal inconveniente es que la calidad de la comunicación es por ahora limitada y que requiere de un trabajo más laborioso por parte del coordinador que si la conversación fuera presencial. Otro inconveniente es la necesidad de que las personas dialoguen simultáneamente, lo cual, en ciertas circunstancias puede ser muy tedioso.

En la parte administrativa de un curso, algunos de los usos educativos de los chats son los siguiente:

- Permite que un estudiante pueda formular preguntas sobre unos temas del curso, desarrollos de proyectos, etc. lo importante que aporta Internet en este caso es que las dudas puedan ser evacuadas por diversas personas que no sean el profesor, además ofrece una gran flexibilidad con respecto a la localización física lo cual puede ser interesante en los sistemas de educación a distancia.
- Para hacer discusiones sobre diferentes temas educativos, donde se puede incluir a personas distintas del profesor y de los estudiantes, lo cual sin duda contribuye a enriquecer la discusión.
- Hacer sesiones de ejercicios en las que el profesor plantea un problema y los estudiantes lo resuelven utilizando, entre otros, los recursos que ofrece el ambiente computacional, estableciendo una comunicación mediatizada por el computador, la ventaja principal de esto, es que se puede recibir una inmediata realimentación del profesor.

4. Educación a distancia e Internet

4.1 Modelo centrado en la Web

Internet es la última tecnología adoptada por los diseñadores curriculares para incrementar la interactividad de la educación a distancia.

Con una simple conexión a Internet y un navegador, los estudiantes se pueden beneficiar con un aumento en la interacción sin la necesidad de viajar a un sitio específico o a una hora específica, lo que permite el aprendizaje en cualquier lugar y en cualquier momento.

4.2 Aula virtual

En un curso tradicional el aula es el centro primario del mismo; en los modelos de educación a distancia anteriores a Internet el centro de los cursos era el material impreso con alguna oportunidad de interacción estudiante-instructor o estudiante-estudiante, lo que implica desplazamiento a un sitio específico en horario pre-establecido.

En el modelo de educación a distancia, el sitio Web es el centro del curso, resultando en un curso de aula virtual o centrado en la Web. Este modelo usa las capacidades de Internet comentadas anteriormente para facilitar la comunicación y la
interacción; el aula virtual está compuesta de actividades de aprendizaje y puede estar constituida por uno o por una combinación de componentes.

4.3 Contenido programático

Los contenidos de una clase en línea pueden ser:

- Basados en HTML; es decir, en línea.
- Impresos enviados al estudiante.

Típicamente el contenido programático consta de:

- Objetivos basados en el contenido técnico.
- Ejercicios paso a paso.
- Simulaciones en pantalla sobre puntos clave.
- Revisión de preguntas.
- Ejercicios de laboratorio.

Aunque el contenido esté en línea, se recomienda a la institución de enseñanza que provea un medio donde se facilite material impreso, de forma tal que el estudiante cuente con éste aún estando fuera de línea.

4.4 El papel de los *chats* dentro de la educación a distancia

El contenido es bueno para el estudio individual, pero la experiencia de aprendizaje se ve complementada por la programación de chats regulares, cada uno de los cuales es moderado por el supervisor del aula virtual.

4.5 Grupos de discusión

Aumenta el valor agregado de la experiencia del aula en línea. Esta es una experiencia cercana a una actividad sincrónica en la cual un estudiante o instructor envía preguntas o comentarios y otros participante pueden responder sobre el tema
tratado. También deben ser moderados por el instructor, pero mucho del valor radica en la participación del estudiante.

4.6 Correo electrónico

Algunas veces la pregunta a un experto no se puede sustituir por otro componente del aprendizaje. Se debe garantizar un tiempo de respuesta mínimo. Usualmente Internet, permite cuentas donde se puede obtener información logística complementaria a la académica.

4.7 Nuevas posibilidades ofrecidas por Internet

Internet agrega al computador nuevas capacidades que pueden ser utilizadas desde el punto de vista educativo, y que, por lo tanto permiten explotar nuevos elementos pedagógicos. Se analizan algunas de éstas capacidades y su impacto en la labor educativa.

- Cooperativismo: la red conecta no sólo a los estudiantes con uno o con varios profesores, también, ofrece una vía de comunicación entre ellos, ésto permite que lpuedan compartir sus experiencias de aprendizaje y contenido. Un aspecto relevante del "aprendizaje en línea", es que ya los profesores dejan de ser los facilitadores directos, y los alumnos dejan su tradicional papel, vinculándose cada usuario de diversas maneras, pudiendo ser profesor en ciertos casos y estudiante en otros. Además se ofrece una mayor posibilidad de intercambios culturales, sin embargo esto hace que el lenguaje utilizado se debe ser neutral, sin que dependa de los patrones culturales específicos de cada país o región.
- Conexión al conocimiento mundial: al contar con acceso a las redes mundiales, desaparecen las limitaciones de almacenamiento de un medio estático (libro, CD, video, etc.). La búsqueda del conocimiento se puede dar en un espacio prácticamente infinito y dinámico; además este conocimiento no aparecerá sólo en forma de documentos de texto, sino que se puede dar en formatos multimedia y especialmente con software que ayude al proceso de aprendizaje.

- Bajos costos: uno de los problemas graves del contenido de un material educativo son los altos costos asociados a su actualización; una vez que el material ha sido distribuido, hacer cualquier tipo de corrección es una tarea muy difícil y costosa. Cuando toda esa información se encuentra centralizada en un servidor al cual los estudiantes accesan por medio de Internet, todos estos sobrecostos son eliminados por completo.
- Comunicación bi-direccional más ágil: Internet desvanece la barrera de la distancia para la educación no presencial, lo cual es uno de sus principales aportes. La comunicación entre los participantes de un curso se vuelve casi tan natural como en un salón de clases.
- Presentación hipertextual: aunque no es un aspecto exclusivo de Internet, sí es gracias a la Web que este tipo de presentaciones se ha generalizado. Los hipertextos ofrecen una nueva forma para estructurar el conocimiento y gracias al desarrollo de lenguajes, que agregan interactividad, su potencial en la educación es mucho más amplio.

Desde el punto de vista pedagógico, destacamos cuatro aspectos novedosos que son consecuencia de las nuevas capacidades ofrecidas por el medio:

- Aprendizaje cooperativo: éste aprendizaje se refiere a métodos instructivos en los cuales los estudiantes trabajan en grupos para lograr objetivos comunes. La web permite establecer objetivos más ambiciosos dentro de un plan de enseñanza, que se vuelve más eficiente pues la interacción entre los estudiantes es tan importante como la interacción entre el estudiante y la Web. Gracias a las técnicas de comunicación soportadas por la tecnología, la labor del profesor se convierte en la de un moderador o facilitador para que el grupo trabaje de una manera conjunta a la hora de resolver ciertos problemas.
- Retroalimentación rápida: la primera sensación que se debe evitar por parte del alumno es la de sentirse "abandonado a su suerte". Por esta razón, es necesario favorecer la utilización de la herramienta más cercana de comunicación: el computador mismo. Aprovechando la interactividad y las capacidades de tutoría ofrecida por los métodos informáticos se puede limitar esa sensación, haciendo que el computador haga de guía del estudiante, pero también vaya informando sobre los avances, errores e incluso corrigiendo las acciones de éste. Las facilidades de cooperativismo permiten atenuar la distancia física entre los alumnos y así lograr que se sientan parte de algo "vivo".
- Aprendizaje activo: el estudiante debe ser un agente activo en su proceso de aprendizaje, es decir que debe procesar y darle sentido a la información que se le presente y no simplemente recibirla. Debe tener la posibilidad de dirigir el aprendizaje a su ritmo y en el orden en que se lo dicten sus necesidades. El diseñador del curso tiene entonces que idear situaciones donde se obligue al estudiante a comparar, clasificar, inducir, deducir, analizar errores, hacer abstracciones, etc., es decir donde el alumno sea un ente fuertemente activo.
- Aprendizaje justo a tiempo: la mejor manera para aprender, es cuando existe la necesidad de un conocimiento para su inmediata aplicación. El impartir un conocimiento a alguien que no lo necesita se dificulta por la falta de motivación del aprendiz, al no tener que respetar un orden lineal, el estudiante puede visitar únicamente aquello que es necesario para el concepto final, y sólo en la medida en que aporte algo al objetivo principal. Paralelamente, así como se puede restringir el conjunto de conocimientos que desea recibir, también lo puede ampliar de una manera muy flexible por cuanto al estar apoyado en Internet, las limitaciones de contenido desaparecen.

5. Conclusión

Como se ha podido observar, la Web por sí misma no es una herramienta de generación de conocimiento, ni mucho menos de apoyo a la docencia, ésta es simplemente un mar de información, que ofrece la posibilidad de presentar documentos, frases, imágenes, etc. en distintas partes del mundo casi al mismo tiempo. La Web debe ser un multiplicador de fuerza, en este caso, de la capacidad pedagógica. En una clase tradicional, el profesor normalmente tiene un espacio-tiempo limitado con sus (25-30) alumnos. En esta condición, es difícil para el docente acercarse a cada estudiante y a su vez permitir que cada uno se acerque a él o ella para compartir una experiencia enriquecedora.

Sin embargo, el docente ya no es una máquina de reproducir conocimiento, pero la baja interacción y la concepción individualista del saber hacen pensar que la meta en muchos casos puede seguir siendo que el estudiante copie al profesor. La Web nos invita a cambiar la concepción pedagógica de conocimiento y comprensión, ya no hablamos de inteligencia, hablamos de inteligencias, y más allá hablamos de Inteligencia colectiva: el saber se construye socialmente.

Por supuesto, la Web no es el reemplazo del profesor, sino, más bien es un medio a través del cual éste transmite, ante todo, su pasión y su interés por saber más; en un ambiente de educación a distancia, donde cada estudiante puede enriquecer la experiencia de aprender a su manera. Es, si se quiere, la base de un sistema pedagógico distribuido con muchas caras, tantas como docentes.

La Web, vista para enseñar, no debe convertirse en un televisor, donde la única interacción es cambiar de canal. Por el contrario, esta tecnología permite concebir ambientes complejos que nos lleven de la " educación asistida por computador" a el "computador controlado por el estudiante".

Se espera que los profesores utilicen la tecnología de edición de las páginas Web, para realizar lo que llamamos la WebStyle del curso. Este enlace es entonces la puerta especial del estudiante al contenido del curso. Sin embargo esta concepción no descarta que cada profesor, departamento o institución impulse el desarrollo de páginas enriquecidas donde el usuario puede interactuar con mundos creados con finalidad pedagógica.

Bibliografía

[1] Galvis, A. *Informática Educativa*. Vol 11, N°2. Ediciones Uniandes, Bogotá, 1998
[2] Douglas E. Comer. *El libro de Internet* 1ª. Ed., Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1995.
[3] Microsoft Corporation. IMG University Education. *Series*, 1998

Parte III

Minicursos y talleres

LaTeX: procesador de textos de matemática

Mario Marín S.[1]

Resumen

LaTeX es uno de los procesadores más utilizados para hacer la edición de documentos científicos, en especial si tienen mucha notación matemática. Este artículo presenta algunas características sencillas del programa con el fin de dar al usuario un primer acercamiento al potencial de esta herramienta. Se busca motivar al lector que desea mejorar la calidad en la presentación de sus documentos, para que utilice LaTeX.

1 Introducción: TeX y LaTeX

TeX es un sofisticado ambiente computacional para producir textos de alta calidad; del que puede resaltarse tanto la excelente calidad de los algoritmos que incluye, para el manejo de texto y de fórmulas matemáticas, así como por su flexibilidad de programarse acorde con las exigencias tipográficas del usuario.

Desarrollado por el reconcido científico Donald Knuth [4] entre las décadas de los 70 e inicio de los 80, hoy día constituye la plataforma, por excelencia, sobre la cual sectores cada vez más amplios de la comunidad de los matemáticos y matemáticas, ingenieros e ingenieras y científicos en general, escriben sus reportes, artículos, libros y demás documentos técnicos. Es además el estándard para la presentación de trabajos en muchas de las publicaciones científicas internacionales.

Por supuesto que esta enorme capacidad de TeX tiene un precio y es que la aplicación de su potencial requiere que el usuario tenga o desarrolle una amplia experiencia en técnicas de programación.

LaTeX es un programa que permite usar muchas de las características del TeX de forma que haya un balance entre las posibilidades ofrecidas por el programa y la facilidad para usarlas. El desarrollo de este ambiente, se debe el científico Leslie Lamport [6].

LaTeX es un compendio de macros, todos definidos sobre la plataforma que ofrece el TeX, que resulta suficiente para las necesidades de un amplio sector de la comunidad científica. En palabras del propio Lamport "LaTeX agrega a TeX una colección de comandos que simplifican el levantado de texto, permitiendo al usuario concentrarse en la estructura del texto más que en comandos de formateo."

LaTeX es el conjunto de macros en TeX más utilizado y además disponible para las más diversas plataformas. En la actualidad, dada la multitud de usuarios y el gran interés que se tiene las capacidades del LaTeX son aumentadas cada día. Así, el esfuerzo de mucha gente permite al usuario tener acceso a muchas posibilidades para aumentar el horizonte de aplicaciones, acorde con sus necesidades.

Existen versiones libres de LaTeX que se pueden conseguir vía internet y versiones que sólo pueden utilizarse si se compra la licencia.

Estas notas brindan una descripción muy general de algunas capacidades del programa y los ejemplos utilizados; van orientados hacia versiones que sean libres, que corran sobre la plataforma del sitema D.O.S y computadores personales muy modestos, desde la familia 80-286 en adelante. En todo caso la *portabilidad* entre diferentes plataformas es muy alta.

El usuario interesado en profundizar sus conocimientos de LaTeX puede consultar diversa bibliografía. Las referencias [5, 6] pueden resultar muy útiles ya sea para el usuario principiante o para el avanzado que desee optimizar el uso que le da al programa.

---

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Matemática.

2 Documentos LaTeX.

Todo archivo fuente LaTeX antes de poder ser visto en su forma final debe ser interpretado. Esto quiere decir que el código fuente que se escribe no sólo contiene información sobre el texto a levantar; debe incluir instrucciones sobre cuáles son las características de formato con las que se arreglará. Es necesario que el archivo fuente incluya un encabezado en el cual se le definen al programa algunos parámetros sobre el estilo y la forma del documento final. Estos parámetros los define el usuario, según las características de formato que desee tenga su documento.
En LaTeX las cadenas de texto pueden significar ya sea texto a desplegar o instrucciones sobre cómo desplegar partes o la totalidad del documento. Por lo general, toda instrucción respecto a formato o comando va precedida por un backslash \ que es un caracter de escape que indica al intérprete que lo que sigue debe ser interpretado de forma especial. En General un documento LaTeX tiene la forma:

```
\documentclass[opciones]{estilo}
```

Instrucciones generales sobre formato, márgenes, tamaño de página, etc. Puede incluirse comandos creados por el usuario.

```
\begin{document}
```

Texto a arreglarse, dentro del mismo puede incluir comandos de efecto local o global.

```
\end{document}
```

La instrucción `\documentclass[opciones]{estilo}` es obligatoria y es la que define el estilo del documento. Las opciones permiten elegir variantes dentro del mismo estilo, o incorporar algunas alternativas gráficas.
LaTeX dispone de una serie de estilos predefinidos. Cada uno incluye un conjunto de parámetros por defecto, que sólo se utilizarán en caso que el documento a arreglar no los especifique.
Además del encabezado, el archivo contiene el texto fuente del documento a arreglar; éste siempre está comprendido entre una instrucción que marca el inicio y otra que marca el final.

2.1 El Estilo del Documento

El estilo o clase del documento además de necesario en todo documento es el que dicta las características fundamentales del documento final. Los estilos más comunes son artículo, reporte, libro y carta. Cada uno de ellos define un convenio preestablecido para arreglar el documento. Esto incluye tamaños de letra, ubicación de títulos, si los hay, forma de la fecha, estructura de seccionamiento:*capítulo, sección, subsección, índice, bibliografía*, entre otros. Por ejemplo, este documento se formateó al estilo artículo, esto incide en la ubicación del título, en el tamaño de las letras del título, del resumen y del cuerpo, en la forma en que se imprimen las páginas, en la forma en que se numeran, en cómo se ponen los encabezados y las notas de pie de página, entre otras.
Cada uno de los estilos recoge el formato más o menos aceptado en círculos de usuarios, sobre los rasgos que definen uno u otro tipo de documento. En todo caso, el usuario tiene total libertad de variar o modificar estos estilos o hasta definir los propios.
Además del estilo, en el encabezado se puede incluir modificaciones de los parámetros que el estilo establece; así como comandos propios del usuario. Por ejemplo, el siguiente encabezado establece condiciones para formatear un texto. Algunas de las instrucciones modifican parámetros preestablecidos.

```
\documentclass[12pt]{article}
\setlength{\textwidth}{14cm}
\setlength{\textheight}{20cm}
\renewcommand{\baselinestretch}{1.5}
\pagenumbering{Roman}
\setlength{\parindent}{1cm}
```

Este encabezado define un documento de tipo artículo en el cual la letra es un poco más grande de lo establecido, las dimensiones del texto son de 14 cm de ancho por 20 cm de largo, la separación entre líneas es a espacio y medio, la numeración de las páginas es en romano y las sangrías son de 1 cm. Además cualquier otra dimensión o especificación de formato que se necesite se toma como está establecida en el estilo artículo.

El comando `\renewcomad{comando}{nueva-definicion}` permite redefinir un comando existente. También `\setlength{\dimension}{nueva-dimension}` permite modificar la `dimensión`, asignándole el valor dado en `nueva-dimensión`. Existen muchas opciones de este tipo que no se detallan aquí.

3 Texto

En algunos de los editores las palabras se digitan igual que en cualquier otro editor. En otros, dependiendo de la configuracin de la instalación del software, puede ser necesario algunas instrucciones para lograr acentos especiales.
La palabras y frases se separan por espacios en blanco, uno o varios, da lo mismo. Los párrafos se separan por una línea en blanco. Los pasos de línea forzados se logran con `\newline` y los pasos de página con `\newpage`. Los comentarios al pie de página se logran de manera muy sencilla, con una instrucción. El texto `\footnote{`*Texto de la nota*`}` produce una nota de pie de página que se numera en forma automática y puede navegar dentro del texto para acomodarse en el pie de la página en que se referencie.
Los acentos especiales se logran con comandos, por ejemplo:

Código Fuente:	Texto arreglado:
`''El ca\~n\'on est\'a lej\'{\i}simos.''`	"El cañón está lejísimos".

En el caso del comando `\'{\i}` la instrucción interna produce una "ı" sin punto y la instrucción exterior la tilda.
También se dispone de varios tipos de letras, por ejemplo *itálica*, `máquina de escribir`, *inclinada*, **negrita**; así como varias opciones de tamaño de letras. Veamos el siguiente ejemplo:

Código fuente:

```
{\it Esta letra es it\'alica, }
{\sl esta otra
  inclinada. }
{\bf Tambi\'en se puede escribir
 en negrita, } o en
{\sc may\'usculas
 peque\~nas } entre otras.
{\Huge Los} {\huge tama\~nos}
{\LARGE tambi\'en} {\Large se}
{\large pueden}
{\normalsize manipular,}
{\small como}
{\footnotesize vemos}
```

Texto arreglado:

Esta letra es itálica, esta otra inclinada. **También se puede escribir en negrita,** o en MAYÚSCULAS PEQUEÑAS entre otras.

Los tamaños también se pueden manipular, como vemos

También es posible hacer combinaciones de algunas de ellas, por ejemplo el código fuente

`{\bf \underline{Hola}}` produce el texto **Hola**;

mientras que el texto fuente

`{\large {\sl esta otra es m\'as grande e inclinada}}` produce el texto: *esta otra es más grande e inclinada.*

Los paréntesis ayudan a delimitar el alcance de alguna instrucción, el no utilizarlos puede provocar que el alcance del efecto que queremos dar no sea el deseado.
Muchos de los caracteres usuales son interpretados como comandos, así que para que aparezcan en un texto deben escribirse en forma especial. Por ejemplo el caracter $ indica el inicio o el final de un ambiente matemático, si se necesita que aparezca como el símbolo de dólares debe escribirse `\$`. Otros caracteres con esta característica son: &, %, #, { y }.

4 Texto Matemático

Una de las mayores y mejores virtudes de LaTeX es la posibilidad de construir expresiones matemáticas de una excelente presencia y en una forma relativamente sencilla.
Se pueden definir ambientes especiales como teoremas, definiciones y otros esquemas que el usuario requiera. Para éstos, además de diferenciarlos de alguna manera del texto normal se dispone de numeración automática, y la posibilidad de etiquetarlos para hacer referencia a los mismos.
Por otra parte se dispone de ambientes preestablecidos en los cuales el texto y los símbolos se escriben en un formato matemático especial. Dentro de estos ambientes, se dispone de un amplio espectro de opciones para producir expresiones matemáticas complejas. Para muestra los dos textos siguientes tienen el mismo código fuente, el primero está en modo normal el segundo en modo matemático. Note, por ejemplo, el tipo de la letra o la separación entre caracteres.

x+y=5 $\quad\quad x+y=5$

Un texto matemático puede estar insertado dentro del texto normal o desplegarse aparte. Si se desea que una expresión matemática simbólica quede dentro del texto, debe encerrarse entre símbolos de dólares. Además ha de tenerse cuidado porque en ese caso el programa adapta el tamaño de la expresión matemática y podría verse mal. El siguiente ejemplo ilustra un caso para ser analizado.

Texto fuente:

```
Dado que para todo polinomio
con  coeficientes enteros,
  $P(x)= \sum_{k=0}^n{a_kx^k}$
donde $a_x \in Z\;\forall k$,
cumple que si
 $r = \frac{p}{q} $
es un cero de  $P(x)$
 donde $p\div a_n$ y
 $q\div a_0$ entonces...
```

Texto arreglado:

Dado que para todo polinomio con coeficientes enteros, $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ donde $a_x \in Z \;\; \forall k$, cumple que si $r = \frac{p}{q}$ es una cero entonces donde p/a_n y q/a_0 entonces...

Dado que cuando el texto matemático queda sobre texto normal, el procesador lo adapta el tamaño adecuado. Si uno como usuario desea preservar el tamaño normal del texto puede hacerlo incluyendo un comado especial llamado `\displaystyle`.

Texto fuente:

```
''As\'i pues, aplicando el
criterio indicado,
la serie $\sum_{n=2}^
{\infty} \frac{1}{n \ln n}$
 diverge...''

{\em produce un efecto
diferente que:}

''As\'i pues, aplicando el
criterio indicado,
serie $\displaystyle{
\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}
{n \ln n}}$  diverge... ''
```

Texto arreglado:

"Así pues, aplicando el criterio indicado, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge..."

produce un *efecto diferente que:*

"Así pues, aplicando el criterio indicado, serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge... "

Esto sólo es un ejemplo para comparar; existen opciones para lograr efectos acorde con la exigencia del usuario. Por ejemplo la raíz cuadrada de la fracción p entre p puede aparecer mejor como $\sqrt{p/q}$ para evitar que la fracción ocupe mucho espacio y obligue a reubicar el texto.

Lo más común en las expresiones matemáticas es que se desplieguen fuera del texto y centradas en el espacio dedicado al texto, para esto se dispone de la posibilidad de utilizar un ambiente complementario al mencionado. Los siguientes ejemplos muestran el uso de estos ambientes.

El entorno delimitado por `\[` y `\]` produce un ambiente matemático que se despliega en renglón aparte y centrado.

El siguiente texto fuente:

```
\[\left\{ \begin{array}{ccc}
        a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n  & = & b_1 \\
        a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n  & = & b_2 \\
        \vdots           &        \vdots        & \vdots \\
        a_{n1}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{mn}x_n  & = &b_m\\
        \end{array}
     \right. \]
```

Produce el arreglo:

$$\left\{\begin{array}{ccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}\right.$$

En este caso la combinación `\left\{` produce una llave cuyo tamaño se adapata de forma automática. El entorno delimitado por `\begin{array{ccc}` y `\end{array}` produce un ambiente en el cual se genera un arreglo de 3 columnas centradas y cualquier cantidad de filas, las filas se separan por \\ y las columnas por &.
Existen opciones variadas para expresiones matemáticas. Por ejemplo para crear ambientes con numeración automática, que permite referenciarlas en cualquier parte dentro del mismo documento.
El siguiente ejemplo ayudará a comprender la idea.
El texto fuente:

```
\newtheorem{Definicion}{{\sf Definici\'on}}
\newtheorem{Teorema}{{\sf Teorema }}
\newtheorem{Teorema}{{\sf Teorema }}
\begin{Definicion}
\label{definicion1}
 Sean una recta  $l$  y un plano $\pi$  que se intersecan en P. Decimos
 que la recta  $l$ es perpendicular al plano $\pi$ si $l$ es
perpendicular a cualquier recta $x$ en $\pi$ que pase por $P$.
 $P$ se llamar\'a pie de la perpendicular.
\end{Definicion}
La relaci\'on de perpendicularidad entre una recta y un plano es mutua.
El plano $\pi$
 es perpendicular a la recta  $l$ y la recta
$l$ lo es al plano $\pi$.

\begin{Teorema}
\label{teorema1}
 Si $A, B, C$ y $D$   son  puntos  tales que, $A$  equidista de  $P$ y $Q$; y
$B$  equidista de  $P$ y $Q$
  entonces todo punto
entre $A$ y $B$  tambi\'en
equidista de $P$ y
\newline  $Q$.( $A,B,P,Q$ no  son necesariamente  coplanares.)
\end{Teorema}
 Como consecuencia de la definici\'on \ref{definicion1} y del teorema
\ref{teorema1} se puede deducir el teorema \ref{teorema2}
\begin{Teorema}
\label{teorema2}
Si una l\inea es perpendicular a cada una de dos l\ineas que se cortan,
entonces es perpendicular al plano que determinan.

\end{Teorema}
```

Produce el texto:

Definición 1 *Sean una recta l y un plano π que se intersecan en P. Decimos que la recta l es perpendicular al plano π si l es perpendicular a cualquier recta m en π que pase por P. P se llamará pie de la perpendicular.*

La relación de perpendicularidad entre una recta y un plano es mutua. El plano π es perpendicular a la recta l y la recta l lo es al plano π.

Teorema 1 *Si A, B, C y D son puntos tales que, A equidista de P y Q; y B equidista de P y Q entonces todo punto entre A y B también equidista de P y Q.*
(A, B, P, Q no son necesariamente coplanares.)

Como consecuencia de la definición 1 y del teorema 1 se puede deducir el teorema 2

Teorema 2 *Si una línea es perpendicular a cada una de dos líneas que se cortan, entonces es perpendicular al plano que determinan.*

5 Listados

En el ambiente que ofrece el LaTeX, existen diversas opciones para crear listados, o listas dentro de listas. Para ello puede usarse un ambiente que se abre con una opción `\begin{itemize}` y se cierra con `\end{itemize}` y cada elemento de la lista se indica antecediendo el texto del item por `\item`. Existe también la opción de generar listas numeradas en cuyo caso el ambiente se inicia con `\begin{enumerate}` y se cierra con `\end{enumerate}`. Ambos ambientes permiten enumeraciones anidadas, veamos el siguiente ejemplo.
El texto fuente:

```
\begin{enumerate}
\item Calcule los siguientes  l\'{\i}mites:
\begin{itemize}
\item
$\displaystyle{
      \limite{x}{-\infty}{(\sqrt{x^2+5x+1}-\sqrt{x^2+x+1})}}$
\item
$\displaystyle{
     \limite{x}{0}{\frac{\sec x -1}{x^3 \csc x}}}$
\end{itemize}
\item Dada la funci\'on:
\[h(x)=\displaystyle{ \left\{ \begin{array}{ll}
          2x & \mbox{ si $x < 1$}\\
          cx^2+d& \mbox{ si  $1\leq x \leq 2 $}\\
          9+x &  \mbox{ si $x > 2,$}
        \end{array}
      \right.} \]
\begin{enumerate}
\item Detemine, si existen, los valores de $c$ y $d$ para que $h(x)$ sea
 continua en
$x=1$ y $x=2$.
\item Analice la continuidad de $h(x)$ en $[3,\infty[.$
\end{enumerate}
\end{enumerate}
```

Produce el despligue:

1. Calcule los siguientes límites:
   - $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+5x+1} - \sqrt{x^2+x+1})$
   - $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sec x - 1}{x^3 \csc x}$
2. Dada la función:

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ cx^2 + d & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 9 + x & \text{si } x > 2, \end{cases}$$

   (a) Detemine, si existen, los valores de c y d para que $h(x)$ sea continua en $x = 1$ y $x = 2$.

   (b) Analice la continuidad de $h(x)$ en $[3, \infty[$.

5.1 Comandos

El usuario de LaTeX tiene la posibilidad de crear macros. En general, cuando un efecto especial se utiliza con mucha frecuencia, es conveniente incluirlo dentro de un macro. Un macró agrupa una o varias instrucciones bajo un comando y cada vez que se desee producir el efecto de ese grupo de instrucciones sólo debe digitarse el comando asociado con ese efecto. Los parámetros pueden ser parametrizados o simples.
En general la sintaxis de los comandos es:
`\nombre-de-comando`[número de parámetros] { *grupo de instrucciones*}
Para lograr que el efecto indicado en un comando se produzca debe digitarse el comando:
`\nombre-de-comando` {*Lista de parámetros, separados entre llaves*}.
El siguiente ejemplo permite analizar el uso de comandos.

```
\newcommad{\1}{\'{\i}}
\newcommand{\matdosdos}[4]
          { \left(
          \begin{array}{cc}
                #1   & #2\\
                #3   & #4
           \end{array}
             \right) }
```

En estos comados el primero define la "í tildada" mientras que en el segundo crea un efecto dentro del ambiente matemático acorde con las siguientes características. Se llama `matdosdos` y recibe 4 parámetos. La instrucción `\left\(` produce un paréntesis de tamaño que se adapta automáticamente en el entorno, las instruciones `begin{array}{cc}` y `\end{array}` establecen las condiciones para crear un arreglo con dos columnas cuyos elementos se escribirán centrados sobre la columna, las columnas se separan por & y las filas por \\

Texto Fuente:

```
As\i la matriz  final
tiene la forma:
\begin{equation}
A= \matdosdos
     {\lambda}
     {0}
     {0}
     {\matdosdos
      {\mu}
      {0}
      {\mu}
      {0}}
\label{mula}
\end{equation}
..... las matriz (\ref{mula}) es invertible y...
```

Texto Arreglado:

Así la matriz final tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

...... las matriz (1) es invertible y...

Es común que el usuario de LaTeX mantenga un archivo en el cual incluye los comandos propios y las modificaciones de los parámetros que haya hecho. Cada vez que inicie un nuevo documento no necesita digitar macros existentes, sólo necesita incorporarlos al documento utilizando un `\input{archivo}`. Esta opción también permite la construcción modular de documentos, uniendo diversos archivos.

6 LaTeX y Gráficos

En general se dispone de varias opciones que permiten incorporar gráficos dentro de documentos. No interesa aquí abordar el punto, sin embargo se presentan algunas observaciones al respecto.
Las versiones modernas del programa incluyen comandos especiales que permiten incorporar gráficos construidos sobre algunas de las plataformas disponibles. Por ejemplo, se pueden incluir gráficos windows tipo WMF,BMP,PCX, también archivos tipo PostScript. Estas opciones, en general son complicadas pues los gráficos se insertan tal como vienen y no se interpretan; muchas veces la calidad del dibujo importado contrasta con los acabados propios que le da el programa a lo que interpreta.
En realidad el programa provee un ambiente gráfico básico. El problema es que la cantidad y el amigabilidad de son bajas. No obstante, existe la posibilidad de crear gráficos cuyo código fuente sea interpretado por el programa. En estos casos los gráficos generados pasan a través del filtro que implica el LaTeX y su acabado final es bueno.
Entre otras, se dispone del TeXcad un ambiente incorporado dentro del propio ambiente que permite crear gráficos sencillos utilizando el ratón y algunas primitivas. PicTeX [7] es un ambiente que permite mucha flexibilidad para la creción de gráficos. Su aprendizaje requiere de alguna paciencia. También está el drsTeX [3].

7 Recomendaciones Finales

Hoy día LaTeX ofrece una amplio espectro de opciones para la elaboración de documentos; se necesitaría uno o varios libros para abordar sólo las más útiles.
Empezando, por un sinfín de posibilidades menores sobre estilo, creación automática de ambientes como índices, bibliografías hasta la creación de estilos propios, LaTeX es un paquete de sorpresas

agradables para para quienes lo usan. Adicionalmente, de seguro que día a día aparecerán más y más opciones para ampliar el espectro de sus posibles aplicaciones.
Para el usuario principiante se recomienda hacerse de un manual del programa y empezar a crear documentos y con ello profundizar en el conocimiento de las opciones que ofrece.
El verdadero concimiento vendrá de la experiencia de probar posibilidades, de modificar opciones existentes para adaptarlas a nuestras necesidades y del convencimiento de la flexibilidad que ofrece este ambiente.
Queda por hablar de muchas cosas y por profundizar otras más, sin embargo con lo poco que se dice en estas notas se puede empezar, hágalo; no se arrepentirá.

Bibliografía

[1] Abrahams, P., *TEX for the Impatient*, Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A, 1992.

[2] Eijkhout, V., *TEX by Topic, A TEXnician's Reference*, Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A, 1992.

[3] Gurari, E. *TEX and LATEX: Drawing and Literate Programing*, McGraw-Hill, Inc., U.S.A., 1994.

[4] Knuth, D., *The TEX book*, Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A, 1986.

[5] Kopka, H ; Daly P. W. *A Guide to LATEX*, Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A, 1994.

[6] Lampor, L. *LATEX, A Document Preparation System*, Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A, 1994.

[7] Mora, W. *Pictex*. Instituto Tecnológico de Costa Rica, 1995.

[8] Seroul, R. ; Levy, S., *A Beginner's Book of TEX*, Springer-Verlag, New York, 1995.

Comportamiento caótico de ecuaciones diferenciales y en diferencia, utilizando tecnología

Edison De Faria Campos[1]

Resumen

El objetivo de este minicurso es mostrar el potencial de la calculadora graficadora con sistema algebraico computacional (CAS) TI89/92plus para resolver algunos modelos matemáticos representados por ecuaciones diferenciales de primer y segunda orden, así como sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones en diferencia, permitiendo que el sujeto utilice dinámicamente distintas representaciones matemáticas: gráfica, simbólica y numérica, al plantear la ecuación que modela el fenómeno, bosquejar el campo direccional, obtener la solución numérica, analítica, o graficar el diagrama de fase. Utilizaremos generadores de números aleatorios para simular soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias – métodos de Monte Carlo, y analizaremos el comportamiento caótico de algunas de las ecuaciones diferenciales y en diferencia.

1. Introducción

La modelación matemática es de importancia fundamental en el aprendizaje de la matemática y nos permite reflexionar y explicar fenómenos que pueden ser simulados bajo condiciones favorables. La simulación de fenómenos físicos junto con la modelación matemática, representa un elemento muy importante para la construcción de conceptos matemáticos, y las nuevas calculadoras graficadoras programables permiten crear un ambiente de experimentación dentro del aula, funcionando como un agente didáctico dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje [1], [2], [3]. Gómez [4], reflexiona que:

> *La tecnología no es la solución al problema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La enseñanza no se puede automatizar y el profesor no se puede reemplazar. No obstante, las nuevas tecnologías abren espacios en los que el estudiante puede vivir experiencias matemáticas difíciles de reproducir con los medios tradicionales como el lápiz y el papel. En estas experiencias matemáticas el estudiante puede realizar actividades de exploración en las que es posible manipular directamente los objetos matemáticos y sus relaciones y en las que él puede construir una visión más amplia y más potente del contenido matemático.*

De acuerdo a Balacheff [5], el aprendizaje es un proceso que tiene lugar en la interacción entre el sujeto(estudiante), el medio y los agentes didácticos. La dimensión cognitiva es el aspecto relevante del sujeto desde el punto de vista del sistema y el medio es un sistema antagonista del sujeto. El medio está en capacidad de actuar y de reaccionar a las actuaciones del sujeto y el conocimiento es una propiedad del sujeto en situación y en interacción con el sistema antagonista.

La utilización de la tecnología permite el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación de los objetos matemáticos y dichos sistemas son un aspecto central de la comprensión del sujeto acerca de los objetos matemáticos y sus relaciones y de las actividades matemáticas que éste ejecuta cuando realiza tareas que tienen que ver con esos objetos.

[1] Universidad de Costa Rica, edefaria@cariari.ucr.ac.cr

2. Modelos de poblaciones

Suponga que tenemos una población de N(t) individuos en el instante t, y que la tasa relativa de crecimiento instantáneo r(N) de la misma es una función decreciente de N que cumple las siguientes propiedades:

- Si N = 0 entonces r = c (constante)
- Si $N = N_\infty$ entonces r = 0 (N_∞ representa la capacidad del ambiente o el límite de crecimiento)

La función más simple que satisface las condiciones anteriores es la lineal:

$$r(N) = c\left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right)$$

Como

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{N(t)\Delta t}$$

representa la tasa relativa de crecimiento de N durante el intervalo de tiempo [t, t + Δt], entonces la tasa relativa instantánea de crecimiento de N es

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{N(t)\Delta t} = \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r(N)$$

y por lo tanto, la ecuación diferencial que modela nuestra población es la *ecuación logística* (Verhulst, 1838)

$$\frac{dN}{dt} = c\left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right)N$$

La calculadora TI89 o bien la TI92plus nos permite analizar las soluciones de ecuaciones como la anterior, desde múltiples sistemas de representaciones:

[1] Solución analítica

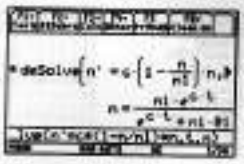
El comando *deSolve()* permite resolver analíticamente muchos tipos de ecuaciones diferenciales de primer o de segunda orden, con o sin condiciones iniciales. Para las ecuaciones de primer orden, se utiliza la siguiente sintaxis:

deSolve(ecuación diferencial [**and** condición inicial], varindep, vardep)

varindep denota la variable independiente, mientras que vardep se utiliza para la variable dependiente. Para nuestra ecuación logística, si queremos la solución general basta escribir

$$dSolve\left(N' = c\left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right)N, t, N\right)$$

pues t es la variable independiente y N la dependiente. El comando *deSolve()* se encuentra en el menú □ de la pantalla principal (HOME). Seleccione el comando en C: deSolve y presione +. El símbolo prima en N' se encuentra sobre la tecla Ɔ, y se accesa mediante la combinación de teclas 2 Ɔ. Después de digitar la expresión para deSolve presione +.



Hemos utilizado n1 en lugar de N_∞. Observe en pantalla la solución general de la ecuación logística

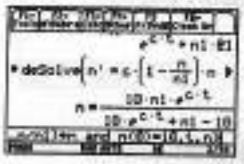
$$N = \frac{N_\infty e^{ct}}{e^{ct} + N_\infty @1}$$

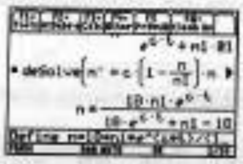
con la constante de integración @1.

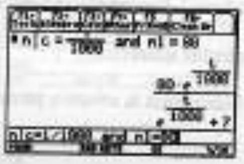
Podríamos haber determinado una solución particular que cumple por ejemplo la condición inicial N(0)=10,

$$dSolve\left(N' = c\left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right)N \text{ and } N(0) = 10, t, N \right)$$

así como definir una función para guardar la respuesta y evaluarla en valores particulares de los parámetros c y N_∞.

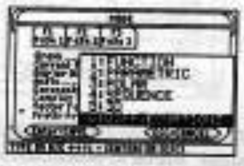


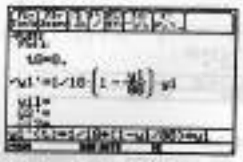




[2] Campo de pendientes y curva solución

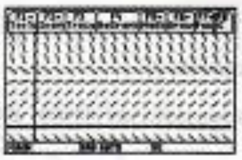
Para trazar el campo de pendientes, necesitamos cambiar el modo de graficar. Presione la tecla 3 y seleccione la opción 6:DIFF EQUATIONS para Graph. Presione ∞# para ingresar al editor de ecuaciones, y digite la ecuación logística, con los valores 1/10 para c y 80 para n1. No utilizaremos condición inicial por ahora.





Presione ∞Ξ y utilice los siguientes valores para los rangos de los parámetros t, x, y:

Presione □:9 Format o bien ∞ ⊆ y seleccione SLPFLD para Fields. Pulse ∞% para obtener el campo de pendientes para los valores particulares de los parámetros.

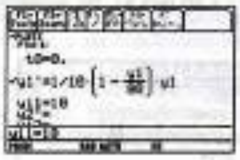
Experimente digitando distintos valores para la condición inicial yi1, desde el editor de ecuaciones. Experimente con una lista de condiciones iniciales, como por ejemplo: yi1={0, 20, 50, 100}. Posteriormente utilice el menú □ en la pantalla gráfica, para seleccionar condiciones iniciales interactivamente. Digite un valor para t, presione +, digite un valor para y1 y presione +. Experimente mover el cursor a una posición en que se quiere observar la curva solución que pasa por tal punto, después de presionar □. Finalmente, experimente con otros valores de los parámetros c y N_∞.

[3] **Solución numérica**

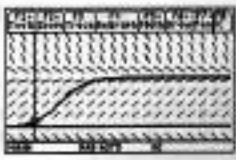
Ahora buscaremos la solución para el problema con condición inicial:

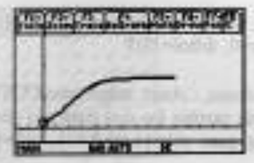
$$N' = 0.1\left(1 - \frac{N}{80}\right)N \quad con \quad N(0) = 10$$

Digite la ecuación y la condición inicial en el editor de ecuaciones ∞# y presione □ 9:Format, o bien ∞⊆ para determinar el formato gráfico de la solución numérica del problema.

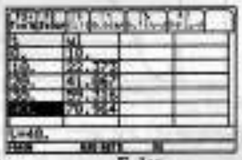



Utilice Runge-Kutta como método de solución, y SLPFLD como campo. Presione ∞% para obtener la gráfica de la solución del problema con condición inicial. Repita el procedimiento, pero seleccionando Euler como método de solución, y experimente con FLDOFF como campo, para que el campo de pendientes no sea desplegado en pantalla.

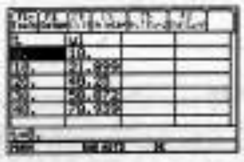




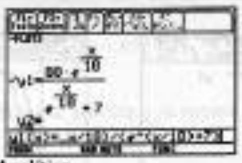
Utilizando tablas, podemos comparar las soluciones dadas mediante los métodos de Runge-Kutta, de Euler y analítico. Presione ∞& digite el valor 10 para Δtbl, y ∞> para desplegar la tabla.
Para la solución analítica, cambie el modo gráfico a función 3 Function, utilice el comando *deSolve*, copie y pegue la solución a la primera función disponible en el editor de ecuaciones.

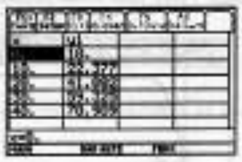


Runge-Kutta



Euler





Solución Analítica

3. Ecuación logística y depensación crítica

Comparemos los dos siguientes modelos poblacionales dados por ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dN}{dt} = 3.2\left(1-\frac{N}{10}\right)N \qquad \text{(ecuación logística)}$$

$$\frac{dP}{dt} = \begin{cases} 4(P-2)P & si\ 0 \le P < 2 \\ 5\left(1-\frac{P}{10}\right)(P-2) & si\ 2 \le P \end{cases} \qquad \text{(depensación crítica)}$$

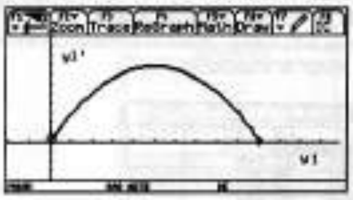
con condiciones iniciales: N(0)=0.1, P(0)=0.1

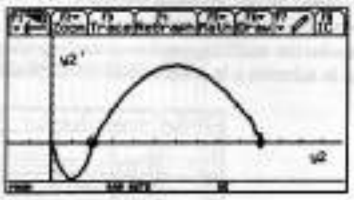
y1' = 3.2(1 – y1/10)*y1
yi1 = .1
y2' = when(y2 < 2, 4(y2 – 2)*y2, 5(1 – y2/10)*(y2 – 2))
yi2 = .1

Con ∞⊆ seleccione FLDOFF para Fields.

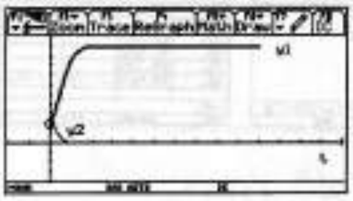
Seleccione tMin = 0, tMax = 10, tStep = .1, tPlot = 0, xMin = -2, xMax = 14, xScl = 1, yMin = -4, yMax = 11, yScl = 1, ncurves=0, diftol=.005

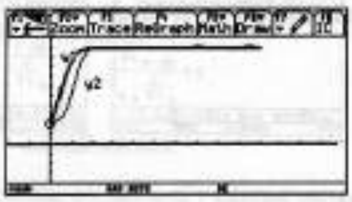
En el editor de ecuaciones, □Axes, seleccione CUSTOM para Axes: con y1 en el eje x, y1' en el eje y. ∞□ para graficar. Después cambie los ejes para que quede y2 en el eje x, y2' en el eje y, pero cambiando las condiciones iniciales para yi1={1.99,2.01}, yi2={1.99,2.01} que se encuentran a la izquierda y a la derecha de P=2.





Los diagramas de fase de los sistemas autónomos muestran que y1' > 0 si
0 < y1 < 10 mientras que y2' < 0 para 0 < y2 < 2 exhibiendo características de extinción de la especie.
Si ponemos TIME para Axes: podemos visualizar este comportamiento.



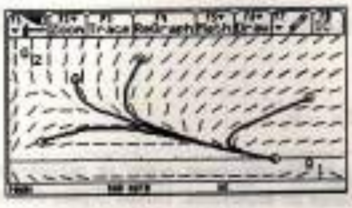


Curvas solución para yi1=yi2=1.99 y 2.1 respectivamente.

4. Modelo de especies que compiten por un mismo recurso (Lotka, Volterra)

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(\frac{M_\infty - N - aP}{M_\infty}\right), \quad \frac{dP}{dt} = sP\left(\frac{\tilde{M}_\infty - P - bN}{\tilde{M}_\infty}\right)$$

Se reducen a la ecuación logística en la ausencia de la otra población (N=0 o P=0). **Analice el modelo** para los parámetros r=2, $M_\infty = 8$, a=1.5, s=1.7, $\tilde{M}_\infty = 4$, b=0.8, direction field, xMin=0, xMax=10, yMin=-1, yMax=6.



5. El modelo SIR

S = clase susceptible
I = clase infectada
R = clase recuperada (o removida)

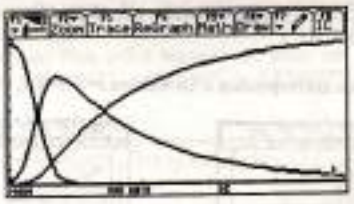
Este es un modelo de propagación de una epidemia no fatal, y supondremos que S+I+R=N (población total) es constante durante el intervalo de tiempo bajo consideración. Individuos pasan de la clase S a la I a una razón proporcional al producto de S por I; de la clase I a la R a una tasa proporcional a I. Entonces las ecuaciones para el modelo son las siguientes:

$$\frac{dS}{dt} = -kSI, \quad \frac{dR}{dt} = rI, \quad \frac{dI}{dt} = kSI - rI$$

Como dN/dt=0, es suficiente considerar la primera y la tercera ecuación. Utilizaremos y1 para S, y2 para I. Además incluiremos y3 para R.

Analizar el modelo para los valores de los parámetros:

k = 0.1, r = 0.7, yi1 = 98, yi2 = 2, yi3 = 0, FldOff, tMin=0, tMax=10, tStep=0.1, tPlot=0, xMin=0, xMax=10, xScl=1, yMin=0, yMax=100, yScl=10, difTol=0.001; TIME para ejes.



6. Resolviendo una ecuación diferencial de tercer orden

La Ti89/92plus no resuelve directamente en forma analítica una ecuación diferencial ordinaria de orden mayor que dos. Lo que hay que hacer con una ecuación de orden mayor que dos es convertirla en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Por ejemplo, la ecuación

$$y'''+y''-2y'+y = x*\cos(x) \quad con \quad y(0)=0,\ y'(0)=2,\ y''(0)=1$$

se transforma en el siguiente sistema, mediante la sustitución $y=y_1$, $y'_1 = y_2$, $y'_2 = y_3$

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ y'_3 = x * \cos(x) - y_1 + 2y_2 - y_3 \end{cases}$$

Como la solución de esta ecuación de tercer orden es precisamente y_1 entonces tenemos que seleccionar solamente y_1 en el editor de ecuaciones. Utilice □ para desactivar todas las otras funciones. Con □ 9:Format, o bien ∞⊆ seleccione FLDOFF para Fields (no podemos utilizar las otras opciones para ecuaciones de orden mayor que 2), y TIME para ejes en el editor de ecuaciones.

7. La ecuación en diferencia $x_{n+1} = r\,x_n(1 - x_n)$

La versión discreta de la ecuación logística : $P_{n+1} = r\,P_n - s\,P_n^2$, se transforma en

$$x_{n+1} = r\,x_n(1 - x_n) \qquad (1)$$

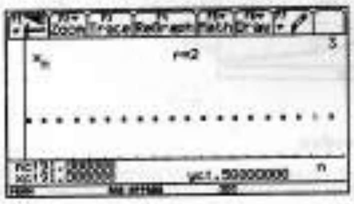
si hacemos $P_n = \frac{r}{s} x_n$ (Li & Yorke, 1975, 985-992).

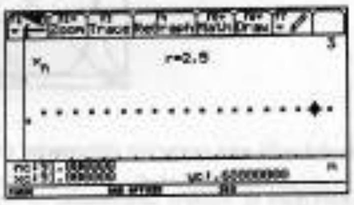
Dados r y la condición inicial x_0 , la ecuación (1) genera una sucesión de valores $x_1, x_2, x_3, \cdots$ que corresponden a los tiempos sucesivos $t_1, t_2, t_3, \cdots$.
Analizaremos el comportamiento de x_k $k = 1,2,3,\cdots$ cuando variamos el parámetro r, y en particular, el comportamiento de la población límite $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$.

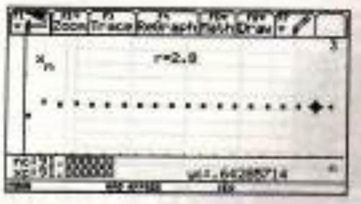
Para realizar la investigación, utilizaremos el modo gráfico **sequence** de la calculadora TI92 de Texas Instruments, variando r entre 1 y 4, pero manteniendo la condición inicial fija : $x_0 = 0.5$.

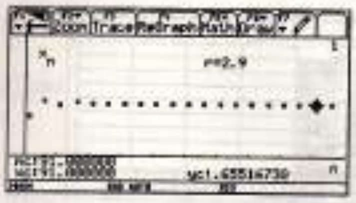
Existen tres opciones para graficar una secuencia de la forma $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \cdots)$. La opción TIME grafica n en el eje horizontal y x_n en el eje vertical. La opción WEB grafica x_{n-1} en el eje horizontal y x_n en el eje vertical. Adicionalmente se dibujan la recta $y = x$, y la curva $y = f(x)$ si trabajamos en modo AUTO. Finalmente, la opción CUSTOM permite que el usuario escoja las variables para cada uno de los ejes. (TI-92 Guidebook, 1995).

Los cuatro gráficos que siguen corresponden a los valores r=2, r=2.5, r=2.8 y r=2.9, opción TIME.

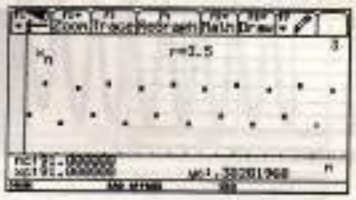


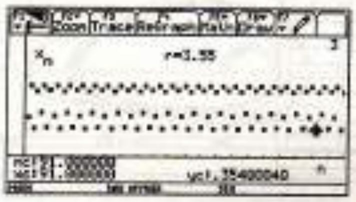


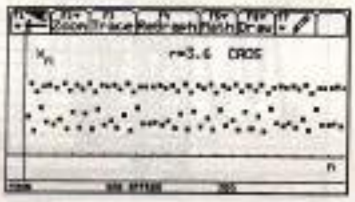




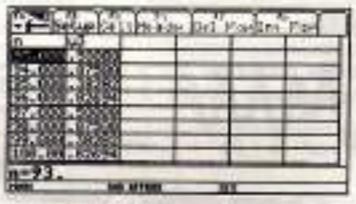
Podemos notar que para cada valor de $r \in]1,3[$, la sucesión x_n se estabiliza hacia una única población límite, y que esta es una función creciente de r. Pero para $r \geq 3$ veremos que la situación cambia. La población x_n no se estabiliza hacia una sola población límite, sino que oscila entre valores estables distintos que se alternan, conforme observamos en las gráficas que siguen :



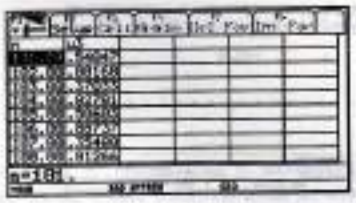




Para r=3.25, la población oscila entre los dos valores aproximados que siguen: 0.49526517 y 0.81242714. La población límite no es única, y tenemos un ciclo que consiste de dos poblaciones distintas, es decir, un ciclo con periodo dos. Para r=3.5 tenemos un ciclo con periodo cuatro, cuyos valores aproximados son : 0.38281968, 0.50088421, 0.82694071 y 0.87499726. La tabla que sigue confirma nuestra afirmación :



Para r=3.55 tenemos un ciclo con periodo ocho, con valores aproximados : 0.35480, 0.37033, 0.50603, 0.54047, 0.81266, 0.82781, 0.88168 y 0.88737. Las tablas siguientes confirman esta periodicidad :



Para r=3.6 la población cambia de forma aleatoria entre períodos de tiempo sucesivos. La duplicación de período observada anteriormente aumenta rápidamente, produciendo caos, para valores de r cercanos a 3.57. Las siguientes tablas sugieren el comportamiento caótico de la población :

La tabla que sigue resume el fenómeno de la duplicación de período, hasta producirse un caos.

R	3	3.5	3.55	3.565	$3.56 \le r < 4$
período del ciclo	2	4	8	16	**Caos**

8. La ecuación forzada de Duffing

Analizaremos el fenómeno del caos relacionado con la ecuación forzada de Duffing, utilizada para modelar vibraciones no lineales amortiguadas (Edwards & Penney, 1994, 572-577) :

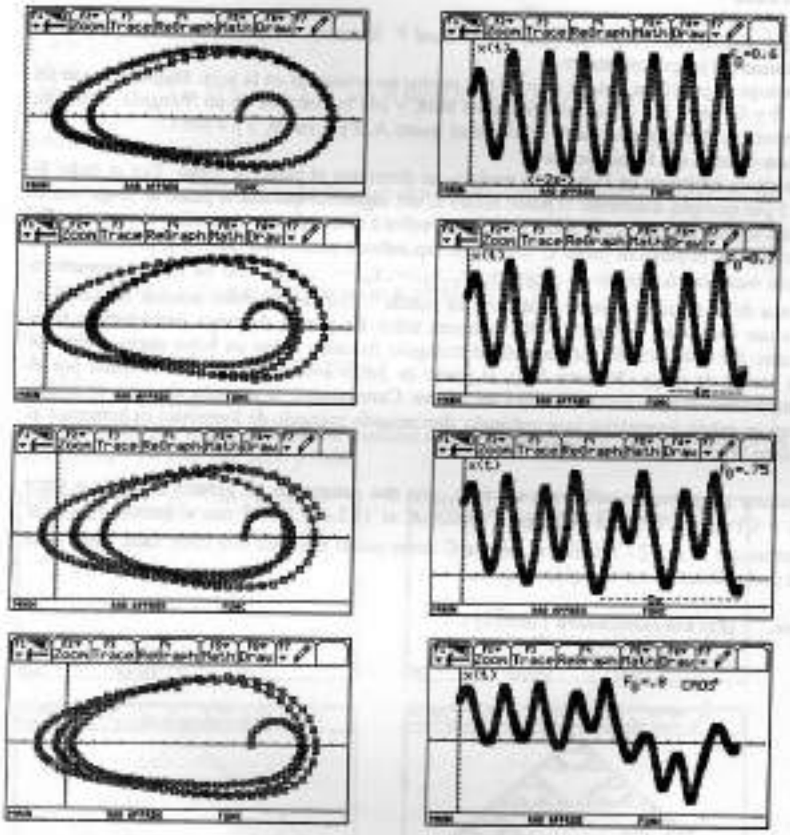
$$mx''+cx'+kx+\beta x^3 = F_0\cos(\omega t) \qquad (2)$$

al variar el valor de la amplitud de la fuerza externa F_0. Utilizaremos los siguientes valores para los parámetros que aparecen en la ecuación : $m=c=\beta=\omega=1$, $k=-1$. Las condiciones iniciales utilizadas son : x(0)=1, x'(0)=0.

La ecuación (2) se transforma en el sistema (3), si hacemos x' = y :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^3 - y + F_0 \cos t \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Las gráficas que siguen representan las soluciones del sistema anterior, para los valores de $F_0 = 0.6, 0.7, 0.75\ y\ 0.8$. La gráfica izquierda describe la trayectoria en el plano de fase x=x(t), y=y(t) para que determinemos el comportamiento cualitativo de la solución, mientras que la gráfica derecha representa la curva solución x=x(t) en el plano tx, lo que nos permite obtener el periodo y la frecuencia de la solución.



Las gráficas de la solución x=x(t) fueron dibujadas en el intervalo de tiempo $[0, 16\pi]$. Podemos notar que para $F_0 = 0.6$, la solución es periódica con periodo 2π. Para $F_0 = 0.7$ existe una duplicación del

periodo, es decir, el periodo de la solución es 4π, mientras que para $F_0 = 0.75$ el periodo de la solución vuelve a duplicarse, alcanzando el valor de 8π. Este fenómeno de la duplicación del periodo de la solución produce caos para $F_0 = 0.8$, ocasionando una pérdida total del periodo de la misma.
La siguiente tabla contiene algunos valores de F_0 con los periodos de las soluciones correspondientes :

F_0	0.6	0.7	0.75	0.8	1.0	1.07	1.10
Periodo de la solución	2π	4π	8π	**caos**	6π	12π	**caos**

9. El juego del caos

El siguiente juego, denominado juego del Caos por Michael F. Barnsley, tiene muchas variantes. Una de las versiones clásicas del juego consiste en:

> Tome una hoja de papel, un lápiz, y marque tres puntos no colineales en la hoja. Etiquételos con las letras A, B y C. Estos son denominados puntos base, y son los vértices de un triángulo. Tome un dado corriente, e identifique los lados 1 y 6 con el punto A, 2 y 5 con B, 3 y 4 con C.

Las reglas para el juego son las siguientes :

Dibuje un punto x_0 arbitrario en la hoja. El punto x_0 se denomina el punto de juego. Tire el dado. Si sale el número 5 por ejemplo, determine el punto medio x_1 del segmento que une el punto de juego con el punto A. El punto x_1 pasa a ser el nuevo punto de juego. Vuelva a tirar el dado y determine el punto medio x_2 del segmento que une el punto de juego x_1 con el correspondiente punto base. Repita el procedimiento, para obtener una sucesión de puntos de juego $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ ¿ Qué tipo de patrón geométrico forman los puntos de la sucesión anterior, cuando n es grande ?. Una de las observaciones es que si un punto de juego cae dentro del triángulo ABC, entonces todos los puntos de juego posteriores a él se encontrarán dentro del triángulo. En este sentido el triángulo funciona como un hoyo negro o bien un atractor de los puntos de juego. Por otro lado, el punto de juego eventualmente será atrapado por el triángulo, no importando si x_0 se encuentra fuera del mismo. Curiosamente la sucesión aleatoria de puntos de juego formará un patrón geométrico bien ordenado, denominado triángulo de Sierpinski en homenaje al matemático polaco Waclaw Sierpinski (1882-1969).

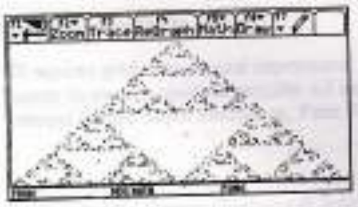
Para el siguiente programa no utilizamos un dado, sino que generamos un número aleatorio n entre cero y uno. Si $n \le 1/3$ una el punto de juego al vértice A, si $1/3 < n \le 2/3$ una el punto de juego al vértice B mientras que si $n > 2/3$ utilice el vértice C como punto base. En este caso, cada punto base tiene la misma probabilidad de ser escogido.

Programa caos. [Para la calculadora TI89/92]

```
caos( )
Prgm
ClrDraw
0 → xmin
1 → xmax
0 → ymin
1 → ymax
Local a,b,c,d
1 → a
2 → b
3 → c
```

```
4 → d
rand( ) → x
rand( ) → y      { selecciona aleatoriamente el punto de juego }
0 → i
Lbl a
i + 1 → i
PtOn x, y        { dibuja el punto de juego }
If i > 1000      { número máximo de iteraciones }
Goto d
rand( ) → n
If n ≤ 1/3
Goto b
If n > 2/3
Goto c
0.5*x → x        { si 1/3 < n ≤ 2/3 , una el punto de juego al punto A=(0,0) }
0.5*y → y
Goto a
Lbl b
0.5*(x + 1) → x  { una el punto de juego al punto B=(1,0) }
0.5*y → y
Goto a
Lbl c
0.5*(x + 0.5) → x  { una el punto de juego al punto C=(1/2,1) }
0.5*(y + 1) → y
Goto a
Lbl d            { finaliza el programa }
EndPrgm
```

Las figuras que siguen representan corridas del programa para los siguientes números máximos de iteracciones : i = 100, 500, 1000 y 5000.



Conclusión

La calculadora TI89/92plus es un excelente apoyo didáctico en el proceso enseñanza-aprendizaje, pues nos permite interactuar dinámicamente con múltiples representaciones de objetos matemáticos, modelar y simular situaciones que no podemos o no debemos de experimentar en un laboratorio. Existe un grande potencial en ellas para que los estudiantes puedan experimentar, conjeturar, verificar y contextualizar las matemáticas.

Bibliografía

[1] Balacheff, N.; Kaput, J.J. *Computer-based learning environments in mathematics*, 1996.

[2] Bauldry, W.; Ellis, W.; Fiedler, J.; Giordano, F.; Judson, P.; Lodi, E.; Vitray, R.; West, R. *Mathematics and Modeling*. Addison Wesley, 1997.

[3] Bishop A., Clemens K.; Keytel Cl; Kilpatrick J.; Laborde C. (Eds). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht Kluwer.

[4] De Faria, C. "Aplicaciones de la calculadora TI92 al cálculo". *Memoria V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemáticas*. Liberia, Costa Rica, 1997.

[5] Edwards & Penney. *Ecuaciones Diferenciales Elementales*, Tercera Edición. Prentice Hall Hispanoameri- cana, S.A., México, 1994.

[6] Gómez P. Tecnología y educación matemática. *Revista de Informática Educativa*. Vol. 10, No. 1, Colombia, 1998.

[7] Li, T., Yorke, J. "Periodo Three implies chaos". *American Mathematical Monthly 82.NCTM (1996-97)* Position Statements. Handbook, 1975.

[8] Texas Instruments. *TI-92 Guidebook*, 1975.

[9] Texas Instruments. *TI-89 Guidebook*, 1998.

[10] TI92 Plus Module: *A Supplement to the TI92 Guidebook*. Texas Instruments, 1998.

[11] Waits, B.; Demana, F. "Soundoff. A computer for All Students—Revisited". *Mathematics teacher online*, Vol. 89 No.9, December, 1996.

Conceptos básicos para el diseño de páginas Web

Alcides Astorga Morales[1]

1. Introducción

En los últimos años Internet ha revolucionado la informática, y como parte de ésta, la World Wide Web (WWW) ha actuado como puente, de esta manera logra universalizar la tecnología y al mismo tiempo la acerca al usuario doméstico.

Actualmente, el desarrollo de una página Web está al alcance de cualquier persona que tenga conocimientos básicos de computación, disponibilidad del equipo y los programas apropiados, pero sobre todo debe ser lo suficientemente creativo y aportar algunas ideas interesantes para obtener el producto deseado.

Mediante este taller se busca acercar al usuario a la WWW, brindándole los conceptos básicos para el desarrollo de una página Web, y posteriormente pueda crear sus propias páginas con el fin de utilizarlas durante el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática.

2. Pasos previos para elaborar su página Web

El usuario debe realizar una planificación relacionada con aspectos tales como: ¿cuál es la información que desea publicar?, ¿Cuál es su público meta?, ¿Cuáles elementos desea incorporar: imágenes, fotografías, botones, sonidos, animaciones, videos, aplets, etc ? ¿Cuáles herramientas son necesarias para diseñar su página?

Debe invertir tiempo en recopilar todos los datos que introducirá y además, realizar un boceto previo de su estructura y diseño.

3. Requerimientos de software

3.1 Herramientas de autor

Dependiendo de los requerimientos de la página, se necesitarán algunos conocimientos de HTML (Hyper Text Markup Languaje), y un editor de textos (puede ser el Bloc de Notas). En la actualidad, la tendencia es utilizar herramientas del tipo WYSIWYG (lo que ve es lo que tiene). Una de éstas, es la aplicación Microsoft FrontPage, la cual permite diseñar páginas de gran complejidad en un tiempo mínimo y no requiere una formación computacional avanzada.

3.2 Herramientas de dibujo

El aspecto gráfico es de vital importancia durante la elaboración de una página Web, ya que permite captar de manera rápida la atención del lector, por lo que se recomienda disponer de algún programa de retoque gráfico como: PhotoShop, Paint Shop Pro, Corel Draw, etc.

---

[1] *Coordinador, Carrera Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora Instituto Tecnológico de Costa Rica.*

3.3 Elementos gráficos

Existen varias formas de conseguir este tipo de elementos, una de las más habituales es encontrarlos en la misma red, en paquetes gráficos. En estos casos, su utilización debe ser cuidadosa, debido a que usted únicamente podrá utilizar los que son de uso libre(freeware), o respetar los derechos de autor. Cuando se desee incorporar GIFs animados se le sugiere usar paquetes comerciales que están a la venta o los que se localizan en la red. Por ejemplo:

GIF Construction Set: http://www.mindworkshop.com/alchemy/gifcon.html
GIF Animator de Microsoft: ftp://ftp.lander.es/pub/windows95/imagen/gifsetup.exe

4. Requerimientos de hardware

Una computadora que tenga instalado Windows, kit de multimedia (para incorporar sonido o video). Un modem o tarjeta de red, conexión a Internet por si desea publicar su página en la WWW.

5. Conclusión

La página Web es una herramienta novedosa en el campo de la computación, que puede ser utilizada para desarrollar procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Esto parece no ser una utopía en el campo de la Educación, ya que, su elaboración no demanda conocimientos muy elevados para los actuales y futuros docentes afines a esta disciplina.

Nota: Para publicar su página en la Web, en forma gratuita, se pueden consultar las siguientes direcciones:
http://www.geocities.com
http://www.ciudadfutura.com

Bibliografía

[1] De Riquer, E. "¿Cómo publicar su propia página Web?", *PC Media*, No. 12, Año III, España, pp. 18-33, 1995.

[2] Villarreal B. Diego, *Manual de HTML*, Instituto Tecnológico de Costa Rica, 1999.

Construcciones geométricas con cabri

Susana V. Barrera ; [1]
A. Homero Flores S. [2]

Resumen

En el presente taller, dirigido a profesores del nivel medio, presentamos una serie de problemas de construcción geométrica. Se propone el uso del programa de geometría dinámica CABRI como la herramienta para realizar las construcciones. El objetivo principal es darle al profesor de matemáticas una forma de enseñar la geometría en la cual se integren las construcciones en la elaboración de conjeturas y en su validación. A diferencia de la regla y el compás y dado el carácter dinámico del programa, su uso permite una mejor visualización de las posibles demostraciones de las conjeturas. El taller tiene una duración de dos horas.

Palabras Clave: Conjeturas, Geometría Dinámica, Construcciones Geométricas.

Introducción

En la mayoría de los programas de matemáticas de las escuelas de nivel medio superior (bachillerato) de la República Mexicana los temas de geometría euclidiana se han ido perdiendo, al grado que, en los que todavía se estudia la geometría, ésta se limita a los temas básicos de geometría plana (conceptos fundamentales, semejanza y congruencia de triángulos, teorema de Pitágoras y algunos elementos de trigonometría). Las construcciones con regla y compás se estudian en el nivel inmediato inferior (secundaria) y se refieren a la construcción de rectas paralelas, perpendiculares, ángulos rectos, etcétera, pero se trata como un tema aislado que no se vuelve a tocar, a pesar de que el programa pone énfasis en la construcción con regla y compás en los demás temas de geometría. Esto se debe a la pobre preparación de los profesores en temas de geometría.

En el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), uno de los dos subsistemas de bachillerato de la Universidad Autónoma de México, el programa de matemáticas del tronco común (que comprende los dos primeros años de los tres del programa) contempla el estudio de la geometría plana y del espacio a un nivel un poco más profundo que en el ciclo anterior. Entre los objetivos del estudio de la geometría en el CCH destaca el referente al desarrollo en el alumno la habilidad de plantear conjeturas y validarlas, como un primer acercamiento a la demostración formal de teoremas.

El propósito del presente taller consiste en darle al profesor de matemáticas del nivel medio una idea de cómo se pueden utilizar las construcciones geométricas, con regla y compás, para plantear conjeturas en temas básicos de geometría euclidiano diferentes a los tratados habitualmente por un profesor de este nivel. El uso del programa de geometría dinámica CABRI (ya sea en su versión para la calculadora TI-92 o en microcomputadora) permite, según experiencia de los autores, visualizar mejor una manera de validar las conjeturas planteadas.

Actividades

Los participantes al taller resolverán una serie de problemas de construcción geométrica con regla y

[1] Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, e-mail: survictor@servidor.unam.mx
[2] Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, e-mail: ahfs@servidor.unam.mx

compás. Utilizarán el CABRI para sustituir las herramientas. Esto implica que se usará el programa sólo como regla y compás; aunque se pueden utilizar todos los comandos después de hecha la construcción.

Problema 1: Dados una circunferencia y un punto fuera de ella, trazar la tangente a la circunferencia que pase por el punto.

Problema 2: Trazar una circunferencia tangente a dos rectas paralelas que pase por un punto dado entre las mismas.

Problema 3: Por el interior de una circunferencia fija rueda, tocándola sin deslizarse, otra circunferencia cuyo radio es de la mitad del radio de la primera. ¿Qué línea describirá un punto K sobre la circunferencia rodante?

Problema 4: Sea una circunferencia y un punto fuera de ella. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos equidistantes al punto dado y a un punto sobre la circunferencia?

Problema 5: ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos para los cuales las tangentes de dos circunferencias dadas tienen igual longitud?

Bibliografía

[1] Bellemain, F., Laborde, J. *CABRI- GEOMETRE. Manual para MacIntosh y PC. USA.*
[2] Clemens et al. *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* Addison-Wesley, 1989.
[3] Monographie du CIP. *Apprivoiser la géométrie avec Cabri- Géomètre.* Novembre, 1996
[4] Vasiliev, N.B; Gutenmájer, V. L. *Rectas y Curvas.* Edit. Mir. Moscú, 1980.

Usando Cabri Geometric para demostrar conceptos básicos de algebra

Roberta M. Eisenberg[1]

1. Introducción

Computer geometry systems (CGS) han sido usados durante algún tiempo para investigar dinámicamente varios teoremas geométricos, para que las y los estudiantes puedan ver las figuras en movimiento y explorar con ellas. Previamente, deberían de haber hecho muchas construcciones con regla y compás.

Incluso a los alumnos más aventajados les llevó mucho tiempo elaborar un número importante de construcciones geométricas cuando sólo utilizan la regla y el compás. Ahora, con CGS, pueden hacer muchas construcciones y ver los resultados rápidamente, no solo cinco o diez construcciones, sino docenas. ¿Se podrá hacer algo similar en el campo del álgebra elemental?. La respuesta es definitivamente sí.

En julio de 1999 formé parte de un equipo internacional que pasó una semana en The Ohio State University, "Casa del Poder de Visualización", donde empezó el movimiento T^3: Teachers Teaching with Technology (Maestros Enseñando con Tecnologia), escribiendo materiales para un programa piloto para usar el *computer algebra system* (CAS) de la TI-89, con el fin de enseñar álgebra elemental a través de precálculo. El mismo CAS está en la TI-92.

Mi grupo trabajó en conceptos básicos de álgebra elemental. Yo desarrollé diferentes formas geométricas en CABRI Geometría para ilustrar algunos de estos conceptos. Estos materiales, ahora en forma de borrador, están siendo usados este año escolar por los autores y serán revisados el próximo verano. En este momento es demasiado pronto para decir si estos materiales serán, eventualmente, un instituto T^3.

La intención de este taller es compartir con los participantes algunos de estos materiales.

2. Las actividades a realizar

El concepto más básico de álgebra es el de variable. Muchos estudiantes, incluso después de varios años, todavía piensan que x es 1 cada vez que no pueden ver el coeficiente de la variable. Pueden hacer innumerables ejercicios sustituyendo valores por variables en expresiones; y aun así, afirmar todavia que "x es 1" cuando x aparece con el coeficiente de 1 "invisible".

No interiorizan el hecho de que $1x = x$, y prefieren transferir el valor del coeficiente al valor de la variable. Además de los tipos de ejercicios tradicionales para construir el concepto de variable, considero que un acercamiento geométrico puede ayudar.

En la primera investigación, dibujaremos una pequeña porción de una recta numérica, que denominaremos "la línea variable" . Sus puntos finales serán 0 y "a". Luego mediremos la distancia de 0 a "a". El punto final "a" es entonces arrastrado libremente, para ver muchos valores de la variable y

[1] Richard R. Green High School of Teaching.

relacionarlos con la longitud del segmento de extremos en 0 y "a". De esta forma, el o la estudiante puede ver la longitud del segmento cambiar y el valor de la variable "a" cambiar con ella.

El próximo paso es construir más de "una línea variable"–en la que se vea 0, a, 2a, 3a, -a, y -2a. Medimos las distancias de 0 a varios de los puntos anteriormente citados. Entonces cuando el punto con la etiqueta "a" es desplazado libremente, todos los demás cambian de acuerdo a como lo hacen las medidas. Se espera que esta presentación dinámica ayude a los estudiantes a ver que "a" o "x" o cualquier otra variable raramente es igual a 1.

Lo anterior lleva a la discusión de que el valor absoluto de una variable puede también ser investigado en dos dimensiones usando la geometría analítica y la opción *locus* (lugar geométrico) de CABRI. No quiero decir demasiado sobre esta investigación porque será una sorpresa durante el taller.

Otra investigación involucra la ley asociativa de la multiplicación. Construyendo rectángulos de diferentes maneras, los estudiantes pueden visualizar la ley. Podemos cambiar el tamaño de los rectángulos "arrastrando" puntos y observar como cambian las áreas.

De forma similar, la ley distributiva de la multiplicación sobre la suma puede ser investigada usando áreas de rectángulos. Un ejercicio relacionado es una demostración dinámica de la multiplicación de dos binomios en general y el caso especial de un binomio al cuadrado. Esto es muy interesante como método para hacer que los alumnos dejen de intentar expander $(x + y)^2$ como $x^2 + y^2$. Como dice el Dr Frank Demana, cofundador con Dr Bert Waits de T^3, con sabia agudeza, "Es verdad en base 2."

3. Los requisitos de los participantes

El taller está dirigido a profesores y profesoras de matemática de la educación secundaria y a estudiantes universitarios de las carreras de enseñanza de la matemática.

Es preferible que tengan alguna experiencia con la calculadora TI-92 y especialmente con la opción CABRI geometría de esta calculadora. Si este no fuera el caso creo que también puede ser de provecho para los participantes, aunque tal vez no podamos cubrir todas las actividades previstas.

En todo caso, para hacer las demostraciones propuestas explicaremos paso a paso como lograrlo en CABRI Geometría.

Roberta M. Eisenberg ha enseñando matemáticas a nivel secundario desde 1962. En este momento, enseña en la Richard R. Green High School of Teaching en Manhattan (NYC). Es presidenta del Comité de maestros de Matemáticas de la Federación Unida de Maestros (grupo afiliado al NCTM). Ha pasado mucho tiempo "jugando" con sus calculadoras gráficas desde que compró la primera TI-81 en 1990. Ha dado docenas de talleres para maestros desde aquel entonces, tanto en la Ciudad de Nueva York y en el Estado de Nueva York, como en las últimas Conferencias Internacionales T^3.

Enseñanza de la geometría en primaria y secundaria con el programa CABRI II de la calculadora programable TI-92

Jeanina Alfaro A.; Sara Araya B.; Alejandra Esquivel[1]

Introducción

Desde tiempos remotos los docentes se han visto influenciados por dificultades que les impiden enseñar la geometría de una forma fácil y práctica. Uno de los factores imprescindibles de mencionar, es el caso de los pocos recursos didácticos y tecnológicos con los que cuentan para poder lograr el objetivo deseado, al impartir los programas correspondientes a dicho tema. Es por esta razón por lo que se está luchando, para que el día de mañana las lecciones sean más amenas y, de esta manera, los estudiantes puedan adquirir un conocimiento mas completo y eficiente. Además, actualmente los profesores de matemáticas tienen el desafío de aprender a enseñar de manera diferente a la forma en que tradicionalmente lo han hecho, debido a que los alumnos reciben información de otros medios sumamente atrayentes.

Tomando en cuenta que las calculadoras ofrecen muchas oportunidades para la investigación de propiedades numéricas, para la exploración de patrones y la visualización o comprobación, se plantea este taller en el que sugieren distintas actividades a implementar en el aula, con ayuda de la calculadora programable TI-92. Está dirigido principalmente a docentes de primaria y secundaria.

Como con este equipo se manifiestan distintos puntos de discusión, ya que surgen preguntas acerca de ¿Cómo debe usarse esta tecnología en la enseñanza de las matemáticas?, ¿Cuál es su impacto en el aula?, ¿Cuál es su repercusión en los currícula?, entre otros puntos, como alumnas queremos compartir experiencias que hemos tenido en nuestras clases de geometría, y es por esto que podemos decir que, en efecto, la tecnología tiene la potencialidad de modernizar las aulas y hacer las matemáticas más pertinentes e interesantes para los estudiantes. Las calculadoras son herramientas para ahorrar tiempo que nos ayudan a automatizar y realizar tareas repetitivas y tediosas, por lo que que permiten liberar al estudiante para que concentre sus esfuerzos en el razonamiento y en la resolución de problemas.

En el taller se trabajará con una guía para el manejo de la calculadora TI-92, con una descripción de los comandos de la aplicación de geometría, para que las personas que tengan su primer contacto con la calculadora. En esta guía se va haciendo una introducción paulatina del uso de la aplicación de geometría en esta calculadora. Posteriormente se plantean actividades en las que se mencionan los pasos a seguir para las construcciones geométricas. Una última fase de este taller trata sobre teoremas que únicamente se enuncian y es necesario verificar con la ayuda de la calculadora.

Metodología

Se trabajará en grupos de dos personas y cada uno tendrá su calculadora.

Sesión 1

Construcciones geométricas:

1. Descripción de cada menú.

---

[1] Alumnas de décimo año, Colegio Científico Costarricense, Sede San Carlos, ITCR, C. R.

2. Construcción de polígonos irregulares.
3. Construcción de polígonos regulares.
4. Construcción de ángulos, medidas de ángulos.
5. Cálculos de áreas, perímetros, etc.

Sesión 2

Actividad N°1

1. Propiedades de los triángulos.
2. Teorema de Pitágoras.
3. Propiedad del triángulo con un lado igual a un diámetro y vértice en la circunferencia.
4. Propiedad del ortocentro de un triángulo.
5. Propiedad del baricentro de un triángulo.
6. Propiedad del circuncentro de un triángulo.
7. Propiedad del incentro de un triángulo.

Actividad N°2

1. Obtención del número π.
2. Algunas propiedades de círculos.
3. Algunas propiedades de círculos y triángulos.

Bibliografía

[1] Mora, A. et al. *Cabri-Geomètre en la calculadora TI-92*. Proyecto T3, España, 1998.
[2] Farfán R. *Resúmenes de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Clame, 1997.

Una herramienta didáctica para los profesores: la calculadora graficadora TI-92® y Windows ®

Victor J. Rojas S.; Erick J. Salas P.; José F. Rodríguez.

Considerando el gran número de actividades que hoy en día tienen los profesores y las demandas que los avances científicos y tecnológicos exigen de ellos, se plantea este taller con el propósito de brindarle a los profesores una herramienta didáctica que le permita realizar sus tareas rutinarias tales como: Planeamiento de clases, elaboración de pruebas escritas y elaboración de material didáctico. Todo esto gracias a las facilidades que presenta un software versátil que los usuarios de calculadoras gráficas TI pueden usar para transferir archivos de la calculadora a la computadora.

Objetivos

1. El manejo de los comandos básicos para la utilización de la calculadora TI-92®.
2. El uso del editor de textos de la calculadora TI-92®.
3. Uso de la interfase (Link), para la comunicación de datos entre la calculadora gráfica TI-92® y la computadora.
4. La utilización de Windows® y la calculadora para la manipulación de gráficas.

Metodología

Este taller está preparado para tres sesiones de dos horas cada una.

I Sesión

1. Bienvenida y presentación de objetivos.
2. Introducción y descripción a la calculadora gráfica TI-92®.
3. Descripción de comandos y funciones básicas de la calculadora gráfica TI-92®.
4. Descripción de las funciones del editor de textos de la calculadora TI-92®.

II Sesión

1. Utilización básica de la calculadora para realizar gráficas.
2. Descripción de la interfase (Link), aditamentos y requerimientos para la instalación del software.
3. Descripción de las funciones del programa de interfase.
4. Procedimientos para la utilización del software de comunicación.

III Sesión

[1] Manejo y alteración de las gráficas en ambiente Windows®.
[2] Presentación de Posibles problemas con el software o hardware y su solución.
[3] Utilización de los programas de Windows® y el software de comunicación integrados.
[4] Práctica aclaratoria.

Parte IV

Metodologías e ideas para el mejoramiento de la enseñanza de la matemática

Enseñanza de la matemática asistida por computadora: experiencia en el Instituto Tecnológico de Costa Rica

Alcides Astorga M.[1]
Alejandra Sánchez A.[2]

Resumen

En este documento se exponen algunas de las principales experiencias desarrolladas en la carrera Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, la cual se imparte en el Instituto Tecnológico de Costa Rica. También, se hacen breves recomendaciones sobre el potencial uso didáctico de los principales programas de uso general disponible en el mercado informático (Word, Excel, Power Point), así como de paquetes específicos del campo de la matemática (Derive, Mathematica, Geometer's SketchPad).

Situación actual de la enseñanza de la matemática en Costa Rica

A pesar de la política educativa impulsada por el Ministerio de Educación Pública, bajo un estamento constructivista, racionalista y humanista, la práctica docente que se refleja en el aula dista mucho de esto, al menos en el campo de la matemática. El docente no es el mediador pedagógico que propugna el constructivismo, ni el alumno el protagonista. La enseñanza tiene una fuerte orientación a la memorización y a la aplicación repetitiva de algoritmos, sin llegar a la comprensión de los conceptos y procedimientos utilizados.

Los programas, en lugar de orientarse a cumplir la frase de Piaget
" *El ideal de la educación no es aprender lo máximo, ni maximizar los resultados, sino aprender a aprender...* ",
tienen una fuerte tendencia hacia los contenidos, insistiendo en el cumplimiento de éstos independientemente del grado de asimilación por parte de los estudiantes. Las metodologías se orientan más hacia la resolución de ejercicios, y por ende, a la reproducción de conductas elevándolo a la categoría de método de aprendizaje y por tanto, de comprensión de los conceptos matemáticos involucrados. Se parte del supuesto que las y los alumnos que resuelven una práctica considerable serán capaces de determinar analogías, para lograr generalizar los procedimientos aplicados en ejercicios con características similares.

La concepción de procesos didácticos, centrados en el aprendizaje del alumno, solamente es una realidad en los libros y un ideal en la mente de muchos educadores, que tal vez algún día después de significantes esfuerzos por parte de todos los sectores relacionados con la educación pueda convertirse en un hecho concreto.

Las deficiencias en el estado actual de la educación matemática proporcionan razones suficientes para buscar un cambio metodológico, o al menos enriquecer y complementar los ya existentes.

Mientras fuera de las paredes de los recintos educativos, a nivel de, enseñanza media, está ocurriendo una revolución tecnológica que está cambiando la forma en que muchas áreas del conocimiento humano

---

[1] Coordinador, Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

[2] Estudiante y Asistente, Carrera Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

buscan entender y explicar el mundo social, económico y físico, en la educación estos cambios no se han reflejado sustancialmente.

Poco a poco, sin embargo, esta revolución está empezando a manifestarse, sigilosamente, demandando cambios en los planes de estudios, tanto para las y los alumnos como para las y los futuros educadores, encontrando siempre en este recorrido insignes detractores, así como grandes defensores, cuyas voces apenas empiezan a escucharse en los centros educativos.

Creación de la carrera Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora.

Como se mencionó anteriormente los tiempos actuales exigen un cambio en la práctica de las matemáticas, conllevando, por tanto, al planteamiento de reformas profundas en su enseñanza. Tal situación, se plantea así, no sólo, porque la nueva tecnología empuja hacia ese cambio, sino, porque las más recientes aplicaciones y teorías, han ampliado de manera significativa el modo de interpretar el mundo que nos rodea.

Una gran mayoría de nuestros estudiantes, padres, madres de familia, e incluso algunos educadores coinciden en describir las matemáticas como una asignatura muy difícil, con poca aplicación al mundo real y llena de trucos sin sentido, lo cual estimula la pasividad y desmotivación del alumno.

Para muchos estudiosos, el problema radica en que los métodos de enseñanza son obsoletos, lo cual hace que el proceso pedagógico sea aburrido y poco estimulante, para otros, esto se debe a los contenidos que conforman el plan de estudios en secundaria, ya que, propugnan por una matemática que les sea útil a los estudiantes, independientemente de si continuarán estudios superiores o no.

Una respuesta a la problemática de la matemática y su enseñanza lo ha aportado el paradigma de los procesos de aprendizaje asistidos por computadora, el cual en los últimos años ha recibido bastante análisis y sustento teórico de disciplinas como Psicología, Inteligencia Artificial, Pedagogía, etc.

Específicamente en Costa Rica, a partir de la administración del Dr. Oscar Arias Sánchez, el Ministerio de Educación Pública y la Fundación Omar Dengo, han buscado dotar a los diferentes centros educativos, tanto a nivel de primaria como secundaria, de una plataforma computacional, con el fin de iniciar un proceso de formación básica a los jóvenes estudiantes en el uso de la computadora, para el desarrollo de sus estructuras cognitivas. En cuanto a los docentes en ejercicio, se ha mantenido un proceso de capacitación, donde actualicen o amplíen sus conocimentos computacionales.

Sin embargo, este esfuerzo del Ministerio no ha logrado convencer a las y los docentes sobre la incorporación de la computadora en los procesos de enseñanza-aprendizaje, debido posiblemente a factores como:

- El docente no siente la necesidad de usar la computadora en los procesos de mediación pedagógica,
- no existen suficientes computadoras en la institución en que labora,
- no se tiene acceso al equipo computacional en la cantidad de tiempo que se quisiera,
- los programas computacionales disponibles no le llaman la atención o no le facilitan el desarrollo de algún tema,
- al docente, en ejercicio, no se le ha brindado la capacitación adecuada para la utilización de la computadora, tanto para su uso personal, como para darle un fin didáctico.
- Hasta 1996, los planes de estudios de las diferentes carreras dirigidas hacia la enseñanza de la matemática, que se imparten en los distintos centros de enseñanza superior, no incluían el estudio de procesos de aprendizaje asistidos por computadora.

Conscientes de la necesidad, de incluir en la formación de los futuros educadores de matemática las herramientas básicas computacionales y con el objetivo de utilizarlas en la práctica docente, el Instituto Tecnológico de Costa Rica, decidió ofrecer a partir de 1996, la carrera *Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora*, cuyo fin es:

"Formar profesionales con grado académico de bachiller, cuyo perfil ocupacional sea desempeñarse como docente en la especialidad de Matemática utilizando la computadora como herramienta didáctica".

En el primer semestre de 1996, la carrera recibió los primeros 40 estudiantes, provenientes de diferentes zonas del país, constituyéndose de esta forma, en la primera generación de futuros educadores que recibían una formación pedagógica diferente a la del resto de educandos universitarios del país.

Parte del enfoque de esta carrera, en los cursos se discute sobre las posibles ventajas y desventajas que representa la computadora en el aula, como un medio para:

- Que la y el docente presente algunos conceptos matemáticos utilizando el aspecto gráfico, la rapidez y precisión que ofrece esta nueva tecnología.
- Que la y el estudiante construyan las estructuras cognitivas que les faciliten la comprensión de los diferentes conceptos matemáticos, tomando en cuenta la parte formativa, así como, el factor de abstracción que caracteriza esta disciplina.

Durante el corto periodo que tiene la carrera, una de las principales satisfacciones obtenidas hasta la fecha, es la gran cantidad de aplicaciones computacionales con fines didácticos que se han generado en los diferentes cursos, y de los cuales se ofrece una muestra en este Primer Congreso de Enseñanza Asistida por Computadora.

La propuesta académica que se le hace al futuro educador ha estado orientada, en varios sentidos:

1. Ofrecer una formación sólida en el campo de la Matemática y de la Pedagogía.
2. Brindar una formación básica en el campo de la Computación, con el fin de que esté en capacidad de desarrollar procesos didácticos utilizando la computadora, así como, utilizar esta herramienta tecnológica para su uso personal.
3. Analizar críticamente los contenidos que se incluyen en los programas de estudio del III Ciclo y la Educación Diversificada, a la luz de los ideales, fines y objetivos propuestos en dichos documentos, confrontando éstos con la realidad del país.
4. Capacitar en la utilización de herramientas computacionales genéricas (Word, Excel, PowerPoint) en procesos de enseñanza-aprendizaje.
5. Recomendar los programas computacionales en el campo de la matemática que mejor permita el trabajo creativo y exploratorio de los estudiantes, bajo guías apropiadas y elaboradas en la mayoría de los casos por los docentes (Derive, Geometer's SketchPad, Mathematica).
6. Utilizar herramientas de desarrollo y lenguajes de programación de alto nivel para generar software en el campo de la Matemática, con fines didácticos (Director, ToolBook, VisualBasic, Mathematica).
7. Analizar la potencialidad de Internet, como una herramienta de apoyo en el proceso didáctico.

8. Fomentar en el estudiante la utilización de metodologías que estimulen el trabajo activo de los estudiantes: lección de juego, lección de laboratorio, estudio de casos, lección heurística, lección interrogativa.

Conductismo y Constructivismo

Al mencionar conceptos como metodologías para la enseñanza, no se puede omitir una referencia directa de las diferentes teorías de aprendizaje, las cuales vienen a aportar el sustento teórico para el quehacer docente.

Es importante resaltar en este punto dos escuelas de pensamiento del campo de la Psicología que han marcado significativamente el enfoque que ha tenido la educación costarricense, a saber: *la escuela conductista* y la *cognoscitivista*.

Las *teorías conductuales* consideran que el aprendizaje es un cambio en la frecuencia de aparición o la forma de comportamiento (respuesta), sobre todo como función de cambios ambientales. Los conductistas afirman que aprender consiste en la formación de asociaciones entre estímulos y respuestas y ven las conductas como determinadas por eventos externos al aprendiz - *por estímulos* -, los cuales generan unas ciertas *respuestas* y por *reforzamiento* que mantienen estas relaciones estímulo-respuesta. Esta escuela a pesar de que tuvo gran influencia en los primeros años de esta segunda mitad del siglo XX, en los últimos años ha decaído notoriamente.

Por su parte, las *teorías cognoscitivistas* subrayan la importancia de las estructuras mentales, el procesamiento de información, creencias y estados emocionales en la adquisición de conocimientos. Entre ellas destaca la escuela constructivista, para la cual la inteligencia está estructurada de modo organizado, es decir no se nace con ella, sino que conforme se asimilan elementos del medio, esta se transforma, se acomoda a las condiciones existentes y, de este manera, ella se modifica y evoluciona.

La adquisición del conocimiento se da en forma activa solo se conoce el mundo mediante la experiencia

" ... *el sujeto es el propio constructor de su conocimiento, así el intercambio que establezca con el medio y las acciones ejercidas sobre los objetos es fundamental para el desarrollo del conocimiento.* "

Si el individuo no es capaz de establecer relaciones entre conceptos nuevos y aquellos que ya han sido incorporados en su estructura, no verá en éstos un significado relevante y olvidará rápidamente.

Debido a la problemática que presenta la enseñanza de la matemática, durante los últimos años algunos autores han planteado diferentes marcos teóricos tendientes a destacar el papel de la computadora, como una herramienta que permite que el estudiante construya su conocimiento en una forma activa. Uno de ellos es Seymour Papert, el cual

" *llegó a la conclusión de que si se pretendía que los niños construyeran su propio conocimiento, esto no podía darse a partir de formulaciones abstractas o en ausencia de materiales que facilitaran dicha construcción. Papert considera que es la cultura la encargada de facilitar los recursos necesarios que den soporte a la construcción del aprendizaje.* "

Desde esta perspectiva, Papert cree que por medio de la computadora y disponiendo de los materiales adecuados para su desarrollo (en su caso Logo), y que cuente con ciertas características estimulantes y facilitadoras, que no solo ofrezcan estímulos, sino también respuestas a sus aciones puede lograr de parte del alumno una gran autonomía intelectual y afectiva.

En cualquier caso se debe tener presente que:

"Al diseñar un entorno educativo con computadoras es necesario incorporar otra perspectiva: la del diseño de situaciones propiamente educativas, a la luz de sus propósitos educativos específicos; esta consideración, asumida reflexiva e intencionadamente en un proyecto educativo en el que se utilizan computadoras, se puede convertir en la determinante del tipo de programa a usar, en función de la perspectiva educativa adoptada y de los productos esperados."

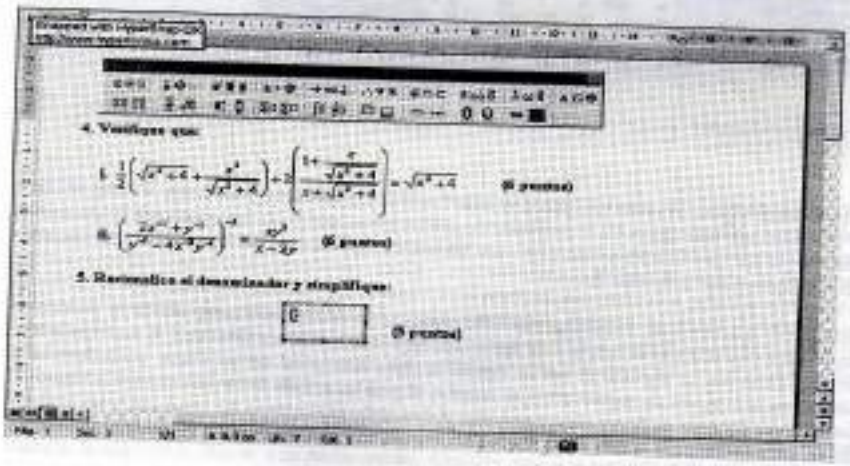
La computadora: una herramienta para aprender y para enseñar.

Procesadores de texto

El planteamiento que se hace a los educadores, es que, la computadora siempre la debe tener como una forma de superación personal y profesional, puesto que, como formador de ciudadanos, independientemente de la disciplina que le corresponda enseñar, debe ser un líder tanto para el grupo de colegas docentes, como para los y las estudiantes.

Los procesadores de texto, así como, la impresora láser y a color, equipos de proyección, etc, han venido a revolucionar la edición de material didáctico, sobre todo en el campo de la matemática, donde la máquina de escribir le brindaba muy pocas opciones al docente para elaborar sus documentos: prácticas y exámenes por la simbología matemática cuyos caracteres variaban tanto en tamaño, como en forma.

Sin embargo, con el advenimiento de la computadora y el desarrollo de múltiples procesadores de texto tales como: Word, Word Perfect, Ami Pro y PcTex, entre otros, esta tarea se ha simplificado. Por lo que, en los tiempos actuales, es inconcebible que los profesores de matemática editen documentos donde los radicales son hechos a mano, unos cocientes y exponentes en total desproporción con el resto de la expresión algebraica, originando que al mismo estudiante no le motive leer textos matemáticos.

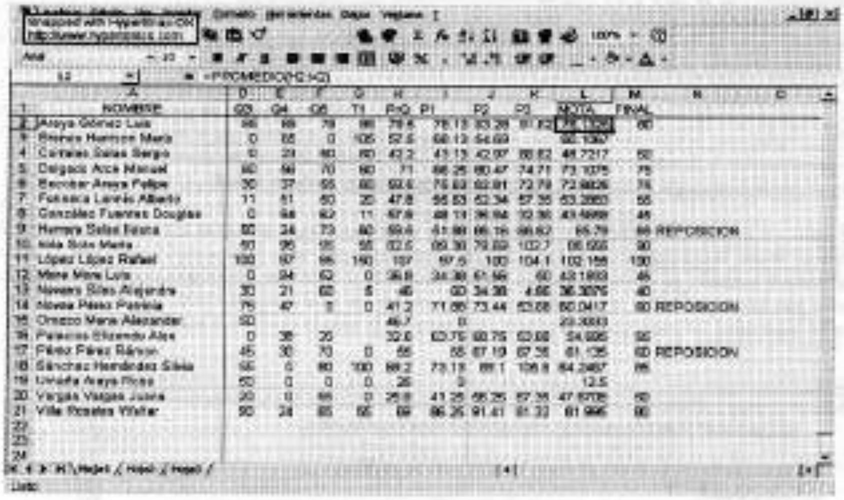


Otra ventaja, es que el mismo profesor al desarrollar sus planes de lección utilizando algún procesador de texto puede modificar y enriquecer su material en una forma más sencilla.

Hojas electrónicas

Bajo este nombre se incluyen los programas Excel, Lotus, Quatro Pro, y son de las herramientas más valiosas tanto para el uso personal del profesor, como para la creación de ambientes de aprendizaje basados en programas computacionales. Debido a que con la llegada de Windows, prácticamente la hoja electrónica que más se utiliza es Excel, en esta sección nos referiremos exclusivamente a esa herramienta computacional.

En cuanto, a la utilización personal, obviamente la mejor ayuda que nos ha dado Excel es descargarnos del engorroso trabajo de llevar el control de las calificaciones y obtención del promedio final.



	NOMBRE	Q3	Q4	Q5	T1	P.Q.	P1	P2	P3	NOTA	FINAL	
2	Araya Gómez Luis	96	99	79	98	79.6	78.13	83.28	81.82	[illegible]	80	
3	Barrera Herrera María	0	65	0	105	57.6	68.13	54.69		60.1067		
4	Corrales Salas Sergio	0	20	80	80	47.2	43.13	42.97	88.82	49.7217	50	
5	Delgado Arce Manuel	60	98	70	90	71	88.25	80.47	74.71	73.1075	75	
6	Escobar Araya Felipe	30	37	55	60	59.6	75.63	82.81	72.79	72.9826	75	
7	Fonseca Loría Alberto	11	51	60	20	47.8	55.63	62.34	57.35	63.2860	65	
8	González Fuentes Douglas	0	94	82	11	67.8	48.19	36.94	32.36	43.4999	45	
9	Herrera Salas Xinia	80	24	73	80	59.4	41.88	66.16	66.67	65.79	66	REPOSICION
10	Mata Soto María	80	95	95	95	82.6	89.38	79.69	102.7	86.666	90	
11	López López Rafael	100	97	96	140	107	97.5	100	104.1	102.156	100	
12	Mora Mora Luis	0	94	62	0	36.8	34.38	61.56	60	43.1893	45	
13	Navarro Sileo Alejandra	30	21	62	5	46	60	34.38	4.66	36.3075	40	
14	Novoa Pérez Patricia	75	47	3	0	41.2	71.88	73.44	63.68	60.0417	60	REPOSICION
15	Orozco Mora Alexander	50				46.7	0			23.3333		
16	Palacios Elizondo Alex	0	38	25		32.6	63.75	68.75	63.68	54.695	55	
17	Pérez Pérez Ramón	45	30	70	0	65	55	67.19	67.35	61.135	60	REPOSICION
18	Sánchez Hernández Silvia	56	0	80	100	69.2	73.13	89.1	106.9	84.2467	85	
19	Ureña Araya Rosa	50	0	0	0	25	0			12.5		
20	Vargas Vargas Juana	20	0	68	0	25.8	41.25	66.25	57.35	47.6708	50	
21	Villa Rosales Walter	90	24	85	65	69	86.25	91.41	81.33	81.996	80	

Pero sin duda alguna, la ayuda que puede brindar Excel no termina aquí, pues puede ser muy útil para hacer el aprendizaje más agradable y motivante de ciertos temas, dentro de los cuales puede ubicarse la Estadística, ya sea que se utilicen las funciones preestablecidas en la hoja, o construyendo pequeños módulos de aprendizaje utilizando Excel.

Otra posible aplicación del Excel está más relacionada con la resolución y comprensión de problemas, utilizando para ello el hecho de que la hoja fue creada bajo un fundamento funcional, lo cual unido a su flexibilidad y rapidez, en algunos en vez de ocultar la parte conceptual del problema, puede brindar al estudiante una gran ayuda sin sugerir cómo se resuelve el problema. Esto es factible siempre y cuando el profesor elabore las guías en forma clara y permitan el desarrollo exploratorio del estudiante y no inhibe al estudiante para que analice la situación planteada y comprenda el modelo o planteamiento matemático requerido para resolver lo que se le plantea.

Programas computacionales para presentaciones

La práctica generada en este aspecto ha sido bastante rica en la cantidad de trabajos que han desarrollado los estudiantes en los cursos de la carrera. La herramienta básica que se ha utilizado ha sido Power Point, esto por la versatilidad que ofrece tanto en el programa mismo como con los hipervínculos que puede establecer con otros programas de Microsoft o de otras casas distribuidoras.

Con la llegada de Windows, unidades de CD, parlantes y micrófonos, los programas de la empresa Microsoft han incorporado bastante elementos de los denominados hipermedios (texto, sonido, animación, simulación de interactividad, colores, palabras calientes, botones), permitiendo así la navegación entre diferentes archivos y programas.

Si hiciéramos una división arbitraria del proceso enseñanza-aprendizaje se podría decir que Power-Point es una herramienta muy útil para mostrar cosas, y en el mejor de los casos enseñar, concibiendo este término en una forma bastante limitada. Power Point, en unión con otros programas computacionales permite, exponer conceptos matemáticos, y lograr cierta actividad de alumno brindando un ambiente rico en colores y dinamismo, permitiendo su uso tanto por el profesor para exponer a todo el grupo y lograr su atención y partición, así como permitiendo a los estudiantes trabajar en forma individual con la computadora, a su propio ritmo, repasando conceptos vistos en clase o adelantando en la materia. Desde el punto de vista de las teorías psicológicas del aprendizaje, los ambientes que se crean por medio del Power Point, son bastante conductistas.

La ventaja de usar una herramienta como Power Point es la capacidad su animación que se pierde al trasladar la diapositiva anterior a un medio escrito, situación que no se presenta en la computadora.

Programas computacionales orientados al aprendizaje

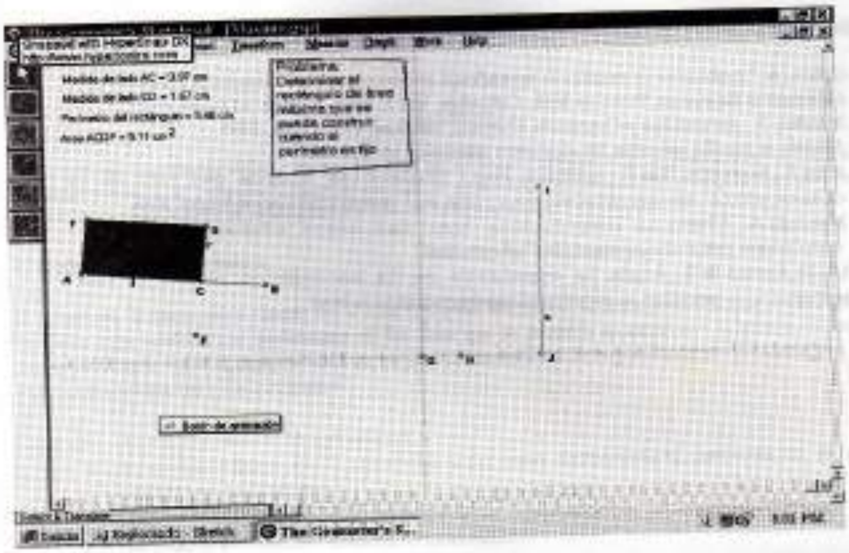
A nivel de enseñanza media, la computadora debe ser usada en los procesos didácticos solamente si tiene un aporte significativo, y no porque es algo que está de moda. El tipo de programa computacional que se utilice debe tener una curva de aprendizaje bastante baja, de forma tal que, si el estudiante interactúa con éste, no oscurezca el verdadero aprendizaje que se busca.

También, debe estimular el trabajo creativo, esto es, no brindar más información de la necesaria, ni dando respuestas prematuras coartando de esta forma el razonamiento del alumno.

Uno de los programas computacionales, que cumple con las características deseables para ser utilizado a nivel de secundaria, es el Geometer's SketchPad (Cabri).

Este tipo de software permite que el estudiante explore, analice, haga deducciones informales, hasta llegar a la deducción formal y por tanto se formen en el denominado rigor matemático. Su curva de aprendizaje es bastante sencilla, y permite la creación de ambientes de aprendizaje bastante constructivistas. El profesor se convierte en un mediador pedagógico, el programa computacional es transparente y las dificultades de su manejo el estudiante "no las siente".

Como se menciona en el manual de Geometer's SketchPad, los textos tradicionales de geometría esperan que los estudiantes inicien el empleo de la deducción formal desde el inicio. Poco se hace para capacitarlos para que visualicen y planteen sus propias conjeturas. De las observaciones de clase, los profesores Pierre van Hiele y Dina van Hiele-Geldorf notaron que los estudiantes pasan a través de una serie de niveles en el desarrollo del pensamiento geométrico: visualización, análisis, deducción informal, deducción formal y rigor.", bajo esta filosofía fue desarrollado el mencionado programa. En cualquier caso el uso correcto o incorrecto del SketchPad dependerá de la mediación del profesor.



Plataformas de desarrollo (ambientes de multimedios)

Otra alternativa en la cual se está incursionando en la carrera, es el desarrollo de programas con características de multimedia, y que permita bastante interactividad por parte del alumno. Para esto se está utilizando prioritariamente herramientas de autor como Director (Macromedia). Algunas de las experiencias serán obtenidas serán expuestas en este congreso.

Uso de Internet y desarrollo de páginas Web con fines didácticos

Durante los últimos semestres, se está incursionando en realizar propuestas concretas sobre la utilización de Internet en la formación profesional del futuro educador, así como, analizar el potencial uso del aula virtual en la enseñanza de la matemática, utilizando el ambiente proporcionado por la WWW. Propuestas iniciales a este paradigma se estarán tratando en este congreso.

Conclusiones

En las páginas anteriores se expusieron algunas opiniones sustentadas en la experiencia docente adquirida en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, así como en las recomendaciones didácticas que hacen algunos autores sobre el uso de la computadora en el aula. La conclusión final que se debe tener, es que los programas computacionales no se deben usar en forma indiscriminada y creer que nos van a resolver todos problemas en la enseñanza de la matemática, porque la computadora es una herramienta más, que en muchos debe ser complementada con las metodologías tradicionales. Pero, lo que no podemos obviar los educadores actuales es capacitarnos en el uso de herramientas computacionales porque *los estudiantes que vivirán y trabajarán utilizando computadoras como herramientas de rutina necesitan aprender* *matemáticas diferentes a las de sus progenitores. Las prácticas escolares comunes, basadas en tradiciones con varios siglos de antigüedad, sencillamente no pueden preparar de manera adecuada a los estudiantes para las necesidades del siglo XXI.*

Bibliografía

[1]. Galvis, A. "Ambientes de enseñanza-aprendizaje enriquecidos con computador", *Boletín de Informática Educativa*, Proyecto SIIE, Colombia, Vol 1, Num. 2, pags. 117-139, 1988.

[2]. Méndez, Z., *Aprendizaje y Cognición*. EUNED, San José, Costa Rica, 1995.

Además se pueden consultar los siguientes materiales en Internet:

[3]. Mara F.; Sanromán; Ana R.; Solórzano, Juan J. Tendencias acerca del uso de la computadora en la educación. : iteso.mx/~juanjo/informacion/teucoe.html

[4]. Minakata A., Alberto. La computadora como mediadora educativa: www.jalisco.gob.mx/srias/educacion/7alberto.html

[5]. Angela Alemán de S., Angela. La enseñanza de la matemática asistida por computadora. : www.utp.ac.pa/articulos/ensenarmatematica.html

Enseñanza de la geometría en sétimo año con el programa Geometer's Sketchpad

Luis Gdo. Meza Cascante[1]

Resumen

Se presenta un resumen del informe de investigación del proyecto "Enseñanza de la geometría en sétimo año con Geometer's Sketchpad", desarrollado en la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica, e inscrito en la Vicerrectoría de Investigación y Extensión bajo el código 5402-1440-0301.

1. Definición del problema

El programa de matemática vigente del Tercer Ciclo del Ministerio de Educación Pública de la República de Costa Rica contiene una declaratoria de los fines que se pretende alcanzar con el mismo. Tales fines tienen pertinencia desde el punto de vista de las tendencias actuales de la enseñanza de la matemática. Estos fines pretenden que las y los estudiantes:

- Aprendan a valorar las matemáticas.
- Se sientan seguros de su capacidad para hacer matemáticas y confianza en su propio pensamiento matemático.
- Lleguen a resolver problemas matemáticos.
- Aprendan a comunicarse mediante la matemática.
- Aprendan a razonar matemáticamente.
- Experimenten situaciones abundantes y variadas, relacionadas entre sí, que los lleven a valorar las tareas matemáticas, desarrollar hábitos mentales matemáticos, entender y apreciar el papel que las matemáticas cumplen en los asuntos humanos.
- Exploren y puedan predecir, e incluso cometer errores y corregirlos de forma que ganen confianza en su propia capacidad de resolver problemas simples y complejos.
- Puedan leer, escribir y debatir sobre las matemáticas, y que formulen hipótesis, comprobarlas y elaborar argumentos sobre la validez de las hipótesis.
- Se familiarice con la unidad de las matemáticas.
- Tengan experiencias variadas con relación a la evolución cultural, histórica y científica de las matemáticas de forma que puedan apreciar el papel que cumplen las matemáticas en el desarrollo de nuestra sociedad y el impacto que tiene en nuestra cultura y en nuestras vidas.
- Exploren las relaciones existentes entre las matemáticas y las disciplinas con las que interactúan.

Mi experiencia profesional adquirida durante el ejercicio de la docencia en el campo de la matemática por más de veinte años me permitió detectar un problema que merece atención: la existencia de una brecha importante entre lo pretendido por el programa oficial de matemática de la educación secundaria y lo realmente desarrollado en el aula.

[1] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Contribuir a cerrar esa brecha ha sido la intención principal del presente proyecto de investigación, trabajando particularmente en el área de geometría de sétimo año, utilizando un programa computacional cuyas características son potencialmente prometedoras para lograrlo.

2. Objetivos

2.1. Objetivos generales

- Diseñar un conjunto de sesiones de aprendizaje para el logro de los objetivos propuestos en el programa de la educación secundaria, nivel de sétimo año, en el área de la geometría, en las cuales se utilice el programa Geometer's Sketchpad, que favorezcan el logro de los fines expresados por el Ministerio de Educación en el programa de matemática de la educación secundaria.
- Elaborar un manual de la profesora o del profesor, con orientaciones didácticas, que le permitan utilizar el conjunto de lecciones diseñadas en el desarrollo de procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

2.2. Objetivos específicos

1. Identificar los objetivos y los contenidos del área de geometría del programa de educación secundaria.
2. Identificar los objetivos del área de geometría que pueden lograrse mediante procesos educativos asistidos por computadora desarrollados con el programa Geometer's Sketchpad.
3. Diseñar sesiones de aprendizaje para alcanzar cada uno de los objetivos del área de geometría susceptibles de ser logrados con apoyo de la computadora y el programa Geometer's Sketchpad.
4. Redactar las guías de trabajo que las y los estudiantes deben utilizar en las sesiones de aprendizaje diseñadas.
5. Redactar un manual de la profesora o del profesor con orientaciones que les permitan utilizar las sesiones de aprendizaje diseñadas y desarrollar un proceso apropiado de evaluación formativa.

3. Alcances y limitaciones

El proyecto de investigación abarcó exclusivamente los objetivos y los contenidos del área de geometría que, según el programa oficial, deben cubrirse en sétimo año.

Los esfuerzos se centraron en aquellos objetivos para cuyo logro era posible desarrollar sesiones de aprendizaje sustentados con el programa Geometer's Sketchpad. Fue de interés primario diseñar sesiones de aprendizaje que promuevan ambientes de aprendizaje caracterizados por la exploración, el establecimiento de conjeturas, el descubrimiento, el trabajo en equipo y la comunicación de resultados. Por esta razón, se trabajó con aquellos objetivos que favorecieran el descubrimiento de definiciones y de propiedades, y en algunos casos, la verificación de proposiciones geométricas.

Para los objetivos cuyo propósito es resolver problemas de aplicación de las proposiciones geométricas estudiadas no se diseñaron sesiones de aprendizaje. Lo anterior porque no encontramos como utilizar ventajosamente el programa en tales situaciones, de manera que resultaran situaciones educativas más ricas y variadas que las tradicionales. Esto no significa que no se pueda. Pero en la investigación realizada no fue posible generar tales situaciones. Como consecuencia de lo anterior, no se diseñó ninguna sesión de aprendizaje, ni archivo alguno en el programa Geometer's Sketchpad, para los objetivos 10, 13 y 22.

El conjunto de sesiones de aprendizaje diseñadas constituye un aporte para el logro de los objetivos del programa oficial, pero no son suficientes para el logro de todos los objetivos. La profesora o el profesor de matemática responsable de cada grupo debe planificar su proceso de enseñanza y diseñar estrategias complementarias para asegurar el logro de todos los objetivos.

4. Características generales de los resultados de la investigación

La investigación dio como resultado cuatro distintos tipos productos. Estos productos son:

- 22 archivos del tipo documentos de trabajo (sketchs)
- 10 archivos del tipo guión (scripts)
- el "Cuaderno de actividades de la estudiante o del estudiante"
- el "Manual de la profesora o del profesor"

En conjunto estos productos se combinan para generar 41 sesiones de aprendizaje sobre los objetivos y contenidos del área de geometría de sétimo año, según el programa oficial.

Las sesiones de aprendizaje son independientes, lo que significa que la profesora o el profesor tiene completa libertad para determinar cuales de ellas desarrollar con sus estudiantes. Por esta razón, el conjunto de sesiones de aprendizaje está dotado de una flexibilidad muy amplia, lo que permite ajustarlo a diversas condiciones de tiempo y disponibilidad de recursos.

Las sesiones de aprendizaje cubren 21 de los 25 objetivos del programa y el 95% de los contenidos.

Además, las sesiones de aprendizaje permiten alcanzar objetivos adicionales, totalmente coherentes con las nuevas tendencias de la enseñanza de la matemática. En este sentido las y los estudiantes tienen la oportunidad de participar de procesos de enseñanza-aprendizaje activos, centrados en el descubrimiento y la verificación, y caracterizados por el trabajo en equipo y la comunicación de resultados.

Las sesiones de aprendizaje fueron diseñadas para estudiantes con poca o ninguna experiencia con el programa Geometer's Sketchpad. Tampoco se requiere que las profesoras o los profesores tengan una amplia experiencia con el software.

5. Metodología

La investigación tomó como referencia el programa que el Ministerio de Educación Pública tiene vigente en el área de matemática. Específicamente, se consideró la sección de geometría de sétimo año.

Cada uno de los objetivos, 25 en total, y los contenidos correspondientes, fueron analizados con el fin de seleccionar aquellos que fueran susceptibles de ser logrados mediante sesiones de aprendizaje apoyadas con el programa Geometer's Sketchpad.

Esta actividad se basó, principalmente, en la experticia del autor tanto como profesor de matemática, de planeamiento educativo y de metodología de la enseñanza de la matemática, como en el programa

Geometer's Sketchpad, en el cual ha programado una importante cantidad de sesiones de aprendizaje sobre diversos temas.

Para cada uno de los objetivos seleccionados se procedió a identificar estrategias didácticas, trabajo fundamentado en revisión bibliográfica y en la experiencia del autor como profesor de matemática por más de veinte años.

Esta parte del trabajo mostró la necesidad de desarrollar sesiones de aprendizaje integradoras, esto es, sesiones en las que las y los estudiantes tengan la oportunidad de utilizar diferentes conceptos y proposiciones . Lo anterior, con el propósito de evitar un enfoque atomizado de los contenidos.

Además, y con la intención de ubicar las sesiones de aprendizaje dentro de los cánones de las tendencias actuales en la enseñanza de la matemática, fueron diseñadas de manera que requieran una participación activa de las y los estudiantes, dentro de ambientes de aprendizaje caracterizados por la exploración, el establecimiento de conjeturas, el descubrimiento, la búsqueda de argumentos para sustentar las conclusiones, el trabajo en equipo y la comunicación de resultados.

Seleccionada la estrategia didáctica que se consideró apropiada, se procedió al trabajo de diseño y programación de cada una de las sesiones de aprendizaje. Esta etapa se desarrolló en cuatro fases:

- programación de archivos tipo documento de trabajo en Geometer's Sketchpad
- programación de archivos tipo guiones en Geometer's Sketchpad
- redacción de guías para las y los estudiantes para cada una las sesiones de aprendizaje
- redacción de un manual de la profesora o del profesor.

El trabajo de las primeras tres fases se retroalimentó con la colaboración de ocho estudiantes de secundaria y de un profesor de matemática de la educación media, quienes participaron de algunas de las sesiones de aprendizaje e hicieron valiosas recomendaciones.

6. Orientaciones didácticas

Para desarrollar las sesiones de aprendizaje con sus alumnos es necesario e importante que el profesor o la profesora tome en cuenta lo siguiente.

6.1. La disponibilidad de equipo

En las instituciones en las que se desarrolla procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática apoyados por computadora, se cuenta con variadas posibilidades en cuanto a la disposición del equipo. Algunas veces se cuenta con una sola computadora en el aula, a veces con una computadora y algún dispositivo que permite amplificar la imagen del monitor (data show, convertidor de señales, etc.). En unas ocasiones se cuenta con varias computadoras y otras, con un laboratorio de computadoras en el mejor sentido del concepto.

El programa Geometer's Sketchpad fue diseñado para apoyar sesiones de aprendizaje en cualquiera de las situaciones indicadas anteriormente. En el diseño de las sesiones de aprendizaje también hemos considerado esta situación. De esto se desprende que las sesiones pueden utilizarse en un laboratorio de computadoras, con una sola computadora en el aula, o con una computadora y un dispositivo de ampliación de la imagen.

6.2. El papel del profesor o de la profesora

El profesor o la profesora de matemática es el o la responsable principal de planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por tanto, debe ver las sesiones de aprendizaje diseñadas como un recurso, uno más, que el profesor o la profesora puede utilizar siempre que considere que pueden serle de utilidad, según los objetivos, los contenidos, los recursos, el tiempo, las características de los participantes.

Su papel, cuando los estudiantes desarrollan las sesiones de aprendizaje, debe ser el de un guía o facilitador. Tiene la responsabilidad principal de orientar y de desarrollar los procesos de evaluación que sean necesarios. Además, le compete complementar lo necesario.

6.3. La disposición al cambio

Es necesario que el profesor o la profesora esté en disposición de asumir un papel, que para muchas y muchos es diferente al que han jugado antes, que favorezca que sus estudiantes aprendan en un ambiente rico en experiencias. Esto significa que debemos favorecer el desarrollo de procesos educativos en los cuales los estudiantes sean los protagonistas principales.

6.4. La articulación con otras actividades

Las sesiones de aprendizaje deben complementarse con otras sesiones de aprendizaje de otro estilo y con otros recursos para cubrir la totalidad de los contenidos y de los objetivos que el programa oficial propone. Por tanto, aun cuando disponga de computadoras todo el tiempo debe planificar actividades complementarias, que incluyan otros recursos, pues las sesiones de aprendizaje no cubren la totalidad de los objetivos del programa.

Esto es verdad especialmente en aquellos objetivos relacionados con la solución de problemas en los cuales se aplican las proposiciones geométricas estudiadas, o que involucran construcciones geométricas con regla y compás.

6.5. El planeamiento didáctico

En el diseño de las sesiones de aprendizaje partimos de una premisa básica: el uso de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática debe enmarcarse en un planeamiento educativo. En consecuencia, tanto el desarrollo de las sesiones de aprendizaje como las actividades complementarias deben enmarcarse en un planeamiento didáctico completo, con la identificación de objetivos, actividades, recursos y estrategias de evaluación.

6.6. La importancia de la evaluación formativa

Por la naturaleza de las sesiones de aprendizaje, principalmente aquellas que promueven la exploración y el descubrimiento, es importante que el profesor o la profesora establezca estrategias de evaluación formativa que le permitan controlar que las conclusiones a las que llegan las y los estudiantes sean correctas.

El profesor puede hacer uso de varios recursos y procedimientos para realizar la evaluación formativa. Por ejemplo, puede recurrir a las exposiciones individuales o grupales, con una sesión plenaria de presentación de resultados, o puede optar por los informes escritos.

Somos partidarios de la opinión de que, en todo caso, siempre es importante la discusión de las conclusiones con la participación de todo el grupo, con el fin de corregir los errores que se pueden haber colado.

6.7. El trabajo en equipo

Según la experiencia de los profesores que usan Geometer's Sketchpad en el aula es mejor el trabajo en parejas que el individual (Key Curriculum Press, 1993).

Los estudiantes aprenden mejor cuando pueden comunicar lo que están aprendiendo, y aquellos estudiantes que trabajen en equipo pueden estimularse mutuamente en la consecución de las metas y objetivos.

Por eso, aunque tenga suficientes computadoras se recomienda el trabajo en parejas o en equipos.

6.8. La comunicación de resultados

Nos ha parecido importante sugerir, en una buena cantidad de las sesiones de aprendizaje, que se generen las condiciones para que las y los estudiantes puedan exponer los resultados de su trabajo. Estamos convencidos de la importancia de que las y los estudiantes comuniquen los resultados, pues esto favorece el desarrollo de las habilidades de expresión y mejora la comprensión de los conceptos y de las propiedades matemáticas.

Si las exposiciones se hacen con claridad y precisión contribuyen a formar en las y los estudiantes el hábito por la precisión y claridad tanto en la conceptualización como en el razonamiento.

6.9. Poner el énfasis en la parte formativa

Estudiamos matemática con un fin formativo para disciplinar nuestra mente y cultivar nuestra capacidad de razonamiento. Estudiando matemática podemos desarrollar la imaginación, ejercitar el poder de generalización y abstracción, dominar el uso del simbolismo, ganar precisión en el uso del lenguaje, así como exactitud y claridad en la expresión de conceptos y razonamientos.

Aún cuando para muchas personas no sea necesario utilizar la matemática con carácter práctico o instrumental, sí utilizarán en cualquier circunstancia y en cualquier profesión y oficio, el poder de razonar correctamente adquirido mediante el estudio disciplinador de la matemática.

6.10. Los estudiantes pueden asumir el papel de investigadores

Motive a las y los estudiantes a emprender sus propias investigaciones: insista cada vez que le sea posible para que las y los estudiantes, en forma individual o grupal, amplíen la investigación que desarrollan explorando nuevas propiedades o nuevos casos. Motívelos para que permanentemente identifiquen nuevas propiedades y relaciones entre los objetos con los que están trabajando.

6.11. Otras recomendaciones

Además de lo indicado anteriormente, recomendamos a las profesoras y profesores tomar en cuenta lo siguiente:

- puede utilizar las sesiones de aprendizaje como recurso principal para lograr los objetivos o puede utilizarlas como complemento de otras actividades.
- cuide que todos los estudiantes que integran un grupo trabajen con la computadora. Por tanto, evite que un o una estudiante acapare el uso del equipo computacional mientras los otros sólo miran.
- concientice a los y las estudiantes que no trabajan directamente con la computadora de que tienen tanta responsabilidad como el o la estudiante que opera la computadora.
- organice discusiones generales, especialmente de los resultados más importantes
- desplácese de grupo en grupo aclarando dudas, haciendo preguntas y manteniendo la atención de los estudiantes en el trabajo.

7. Conclusiones

Desarrollado el proceso de investigación se obtienen las siguientes conclusiones:

7.1. Sobre la factibilidad de diseñar sesiones de aprendizaje

Es factible diseñar sesiones de aprendizaje sustentadas con el programa Geometer's Sketchpad, para 21 de los 25 objetivos propuestos para sétimo año en el programa de matemática del Ministerio de Educación Pública.

Es factible cubrir un 95% de los contenidos propuestos para sétimo año en el programa de matemática del Ministerio de Educación Pública, con sesiones de aprendizaje sustentadas con el programa Geometer's Sketchpad.

7.2. Sobre las características de las sesiones de aprendizaje diseñadas

Las sesiones de aprendizaje utilizan el método de laboratorio, mediante el trabajo en equipo.
Algunas de las sesiones de aprendizaje corresponden a la estrategia de verificación de resultados, otras están diseñadas para utilizar la estrategia de descubrimiento.

Las sesiones de aprendizaje promueven la enseñanza de la matemática en ambientes caracterizados por la exploración, el descubrimiento, el planteamiento de conjeturas, la búsqueda de argumentos para sustentar las conjeturas, la comunicación de resultados y el trabajo en equipo.

7.3. Sobre los fines de la enseñanza de la matemática según el programa del MEP

Las sesiones de aprendizaje diseñadas como resultado el proyecto contribuyen a lograr los siguientes fines expresados en el programa de matemática del MEP: que las y los estudiantes...

- se sientan seguros de su capacidad para hacer matemáticas y confianza en su propio pensamiento matemático.
- lleguen a resolver problemas matemáticos.
- aprendan a razonar matemáticamente.

- experimenten situaciones abundantes y variadas, relacionadas entre sí, que los lleven a valorar las tareas matemáticas, desarrollar hábitos mentales matemáticos, entender y apreciar el papel que las matemáticas cumplen en los asuntos humanos.
- exploren y puedan predecir e incluso cometer errores y corregirlos de forma que ganen confianza en su propia capacidad de resolver problemas simples y complejos.
- puedan leer, escribir y debatir sobre las matemáticas, y que formulen hipótesis, comprobarlas y elaborar argumentos sobre la validez de las hipótesis.

7.4. Sobre el cumplimiento de los objetivos del proyecto

- se identificaron los objetivos y los contenidos del área de geometría del programa de educación secundaria.
- se identificaron los objetivos del área de geometría que pueden lograrse mediante procesos educativos asistidos por computadora desarrollados con el programa Geometer's Sketchpad.
- se diseñaron 41 sesiones de aprendizaje para alcanzar cada uno de los objetivos del área de geometría susceptibles de ser logrados con apoyo de la computadora y el programa Geometer's Sketchpad.
- se redactaron las guías de trabajo que las y los estudiantes deben utilizar en las sesiones de aprendizaje diseñadas.
- se redactó el manual de la profesora o del profesor con orientaciones que les permitan utilizar las sesiones de aprendizaje diseñadas y desarrollar un proceso apropiado de evaluación formativa.

Por tanto, se alcanzaron todos los objetivos propuestos en el proyecto de investigación.

8. Recomendaciones

Terminado el proyecto de investigación considero importante hacer las siguientes recomendaciones:

- Desarrollar un plan piloto en algunos colegios que permita la aplicación de los resultados del proyecto. Para subsanar la ausencia del programa Geometer's Sketchpad en los colegios se sugiere gestionar un permiso con la empresa Key Curriculum Press para utilizar el "demo" del programa que se encuentra en la red INTERNET.
- Impartir cursos de capacitación para profesoras y profesores de matemática que les prepare para desarrollar, bajo su propia responsabilidad, las sesiones de aprendizaje producidas en el proyecto.
- Formular y desarrollar proyectos similares al presente para los otros niveles de la educación secundaria.

Bibliografía

[1] Brones Espinoza, Fernando. *Principios y Técnicas de evaluación II*. Editorial EUNED. San José, Costa Rica, 1990.

[2] Calderón, E. "Los computadores en la educación, desarrollo científico y tecnológico prioritario para el futuro de Iberoamérica." *Informática Educativa*. V.3. No. 2. Colombia, 1990.

[3] Clemens, S.; O'Daffer, P.; Cooney, T. *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana. México D.F.: México, 1989.

[4] Galvis, A. "Reflexión acerca del uso del computador en educación primaria y secundaria." *Informática Educativa*. V. 4. No. 1. Colombia ,1991.
[5] Galvis, A. "Planeación estratégica de informática educativa". *Informática Educativa*. V.5. No.2. Colombia, 1992.
[6] Galvis, A. "Evaluación de materiales y ambientes educativos computarizados". *Informática Educativa*. V. 6. No. 1. Colombia, 1993.
[7] Key Curriculum Press. *La enseñanza de la geometría con The* ***Geometer's Sketchpad*** *(El Bloc de Dibujos del Geómetro)*. USA, 1993.
[8] Meza, L. G. *Eureka: The Solver. Conceptos fundamentales*. Publicaciones del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Cartago, 1991.
[9] Meza, L. G. Eureka: The Solver. Un recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas superiores. *Comunicación*. V.15. Cartago, 1992.
[10] Meza, G. *Cómo usar MathCad*. Editorial Tecnológica de Costa Rica. Cartago, C.R. 1994.
[11] Meza, L. G. "Computadoras en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática: una taxonomía". En: *Memorias del V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemática (ECADIM)*. Javier Trejos (editor). Liberia, Costa Rica, 1997.
[12] Meza, L. G. et al. "Planeamiento de procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática asistidos con software matemático". En: *Memorias del V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemática (ECADIM)*. Javier Trejos (editor). Liberia, Costa Rica, 1997.
[13] Meza, L. G. *Enseñanza de la matemática asistida por computadora: mitos, amenazas, retos y oportunidades*.
[14] Meza, L. G. "Sesiones interactivas programadas en **Geometer's Sketchpad**." En: *Memorias del Primer Congreso Internacional de Infomática Educativa para secundaria"*. San José, Costa Rica, 1998.
[15] Meza, L. G. "Experiencias educativas con **Geometer's Sketchpad**.". En: *Memorias del Primer Festival de Matemática*. San José, Costa Rica, 1998.
[16] Meza, L. G. "La pirámide de objetivos educativos y la enseñanza de la matemática en la educación secundaria". En: *Memorias del Primer Festival de Matemática. San José, Costa Rica*, 1998.
[17] Meza, L. G. "Enseñanza del cálculo diferencial e integral con apoyo del programa ***Geometer's Sketchpad***". Revista *Comunicación*, 1999.
[18] Meza, L. G. *Metodología de la enseñanza de la matemática*. Notas técnicas del curso "Teoría del aprendizaje 2". ITCR, 1997.
[19] Meza, L. G. "Estrategias didácticas para el desarrollo de procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática asistida por computadora". Presentado en el Taller *Matemática asistida por computadora*. ITCR. Sede Regional San Carlos, 1998.
[20] Meza, L. G. "¿Para qué enseñamos matemática en el colegio?". Sometido a la Revista UMBRAL, 1999.
[21] Meza, L. G. "Consideraciones sobre metodología de la enseñanza de la matemática". Sometido a la Revista UMBRAL, 1999.
[22] Ministerio de Educación Pública. *Programa de estudios: Tercer Ciclo. Matemática*. San José, Costa Rica, 1995.
[23] Parra, Cecilia; Saiz, Irma (compiladoras). *Didáctica de la matemática. Aportes y reflexiones*. Editorial Paidós Educador. Buenos Aires, 1994.
[24] Resnick, Lauren; Ford, Wendy. *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Editorial Paidós Educador. Barcelona, España, 1998.
[25] Rojas, T. "Creatividad y programación." *Informática Educativa*. V.4. No. 1. Colombia, 1991.
[26] Sancho, L. *Aplicaciones de la informática a la educación II*. EUNED. San José, Costa Rica, 1997.
[27] Santos, Trigo; Luz, Manuel; Sánchez, Ernesto. *Perspectivas en educación matemática*. Primera edición, Grupo Editorial Iberoamérica, México D.F., 1996.

[28] Santos, Trigo; Luz, Manuel. *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Primera edición, Grupo Editorial Iberoamérica, México D.F., 1996.

[29] Scott, P. "La computadora y la enseñanza de la matemática". *Educación Matemática*. V.2. No. 1. México, 1990.

[30] Scott, S.; Nick, J. *The Geometer's Sketchpad. Windows Quick Reference*. Key Curriculum Press, 1997.

[31] Trujillo, C. "Informática para apoyar el mejoramiento de la educación." *Informática Educativa*. V.5. No. 1. Colombia, 1992.

Ciencia, mujer y enseñanza de las matemáticas

Jeannette Barrantes M.[1]

Resumen

Históricamente el desarrollo de la ciencia y de la tecnología, y en general del conocimiento humano ha estado muy limitado a las mujeres y las pocas que han incursionado en esos campos lo han hecho a pesar de los obstáculos que han tenido que librar. No obstante lo anterior, muchas han sido las mujeres que han sobresalido tanto en el desarrollo de la ciencia como de otras disciplinas desde la época de los griegos hasta nuestros días.
Daremos un ligero vistazo a una parte de la historia del desarrollo de las matemáticas para concluir que las mujeres han sido constantemente desmotivadas a estudiar matemáticas y más bien las que han sobresalido han dado una fuerte y constante lucha para que tanto su trabajo como ellas mismas sean reconocidos.

La ciencia y la tecnología se están perdiendo del aporte de un buen porcentaje de talento humano, se podría decir que la mitad del talento humano, es el talento de las mujeres. La humanidad está perdiendo ese aporte que complementa el desarrollo de esas disciplinas, las cuales se han desarrollado históricamente en una forma casi completamente masculinizada.

Esa mitad de la humanidad no ha tenido el mismo acceso que la otra mitad al desarrollo de la ciencia y las matemáticas, por lo que el aporte de las mujeres no es lo significativo que podría ser, si se le ofrecieran las mismas oportunidades que se le han dado históricamente a los hombres. Se podría decir que las matemáticas, la ciencia y la tecnología se han desarrollado con un gran sesgo, cual es, la ausencia de la visión femenin

Los y las profesoras de matemática, tanto de educación primaria como de educación secundaria y también de educación superior, tenemos en esto una gran responsabilidad. La matemática no puede seguir siendo una materia desmotivadora , los y las profesoras de matemática no podemos seguir discriminando a las alumnas en las aulas aún cuando esta discriminación sea inconsciente e inintencional. Ser consciente de esto es el primer paso.

No tengo acceso a todo el desarrollo histórico de la ciencia y de la tecnología pues no necesariamente todo ese desarrollo ha sido recogido. No dudo que muchas culturas como la Maya, la Azteca y quizás la Inca, así como culturas orientales desarrollaron conocimiento que no fue recogido en la forma que sí se hizo con otras culturas como la Griega, la Egipcia y otras. La exposición que haré a continuación es, inevitablemente, desde el punto de vista "eurocentrista", sin embargo esto no quiere decir que no soy consciente de que hubo aportes importantes de otras culturas y de otras mujeres que no recojo aquí porque no dispongo de esa información.

Así pues, dando un ligero vistazo por la historia de las matemáticas de la que disponemos, podremos encontrar el importante aporte de mujeres como Hipatía quien a pesar de haber nacido en el año 370 dC, fue una maestra popular en la Escuela de Atenas y escribió varios documentos de matemática y física, asimismo creó el astrolabio y la esferaplana. Inventó un aparato para agua destilada, una para medir el nivel del agua y uno para determinar la gravedad específica de los líquidos. A esto se le llamó mas tarde un aerómetro o hidroscopio. Fue sacrificada por el patriarca de Alejandría, Cyril, quien la mandó a matar en el año 415 dC, pues creía que con sacrificar a una mujer virgen iba a ser mejor servido.

Las oportunidades científicas y educacionales de las mujeres no tuvieron un proceso paulatino progresivo, tampoco su aceptación en la Academia ni su aceptación como científicas o profesionales. Al respecto señala Teodora Tsijli en las Memorias del Tercer Congreso Nacional de Matemáticas, en la ponencia titulada Sofía Kovalevskaia, Cien años de su muerte:

---

[1] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

> *"En los Estados Unidos y en la segunda mitad del siglo XIX, se abrieron las puertas de muchas escuelas médicas a mujeres y negros. Ya al inicio del siglo XX estas posibilidades se cierran. Los niveles de incorporación de la mujer en las ciencias, en el siglo XX, son comparables a los de la segunda mitad del siglo pasado, llegando a la década de los setenta. Por aproximadamente cien años hubo retroceso. En Europa y específicamente Italia, las mujeres son admitidas en áreas como Física, Matemática, Anatomía, Fisiología en el siglo XVIII. Sin embargo a finales de ese mismo siglo no solamente se cierran las puertas a las mujeres sino que son eliminadas del registro histórico."*

Como ejemplo de lo señalado anteriormente, citaré a Emilie de Breteuil (1706-1749), quien pudo estudiar latín, italiano e inglés y no obstante estar casada compartió toda su vida con Voltaire con quien estudió el trabajo de Descartes y el de Newton. Emilie tradujo el trabajo de Newton al francés para hacerlo accesible a los matemáticos franceses. Ella trabajó en una investigación sobre el fuego y argumentó que la luz y el calor tiene la misma causa o son del mismo tipo de movimiento y descubrió que rayos de diferentes colores no liberan el mismo grado de calor. Entre sus tutores estuvo Samuel Koenig, con quien trabajó en tema de lo infinitamente pequeño; pero como nunca llegaron a un acuerdo decidieron disociarse. Cuando Emilie en 1740 publicó el libro Institutions of Physique, Koenig dijo a toda Francia que Emilie no había escrito ese libro; pero en 1752, después de la muerte de Emilie, Koenig escribió una carta diciendo la verdad.

Cotemporánea de Emilie, cabe señalar a María Gaetana Agnesi (1718-1799), quien a la edad de nueve años hablaba francés, latín, griego, hebreo y algunas otras lenguas. A esa edad escribió un discurso defendiendo la educación de las mujeres. En sus años de adolescencia debatía con hombres matemáticos sobre distintos temas: propagación de la luz, cuerpos transparentes y figuras curvilíneas en geometría. Nunca se casó, dedicó su vida al estudio de las matemáticas y a criar a sus 20 hermanos después de morir su madre. Desde los 20 años desarrolló su trabajo más importante: Instituciones Analíticas, basado en Cálculo Diferencial e Integral y publicado en 1748, el cual fue traducido al inglés y francés. Debido a un problema de traducción, mal intencionado o no, pero que se mantiene hasta nuestros días, se le nombra a esta matemática como la *bruja Agnesi* , al punto que los últimos textos de Cálculo Diferencial e Integral incluyen esa grosera y obsoleta terminología. Demás está decir que Agnesi nunca pudo entrar a la Academia Francesa por ser mujer; pero las Academias Italianas, mas liberales, si la aceptaron. Agnesi fue elegida por la Academia de las Ciencias de Bologna donde dedicaron su libro a la Emperatriz María Teresa. Después fue reconocida por el Papa Benedicto XIV quien estaba interesado en las matemáticas. Los últimos años de su vida los dedicó a obras caritativas para mujeres enfermas. En el primer centenario de su muerte pusieron su nombre a varias calles en Milán, Monza y Masciago y se becaron mujeres en su nombre.

Un ejemplo de una mujer apasionada por la astrología, quien le dio un importante aporte a esta ciencia a la vez que se convirtió en la primera mujer en tener un puesto de asistente dentro de la monarquía inglesa, lo fue Caroline Hershel (1750-1848), quien trabajó al lado de su hermano William, astrónomo que trabajó para el Rey Jorge III de Inglaterra. En 1783 descubrió la Nebulosa Andrómeda y a Cetus y añadió 14 nebulosas a la lista de las descubiertas. Fue la primera mujer en descubrir un cometa y detectó 8 en total. Trabajó arduamente recuperando y organizando el trabajo de su hermano y trabajó también con su sobrino quien continuó el trabajo de su padre. En 1828, Caroline publicó el catálogo de 1500 nebulosa descubiertas por los Hershel, por lo que la Sociedad Astronómica Royal le dio una medalla de oro. Cuando tenía 85 años la nombraron Miembro Honorario de la Sociedad Astronómica Royal, ella y Mary Somerville, fueron las *primeras mujeres en Inglaterra en tener ese título*. La Academia Irlandesa Real le otorgó el mismo título. El Rey de Prussia le dio una medalla de oro en las Ciencias a los 96 años.

Otra matemática reconocida en su época a pesar de costarle mucho en un principio abrirse espacio en el mundo de las ciencias, por ser de una familia pobre y además mujer, lo fue Mary Fairfax (1780-1872), quien de niña no tuvo una buena educación, además de que su familia se opuso a que estudiara pues quería que se dedicara a quehaceres domésticos. No obstante, ella se interesó en aprender latín y lo hizo por sí misma; a través del tutor de su hermano conoció los libros de Euclides, pues éste al ver el gran interés de Mary por buscar información de Algebra, se los hizo llegar. A los 24 años se casó y tuvo 2 hijos, a los 27 enviudó, lo que la dejó en pobre estado de salud. Ella se sobrepuso dedicándose de lleno a las matemáticas y la astronomía.

Después de resolver un problema matemático para una revista, el editor la llamó para trabajar con él. En 1812 se vuelve a casar y esto le permite conocer a otros matemáticos y astrónomos. En 1826 escribe su primer ensayo a la Sociedad Royal sobre las Propiedades Magnéticas de los Rayos Violetas del Espectro Solar. Lord Brougham la convence de escribir acerca de la Mecánica Celeste de Laplace, y Principia de Newton, publicando así dos volúmenes con observaciones propias de Mary. Además de esta publicación, escribió La Conexión de las Ciencias Físicas en 1834. Fue premiada por la Sociedad Británica Royal. Escribe Ciencia Molecular y Microscopía y lo publicó cuando tenía 89 años. Otros de sus trabajos fueron sobre la forma y la rotación de la Tierra, las mareas en el océano y la atmósfera. Obtuvo una medalla de oro en 1869 por la Sociedad Geográfica Royal, y otra por la Sociedad Geográfica Italiana. Murió a los 92 años.

Ada Augusta Lovelace (1815-1851) hoy en día es reconocida como la *primera persona en entender lenguajes de computadora y de programación*. Hija del famoso poeta inglés, Lord Byron. Su relación con Charles Babbage, el hombre que inventó la primera computadora, comenzó cuando ella visitaba su taller a temprana edad. Babbage estaba muy impresionado por la forma en que ella entendía su computadora. Luego, él pasó a ser su tutor y más tarde trabajaron juntos. La primera publicación de Ada Augusta fue una traducción y análisis de un ensayo escrito por un matemático italiano sobre la computadora de Babbage o como él lo llamó, su *motor analítico*. En sus notas personales, Ada Augusta dice que el *motor* sólo podía dar información disponible que ya fuera conocida. Ella vio claramente que no podía originar conocimiento. Ada Augusta también detectó que el *motor* podía generar música. Babbage sentía que ella entendía muy bien las operaciones de la máquina. Él nunca construyó su *Motor Analítico*; pero aún así Ada dejó su trabajo para los que siguieron estudiando ese campo. Murió a los 36 años. A pesar de que su trabajo fue olvidado por muchos años, los avances en la tecnología de computadoras ha ayudado a recobrar el interés en él, y finalmente su trabajo se ha ganado el reconocimiento merecido.

Afirma, T. Tsijli ([3]), en la ponencia sobre Sofía Kovalevskaia, en el III Congreso Nacional de Matemáticas, realizado en Costa Rica, que un importante empuje a la participación de la mujer en las ciencias se da en Rusia entre 1860 y 1870. Los nihilistas, quienes cuestionan la sociedad zarista aristocrática y patriarcal, consideran las ciencias naturales y la educación los medios de desarrollo y cambio social. Creen en la igualdad de derechos y capacidad de la mujer y crearon condiciones para alertar a éstas a desarrollar su talento en el estudio de las ciencias naturales y la medicina.

Sin embargo, muchas mujeres rusas no tuvieron apoyo gubernamental por lo que, para estudiar, tuvieron que salir hacia las universidades de Europa Occidental.

A pesar del triunfo de graduarse en Europa Occidental, centro indiscutible de investigación científica, no todas las mujeres pudieron desarrollarse como académicas por obstáculos que enfrentaron ante la oposición a su incorporación a la enseñanza superior y la investigación.

Sofía Kovalevskaia (1850-1891), es una buena representante de este grupo de mujeres rusas que salieron hacia Europa Occidental a cumplir sus sueños. Nacida en el seno de una familia de matemáticos y además aristocrática, su padre le permitió estudiar a la edad de los 15 años, sin embargo ya desde niña se interesaba por unos papeles tapices de su cuarto donde se hablaba de fórmulas que ella no lograba entender. Mientras recibía tutorías fue recordando todas las fórmulas que había visto en aquel papel y entonces logró comprenderlas.

Su primer libro se tituló "Recolecciones de la niñez", donde habla de sus experiencias durante esta etapa de su vida y sobre las discusiones filosóficas que tenía con un tío a quien le gustaba mucho las matemáticas. Conoce desde muy temprana edad la filosofía nihilista que responde a sus propios intereses hacia las matemáticas y la emancipación de la mujer. De hecho a lo largo de su vida siempre se identificó como miembro de este movimiento. Se casó a los 18 años con Vladimir Kovalevskai, lo que le permitió viajar a Europa Occidental e ingresar a Heidelberg y luego a Berlín donde trabaja a la par de Weierstrass. Obtuvo su doctorado en la Universidad de Göttingen en 1874.

Es importante anotar aquí que, Göttinger es la primera universidad que otorga el doctorado a una mujer. Aún así, casi 50 años después se opuso a la habilitación de Emmy Noether quien trabajó clandestinamente gracias a que Hilbert hizo a Emmy su ayudante y le prestó su nombre para que impartiera clases.

Siguiendo de nuevo con Sofía, ésta regresó a Rusia donde intentó trabajar, sin embargo tanto por su condición de mujer como por sus convicciones políticas y su grado académico alemán, no tuvo posibilidades de trabajo. Vuelve a Europa Occidental y también allí se le obstaculiza el trabajo por nihilista en una Europa tradicional y quizás sobre todo por ser mujer casada. La mujer podía estudiar por satisfacción personal, pero era el esposo quien mantenía el hogar. De hecho, la misma Sofía durante algunos años desatendió la actividad científica por varias razones, entre ellas, la maternidad y la imposibilidad de trabajar en Rusia. Escribió una especie de autobiografía titulada, "Una mujer nihilista, su incorporación en la lucha por establecer una universidad para mujeres". En 1881 se separa de Vladimir Kovalevskai y se traslada a París. Se incorpora a la Sociedad Matemática de París y se relaciona con los matemáticos Hermite, Picard y otros pero no consigue trabajo.

Los intentos por conseguir una cátedra en Helsinki y Estocolmo fueron infructuosos por sus ideas políticas y ser mujer separada de su esposo. Después de que Vladimir Kovalevskai se suicida (1883), en su digna condición de mujer viuda, recibe una oferta de trabajo, la cual acepta, como docente privada en la Universidad de Estocolmo. Posteriormente en 1889, obtiene la cátedra de Análisis en la misma universidad, en forma vitalicia, convirtiéndose en la *primera mujer en lograr este honor*, pese a la oposición inicial de sus colegas por sus posiciones políticas y posiblemente también por ser mujer. A pesar de su corta vida profesional recibió varios reconocimientos, Editora de Acta Matemática, en 1884; Premio de la Academia Francesa de Ciencias, por su trabajo sobre la rotación de un cuerpo sólido alrededor de un punto fijo.

Este premio le dio fama en toda Europa. También se le otorgó el premio de la Academia Sueca de Ciencias y se le nombró miembro de la Academia Imperial Rusa de Ciencias; también correspondiéndole ser la *primera mujer acreedora de tal distinción*.

Como sus contribuciones mas importantes, se consideran la prueba del teorema conocido como Teorema Cauchy-Kovalevskaia, condiciones para la existencia y unicidad de solución a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y el trabajo sobre movimiento de un campo sólido alrededor de un punto fijo. Publicó un total de 10 trabajos sobre reducción de una integral abeliana a una integral elíptica más simple, anillos de Saturno y la refracción de la luz en un medio de cristales. Paralelamente escribió varias obras, novelas, ensayos, poemas y teatro de tinte político social.

Nacida en París, Sophie Germain (1876-1931), tuvo también que luchar para estudiar y luego hacer matemáticas. Enfrentó la oposición de sus padres a que estudiara matemáticas y no pudo ir a la escuela porque no aceptaban mujeres, sin embargo se las ingenió para recibir apuntes de algunos profesores. Se interesó por el análisis de Lagrange y bajo un nombre ficticio le escribió. Este se impresionó tanto, que averiguó quién era y la visitó a su casa. Esto le dio a Sophie más coraje para seguir estudiando matemáticas.

A raíz de un libro que escribió Gauss, Sophie le escribió a éste usando el mismo pseudónimo que había usado con Lagrange. Gauss se interesó tanto en sus observaciones que mantuvieron correspondencia por muchos años. En 1916 ganó el primer lugar en la Academia Francesa de las Ciencias con un trabajo sobre la ley matemática de vibraciones de superficies elásticas, lo cual la situó entre los mejores matemáticos, logrando por fin la aceptación entre los círculos de académicos de la época. Continuó escribiendo sobre distintos problemas matemáticos y a su vez intercambiando correspondencia con Gauss, quien pidió a la Universidad de Gottingen que le dieran el grado de doctora. Murió antes de recibir dicho grado.

Deseo traer un ejemplo de lucha de otra mujer por abrirse espacio entre los hombres científicos y matemáticos de la época, a finales del siglo pasado e inicios del presente. Emmy Noether (1882-1935), tuvo que luchar y probar ser muy buena para que le permitieran trabajar, y gratis, pues las mujeres no podían percibir salario. Nacida en Alemania, en una familia que contenía 10 matemáticos en tres generaciones, recibió tutorías y en 1907 escribió su tesis doctoral: Sistemas Completos de Invariantes para Formas Bicuadráticas Ternarias. Emmy sustituía a su padre para dar clases cuando éste estaba enfermo. Luego su padre se retiró, su madre murió y ella se mudó a trabajar con su hermano en la Teoría de la Relatividad, de la cual ella ofreció la fórmula genuina y universal matemática. Luego comenzó a dar clases usando el nombre de Hilbert quien se lo prestó ya que por ser mujer no podía impartir cátedra.

Luego la nombraron profesora pero no recibía salario. En la Universidad de Gottingen se distinguió por su forma diferente de dar clases; siendo menos formal y más original al exponer sus temas. Su influencia en muchos matemáticos fue evidente y se caracterizaba por la facilidad de clarificar conceptos difíciles para otros. Fue llamada para trabajar en Europa, lo cual añadió mayor prestigio a su nombre. Ella formó con el trabajo de su padre, el teorema general de ideales en anillos arbitrarios, ayudando a establecer las tendencias axiomáticas e integrales de álgebra abstracta.

Trabajó por los años 20 con Hasse y Richard Brauer, en el tema de Algebra no conmutativa. Hasse publicó un ensayo con la teoría de Emmy y su investigación en la teoría de Algebra cíclica. En 1918, durante la revolución alemana, Emmy se inclinó por la política y los problemas sociales. Albert Einstein la catalogó como *la más grande, significativa y creativa genio matemático producida en la historia del desarrollo educativo de las mujeres.*

En este siglo XX, que ya casi finaliza la mujer debe seguir peleando un lugar en el desarrollo de las ciencias, la matemática y la tecnología. Una mujer que dio su lucha en este siglo y recibió un reconocimiento en forma de premio llamado paradójicamente *Hombre del Año en las Ciencias de Cómputo* por la *Data Processing Management Association*, lo fue Grace Murray Hooper (1906-1992) quien se graduó de Vassar College con grados en matemáticas y física y completó su maestría y doctorado en matemáticas en Yale. Trabajó en la primera computadora de automática secuencial digital a gran escala. En 1960 mostró por primera vez su versión de COBOL en dos computadoras. Fue la primera mujer nombrada *Distinguished fellow of the British Computer Society,* y la primera y única mujer almirante en la marina de Estados Unidos, hasta ahora.

Ante este ligero vistazo a una parte de la historia del desarrollo de las matemáticas, podríamos concluir que las mujeres han sido constantemente desmotivadas a estudiar matemáticas y más bien las que han sobresalido han dado una fuerte y constante lucha tanto para que su trabajo como ellas mismas sean reconocidos.

La ciencia y la tecnología se están perdiendo del aporte de un buen porcentaje de talento humano, se podría decir que la mitad del talento humano, es el talento de las mujeres. La humanidad está perdiendo ese aporte que complementa el desarrollo de esas disciplinas, las cuales se han desarrollado históricamente en una forma casi completamente masculinizada.

Esa mitad de la humanidad no ha tenido el mismo acceso que la otra mitad al desarrollo de la ciencia y las matemáticas, por lo que el aporte de las mujeres no es lo significativo que podría ser, si se le ofrecieran las mismas oportunidades que se le han dado históricamente a los hombres. Se podría decir que las matemáticas, la ciencia y la tecnología, se han desarrollado con un gran sesgo, cual es, la ausencia de la visión femenina.

Y qué sucede hoy en día al respecto? En Estados Unidos, el país más desarrollado del mundo, las mujeres conforman menos de 25% de la fuerza laboral empleada en los sectores de la ciencia y la tecnología, y sólo el 8% de los ingenieros en Estados Unidos son mujeres, según datos de la Fundación Nacional de Ciencias. Del mismo modo, el porcentaje de mujeres que se gradúan de la universidad en ciencias de la computación ha disminuido en los últimos diez años. Pareciera que en nuestros días las mujeres se siguen inclinando por carreras que tienen pocas matemáticas, no obstante haber logrado incursionar con más fuerza en los medios universitarios y en los ambientes políticos ocupando puestos de importancia que usualmente en tiempos pasados no ocupaban las mujeres.

Sin embargo, en el desarrollo de las ciencias y de la tecnología, las mujeres siguen sin incursionar agresivamente como se requiere en esta época y que de alguna manera, sí lo hacen los hombres. En general, se puede afirmar que la razón por la que muchas personas no se inclinan por estas áreas es la dificultad con las matemáticas. Esta sigue siendo la disciplina que desmotiva, por su dificultad desde la secundaria a muchas alumnas a seguir carreras que tienen a esta disciplina como herramienta fundamental.

Los Drs David y Myra Sadker de la Universidad Americana en Washington D.C.; enviaron en el año 1994, observadores a 100 aulas en 5 estados para sentarlos en sesiones de clases. Los investigadores de los Sadker, citaron ejemplos de cómo los niños están aprendiendo en forma diferente de las niñas desde la escuela primaria, donde la gran mayoría de las maestras son mujeres, hasta la escuela secundaria, donde más de la mitad de los profesores son hombres.

La discriminación generalmente es inintencional e inconsciente, dice Myra Sadker decana de la Escuela de Educación en la Universidad Americana.. Ella anotaba:

> *"Nosotros hemos conocido maestros y maestras quienes se llaman a sí mismos o mismas feministas. Ellos y ellas me enseñaron sus libros de texto no sexistas y sus murales de anuncios no sexistas. Ellas y ellos insisten en que hay equidad en sus aulas." Entonces, continúa ella: "yo las filmé mientras estaban enseñando y se sorprendieron. Si nunca se hubieran visto en un video, trabajando, nunca hubieran creído que trataban a las niñas y a los niños de forma tan diferente."*

Esta forma de filmar a las maestras y maestros, es parte de las funciones de los 12 centros para la Equidad de Género del Departamento de Educación de los Estados Unidos a lo largo del país, dice Claire Safran en su artículo *Lecciones Ocultas*. Desde la educación preescolar hasta la secundaria, los estudios muestran que las y los educadores llaman más en clase a los hombres que a las mujeres.

Esta diferencia de participación en el proceso de aprendizaje es crucial, dicen las y los expertos, quienes agregan que estudiantes que tienen una participación activa en clase son quienes tienen mayor rendimiento y una actitud más positiva.

Por otro lado, en la mayoría de las escuelas de los Estados Unidos, hay clases de recuperación de lectura, "el problema de los niños", y éstos rápidamente alcanzan a las niñas. Pero hay muy pocas clases de recuperación de matemáticas y ciencias, "el problema de las niñas". Por lo tanto, los niños obtienen las mejores calificaciones en esas materias, lo que les dará después empleos mejor pagados.

Dice Safran, que de acuerdo con la Contraloría Nacional para el Progreso de la Educación, una organización en Denver que supervisa y controla los procesos, realiza encuestas, en escuelas públicas y privadas a nivel nacional; las niñas obtienen mejores notas que los niños hasta la edad de los 9 años; pero sus notas declinan conforme ellas avanzan de año en la escuela, mientras que las notas de matemáticas de los niños crecen. Los investigadores afirman que estas cosas pasan porque los niños han aprendido a tomar una parte mas activa que las niñas en el aprendizaje. Se les facilita e induce a ello. Cabe resaltar que esta diferencia educacional para ambos sexos comienza desde el hogar.

Afirma Safran que en el aula la inconsciente discriminación sexual toma varias formas:

- Las niñas tienden a ser llamadas sólo si se sientan cerca del maestro o la maestra, justo debajo de su nariz. Los niños tienden a ser llamados desde donde quiera que se sienten.
  (Lección para las niñas: sean dependientes, siéntense cerca del maestro o maestra y serán recompensados. Lección para los niños: siéntense donde quieran y serán recompensados.)

- Los Sadker reportan este intercambio entre una maestra y una niña de cuarto grado: "Este es un lindo y pulcro trabajo. Los márgenes están exactos.." Y la misma maestra a un niño, "Este es un buen análisis de la causa de la Guerra Civil".
- (Lección para las niñas: todo lo que se espera de ti es la forma, no contenido. Lección para los niños: lo que se espera de ti es pensamiento analítico.)

- La doctora Carol Dweck, profesora de Educación en la Universidad de Harvard, citó estos comentarios de un maestro a los estudiantes que habían dado respuestas incorrectas. A una niña: "Está mal". A un niño: "Tu hubieras sabido la respuesta correcta si hubieras hecho tu tarea."
  (Lección para las niñas: Tus fallas se deben a tu falta de habilidad. Lección para lo niños: Tu puedes hacerlo mejor si te esfuerzas.)

Dicen los Sadker que algunos educadores están aprendiendo a reconocer y entonces cambiar, sus métodos. Y pequeños cambios pueden hacer grandes diferencias. Ellos encontraron que si la maestra espera unos pocos segundos después de preguntar, antes de llamar a un estudiante en especial, más estudiantes participarán y sus respuestas serán más completas.

Los padres y madres preocupados por la discriminación sexual en las aulas primero deben evaluarse a sí mismos en casa. Los expertos y expertas dicen que lo que más necesitan las niñas de hoy son adultos que estimulen los sentidos de la autoestima y de la autovaloración. Esta clase de orgullo les ayuda a las niñas a vadear las traicioneras aguas de la adolescencia cuando su espíritu de empuje tiende a flaquear. "Hasta la adolescencia, las niñas sacan a flote un fuerte y distintivo sentido de confianza en sí mismas, pero cuando se van acercando a la edad en que se convierten en mujeres, se tornan inseguras frente a sus juicios y emociones" , escribe Sandra Forsyth en Girls Seen and Heard (Las niñas se muestran y son escuchadas), un nuevo libro de la Ms. Foundation for Women.

Además de una dosis saludable de amor y apoyo, las niñas también necesitan de cierta preparación para que enfrenten lo que les depara el mañana. Desarrollar sus habilidades en ciertas áreas cruciales de la vida les ayudará a sacarle el mayor provecho a su futuro.

Afortunadamente, existen varios proyectos que están dedicados exclusivamente a ayudarle a las niñas a lograr esos objetivos. Working Mother analizó estos proyectos y reunió los más importantes en un solo programa llamado "Daughters 2000", una iniciativa de tres años que se lanzó en cooperación con organizaciones de mujeres profesionales y también con la ayuda de padres, madres, escuelas, comunidades y empresas.

Girls Incorporated y la Coalición de Universidades femeninas en Estados Unidos, comparten los siguientes trucos, en relación con sus niñas:

- Ayúdele a su hija a comprender que no es malo cometer errores, y que hacer pruebas y cometer errores para comprobar la verdad es un método científico.
- Descubra formas de acabar con cosas que en el pasado eran " mal vistas" en las niñas. Apláudala cuando desbarata un motor engrasado, cuando se embarra mientras hace un proyecto de botánica o cuando hace mezclas de olores que apestan mientras que realiza un experimento químico.
- Vincúlela a proyectos que exijan el desarrollo de un razonamiento espacial o que comprometan habilidades analíticas como, por ejemplo, construir un robot con un juego de armar.
- Présteles especial atención a los cursos libres que ella escoge cuando está en los últimos grados de la secundaria. Estimúlela a tomar los relacionados con las ciencias y el álgebra, un primer e importante paso en su educación matemática avanzada.

El Programa Equals del Lawrence Hall of Science de la Universidad de California en Berkeley ha trabajado con maestros deseosos de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en sus salones de clases y escuelas. El programa ha proporcionado una gran variedad de actividades y métodos de enseñanza que ayudan a los y las estudiantes , especialmente a aquellos de grupos minoritarios y mujeres a lograr el éxito en las matemáticas. Dicho programa tiene aproximadamente 15 años de funcionar.

Otros programas tendientes a este mismo objetivo son desarrollados por la Girls Incorporated, una organización educativa nacional con sede en Nueva York y dedicada a la investigación. Un ejemplo de un programa desarrollado con dicho objetivo lo es un programa extracurricular llamado Operación SMART.

La Asociación de Mujeres Universitarias de Estados Unidos (AAUW), a través de sus capítulos locales, viene desarrollando docenas de proyectos, que incluyen talleres de un día, campamentos de verano, programas de tutoría y clubes para después de clases. Uno de los objetivos más importante del esfuerzo de la AAUW es mostrarles a las niñas la correlación directa que existe entre las ciencias, las matemáticas y las carreras profesionales.

En Costa Rica desde 1994, el Ministerio de Educación Pública inició el Programa Matemática para la Familia, como un proyecto prioritario del Ministerio a desarrollar en todo el país, con el objetivo de mejorar el rendimiento de matemáticas en secundaria y primaria. Sin embargo, cabe señalar que este programa es un subprograma del Programa Equals de California y por tanto uno de sus objetivos era atraer mujeres hacia el estudio y la comprensión de las matemáticas. Este fue suspendido a partir de la huelga nacional de maestros y profesores de 1995 y luego no se pudo volver a organizar, salvo esfuerzos aislados en algunas instituciones privadas, pero ya no con cobertura nacional, desarrollado principalmente por la Fundación para el desarrollo de la Ciencia y la Tecnología, Fundación CIENTEC.

Además de una dosis saludable de amor y apoyo, las niñas también necesitan de cierta preparación para que enfrenten lo que les depara el mañana. Desarrollar sus habilidades en ciertas áreas cruciales de la vida les ayudará a sacarle el mayor provecho a su futuro.

Afortunadamente, existen varios proyectos que están dedicados exclusivamente a ayudarle a las niñas a lograr esos objetivos. Working Mother analizó estos proyectos y reunió los más importantes en un solo programa llamado "Daughters 2000", una iniciativa de tres años que se lanzó en cooperación con organizaciones de mujeres profesionales y también con la ayuda de padres, madres, escuelas, comunidades y empresas.

Girls Incorporated y la Coalición de Universidades femeninas en Estados Unidos, comparten los siguientes trucos, en relación con sus niñas:

- Ayúdele a su hija a comprender que no es malo cometer errores, y que hacer pruebas y cometer errores para comprobar la verdad es un método científico.
- Descubra formas de acabar con cosas que en el pasado eran " mal vistas" en las niñas. Apláudala cuando desbarata un motor engrasado, cuando se embarra mientras hace un proyecto de botánica o cuando hace mezclas de olores que apestan mientras que realiza un experimento químico.
- Vincúlela a proyectos que exijan el desarrollo de un razonamiento espacial o que comprometan habilidades analíticas como, por ejemplo, construir un robot con un juego de armar.
- Présteles especial atención a los cursos libres que ella escoge cuando está en los últimos grados de la secundaria. Estimúlela a tomar los relacionados con las ciencias y el álgebra, un primer e importante paso en su educación matemática avanzada.

El Programa Equals del Lawrence Hall of Science de la Universidad de California en Berkeley ha trabajado con maestros deseosos de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en sus salones de clases y escuelas. El programa ha proporcionado una gran variedad de actividades y métodos de enseñanza que ayudan a los y las estudiantes , especialmente a aquellos de grupos minoritarios y mujeres a lograr el éxito en las matemáticas. Dicho programa tiene aproximadamente 15 años de funcionar.

Otros programas tendientes a este mismo objetivo son desarrollados por la Girls Incorporated, una organización educativa nacional con sede en Nueva York y dedicada a la investigación. Un ejemplo de un programa desarrollado con dicho objetivo lo es un programa extracurricular llamado Operación SMART.

La Asociación de Mujeres Universitarias de Estados Unidos (AAUW), a través de sus capítulos locales, viene desarrollando docenas de proyectos, que incluyen talleres de un día, campamentos de verano, programas de tutoría y clubes para después de clases. Uno de los objetivos más importante del esfuerzo de la AAUW es mostrarles a las niñas la correlación directa que existe entre las ciencias, las matemáticas y las carreras profesionales.

En Costa Rica desde 1994, el Ministerio de Educación Pública inició el Programa Matemática para la Familia, como un proyecto prioritario del Ministerio a desarrollar en todo el país, con el objetivo de mejorar el rendimiento de matemáticas en secundaria y primaria. Sin embargo, cabe señalar que este programa es un subprograma del Programa Equals de California y por tanto uno de sus objetivos era atraer mujeres hacia el estudio y la comprensión de las matemáticas. Este fue suspendido a partir de la huelga nacional de maestros y profesores de 1995 y luego no se pudo volver a organizar, salvo esfuerzos aislados en algunas instituciones privadas, pero ya no con cobertura nacional, desarrollado principalmente por la Fundación para el desarrollo de la Ciencia y la Tecnología, Fundación CIENTEC.

Cabe señalar que el Instituto Tecnológico de Costa Rica está desarrollando un proyecto en coordinación con el Instituto de la Mujer y la Unión Europea, tendiente a fomentar el acceso de las mujeres adolescentes y jóvenes a la formación técnica en condiciones de equidad con la población masculina.

El ITCR también desarrolló en el año 1998 un proyecto junto con el Programa de Mujeres Adolescentes, tendiente a ayudar a muchachas de zonas marginadas a incursionar en áreas tradicionalmente de hombres, en niveles técnicos. Este proyecto está siendo de nuevo desarrollado en este año 1999.

Los proyectos apuntados son coordinados por la Oficina de Equidad de Género de dicha institución.

Hace falta más proyectos de esta índole, pero sobre todo por la cobertura que tiene el Ministerio de Educación Pública se hace necesario que desde su seno se generen más iniciativas en este sentido.

Se hace necesario que los y las profesoras de matemáticas tanto de nivel primario como secundario, tomen conciencia de que en forma inconsciente y sin intención, por lo general en la escuela segregamos a las mujeres y actuamos de manera que las niñas se van desmotivando hacia esta disciplina.

Bibliografía

[1] Working Mother, *Las niñas del 2000*, SUMMA, Agosto,1998,

[2] Safran, Claire *Lecciones ocultas*, Building Understanding, Nueva York, 1995

[3] Tsijli, Teodora. *Sofía Kovalevskaia Cien años de su muerte*. Tercer Congreso Nacional de Matemáticas.

[4] *Las mujeres en las Matemáticas y las Ciencias de Cómputo*, Proyecto de Publicaciones Electrónicas de la UPR en Humacao, Las mujeres en las Matemáticas y las Ciencias de Cómputo. upr.clu.edu/mate/maseo/mujeres/index.html

Mejor pienso cuando pienso lo que hago

Eiliana Montero R.; Silvia Calderón L.; Olga González de León P.[1]

Resumen

"Con juegos, actividades y tareas construyo soluciones, pienso en esta construcción, la justifico, la comento, la modifico y así enriquezco mis destrezas de pensamiento". Esta frase recoge el espíritu de la propuesta pedagógica que se está realizando para favorecer el desarrollo de destrezas cognoscitivas en estudiantes de noveno año. La investigación utiliza el enfoque de la teoría de procesamiento de la información para conceptualizar las seis destrezas cognoscitivas seleccionadas: categorización, representación icónica, flexibilidad, deducción, inducción y metacognición. En esta oportunidad se presentarán actividades que se han desarrollado en contextos matemáticos, ilustrando como el profesor de matemática en su quehacer de aula podría ayudar al fortalecimiento de tales destrezas.

Justificación

El proyecto previo que dio origen a esta propuesta se llamó "Diagnóstico de Destrezas Cognoscitivas Empleadas por Estudiantes de Noveno Año en la Resolución de Problemas". El objetivo básico de este proyecto inicial fue crear una prueba estandarizada que pudiera usarse como un indicador del nivel que exhibían los estudiantes costarricenses de noveno año en un conjunto de destrezas cognoscitivas o habilidades intelectuales. Estas destrezas fueron conceptualizadas usando el enfoque de las ciencias cognoscitivas conocido como teoría del procesamiento de la información.

Los resultados del diagnóstico revelaron, en general, un desempeño relativamente pobre de los estudiantes. Así, una de las recomendaciones más importantes derivadas de sus hallazgos fue la de diseñar procesos específicos de intervención pedagógica que tuvieran como finalidad el promover y facilitar el desarrollo de dichas destrezas. De esta forma, entendemos la educación como un proceso dirigido no solo a la adquisición de conocimientos, sino también al desarrollo de habilidades de pensamiento.

Objetivo

Crear un programa de intervención pedagógica para el desarrollo de un conjunto de destrezas cognoscitivas en estudiantes de noveno año, que pueda ser llevado a las aulas por los mismos docentes en el contexto del sistema educativo formal costarricense.

Referentes teóricos

Aunque los procesos cognoscitivos han sido abordados desde los tiempos de la Grecia clásica, no es sino hasta el siglo XX que se desarrollan verdaderas sistematizaciones sobre el tema. Es la psicología conductista una de las primeras en ocuparse de utilizar las herramientas tradicionales de la ciencia experimental para estudiar este tema. A partir de los años 60's el paradigma conductista se muestra insuficiente para explicar la naturaleza de los procesos cognoscitivos (Gardner, 1985). Es a partir de ese momento que comienza a desarrollarse lo que se conoce como teoría del procesamiento de la información en ciencias cognoscitivas (Pylyshyn, 1984; Hofstadter, 1985). Ya desde los años 50 Turing (1950), había demostrado que un sistema computacional, donde la inspección de los estados internos es posible, podía funcionar como modelo plausible

[1] IIMEC, Universidad de Costa Rica.

para explicar la cognición. Uno de los temas centrales de la psicología cognoscitiva a partir de este cambio paradigmático ha sido el de la solución de problemas (Atwood y Polson, 1976).

Así, el enfoque de las ciencias cognoscitivas conocido como teoría del procesamiento de la información permite, no solo centrarse en "el camino" que lleva a la solución correcta de un problema, sino también en la interpretación teórica de las causas de los errores que se cometen al tratar de resolverlo. En este sentido existe literatura importante sobre las estrategias erróneas que se suelen utilizar en la resolución de problemas (Sternberg, 1996; Anderson, en prensa; Nichols, 1994; Newell y Simon, 1972; Atwood y Polson, 1976).

De esta manera y usando la teoría del procesamiento de la información como referente teórico, fueron conceptualizadas seis destrezas cognoscitivas que se consideran de gran relevancia en la resolución de problemas en contextos académicos y científicos (Anderson, en prensa; Sternberg, 1996; Newell y Simon, 1972).

Se entiende por destreza cognoscitiva la capacidad mostrada por un individuo para la ejecución de una determinada actividad intelectual (Anderson, 1990). En esta propuesta se pretende crear una intervención pedagógica para el desarrollo de seis destrezas o habilidades que fueron evaluadas en el diagnóstico que le dió origen. A continuación se presenta una breve explicación de cada una de estas destrezas.

1-Categorización: La actividad de categorización corresponde a la conformación de conjuntos o clases de objetos, según algún tipo de criterio. Los criterios de clasificación pueden estar fundamentados en una serie de características necesarias y/o suficientes que definen si un objeto pertenece o no a la categoría (clase bien definida), sin embargo la mayoría de las categorías con las que lidiamos diariamente son de naturaleza más bien difusa (Rosch, 1973).

2- Representación Icónica: Una forma de representar el conocimiento en la mente humana se fundamenta en la creación de imágenes mentales (Shepard y Meltzer, 1971). Por ejemplo, es posible representar una partida de ajedrez mediante una imagen del tablero y las movidas de las piezas. No todas las personas son igualmente hábiles manejando estas imágenes mentales, de hecho, algunas evitan esta estrategia y se plantean los problemas de otra forma. Los problemas de geometría serían particularmente difíciles para estos individuos, pero en otros casos, como el de la partida de ajedrez, simplemente emplearán una estrategia de representación alternativa (podría ser similar a la notación usual del ajedrez).

3- Flexibilidad: Existen problemas que no son fáciles de resolver, puesto que requieren el romper con alguna de estas estructuras fijas. La capacidad que se opone al estereotipo, a la estructura fija, se denomina flexibilidad (Lubart y Sternberg, 1995). Se define entonces flexibilidad como el proceso de probar alternativas en cuanto a la mejor forma de representación del conocimiento. Es igualmente fácil ver el papel de la flexibilidad dentro del arte, puesto que la tarea de reaccionar frente a las formas de representación estereotipadas es parte de la dinámica que genera el arte mismo.

4- Deducción: Otra forma de representar el conocimiento se refiere a la formalización lógica. Las leyes que rigen este tipo de formalización (similares a las leyes que permiten mover mentalmente los objetos) permiten reconocer la validez de un razonamiento, de modo que si los supuestos de los que parte el razonamiento son verdaderos, la conclusión es igualmente verdadera. O sea, un razonamiento lógicamente correcto es aquel que, aplicado a supuestos verdaderos, garantiza una conclusión verdadera. El estudio de la lógica se remonta a los griegos. Pensadores como Aristóteles y Santo Tomás ayudaron a estructurar una formulación sistemática para este tipo de pensamiento.

5- Inducción: Se ha indicado que la naturaleza del pensamiento lógicamente válido es de tipo deductivo, es decir, que parte de lo general a lo particular. Desde esta perspectiva, el pensamiento inductivo, es decir, el que llega a conclusiones generales a partir de información particular, es necesariamente falaz. Sin embargo, es preciso reconocer la importancia de la inducción dentro de la construcción del conocimiento. Así, el ser humano está en la necesidad de recurrir a un procedimiento "incierto" para la construcción del conocimiento. Desde un punto de vista práctico, gran parte de los estudios científicos, en alguna de sus etapas, se fundamentan en el uso de la inducción. ¿De qué otra forma se podría diagnosticar una enfermedad, o pronosticar el resultado de las elecciones, a partir de un estudio por muestreo?

6- Metacognición: Todas las actividades o procesos que han sido explicados hasta el momento se refieren a estrategias de solución bastante específicas. Dichos procesos requieren de mecanismos de control, es decir, de un nuevo proceso de mayor jerarquía que el resto, el cual genera la ejecución de diversas tareas, de acuerdo al propósito que se persiga, tratándose, por lo tanto, de una instancia encargada de mantener el sentido de intención propio del sujeto (Lubart y Sternberg, 1995; Snow, 1989). Este mecanismo de control es lo que se denomina metacognición.

Enfoque pedagógico

En cuanto al referente teórico que orientará el diseño específico de la intervención pedagógica, se considera que las teorías de Vygotsky (1978) son las más congruentes con la naturaleza del problema, dado que enfatizan el papel de la socialización en la formación y modificación de los procesos mentales. Específicamente, el enfoque conocido como Evaluación Dinámica (Montero, 1995; Feuerstein, 1980) se considera como un buen punto de partida para empezar a crear las estrategias pedagógicas que facilitarán el desarrollo de las diez destrezas descritas arriba.

El énfasis de la Evaluación Dinámica está en determinar las funciones mentales que subyacen al desempeño en el proceso de aprendizaje: estrategias y estilos cognoscitivos, y los así llamados factores metacognoscitivos: el sentido de propósito y el entendimiento de por qué se está haciendo una tarea. Por medio de la identificación de las estrategias y estilos cognoscitivos de los estudiantes, los usuarios de los métodos de evaluación dinámica están equipados para posibilitar el aprendizaje o, por otro lado, modificar aquellas estructuras cognoscitivas que están bloqueando el aprendizaje (Feuerstein, 1988).

En el área de intervención instruccional, la Evaluación Dinámica implica un cambio en la conceptualización del "locus" de las fallas de aprendizaje, del estudiante hacia las técnicas pedagógicas. Asimismo, la Evaluación Dinámica, por su propia naturaleza, parte del supuesto de que los procesos cognoscitivos son estructuras cambiantes que pueden modificarse si presentan deficiencias. Al respecto, la mayoría de los investigadores en este campo concuerdan con que, precisamente, las teorías de Vygotsky (1978) proveen el marco de referencia teórico que se necesita para sustentar estos procedimientos, pues enfatizan la importancia de la interacción social para facilitar la activación y modificación de los procesos cognoscitivos en el individuo.

Procedimientos y Metodología

De acuerdo con los referentes teóricos utilizados, se construyeron problemas o tareas que fueron usados en el proceso de evaluación dinámica. Este se llevó a cabo con pequeños grupos de estudiantes, extraídos de la población de interés. Esta aproximación permitió ir "descubriendo" estrategias de solución correctas e incorrectas y la mejor manera de facilitar (mediar) el desarrollo de cada destreza. Estas tareas, problemas o juegos son las herramientas para "desencadenar" el proceso. Por ello es crucial que estén correctamente estructuradas y sean válidas. De acuerdo con la experiencia se procedió al mejoramiento de las tareas propuestas y a la creación de otras nuevas. Se logró entonces generar un conjunto de ejercicios y actividades en cada destreza, que son la base de la intervención pedagógica.

La intervención usa contextos académicos y de la vida cotidiana para el desarrollo de las destrezas, pero no incluye contenidos curriculares específicos del programa de noveno año. Esto porque el objetivo es el de facilitar el desarrollo de la destreza y no la enseñanza de contenidos curriculares. Sin embargo, los profesores pueden usar metodologías similares en las diferentes asignaturas para estructurar actividades usando los contenidos propios de su materia.

Una vez la fase diagnóstica de las estrategias utilizadas por los estudiantes, se ha procedido a la elaboración del documento guía (manual) para los docentes que participarán en la capacitación y aplicación piloto de la propuesta pedagógica.

Descripción de algunas actividades desarrolladas

Para la destreza de categorización se presenta la actividad titulada "Busquemos el Concepto". Este ejercicio utiliza una baraja de cartas especialmente construida con figuras geométricas de diferentes características. El mediador (docente o estudiante) va paulatinamente clasificando cartas de acuerdo con un criterio de clasificación que debe ser descubierto por el resto del grupo. Los criterios de clasificación van aumentando gradualmente en dificultad.

Para la destreza de flexibilidad se presenta la actividad titulada "Buscando el triángulo". Aquí se trabaja con palillos de madera y bolitas de estereofón. Utilizando una figura inicial, el estudiante debe buscar alternativas para obtener una construcción más compleja, donde la clave para la solución implica la utilización de esquemas flexibles.

Para la destreza representación icónica se presenta la actividad titulada "Pintando Cubos de 3x3x3". En esta actividad se trabaja con un cubo formado por tucos de madera. Los estudiantes deben determinar cuántas caras de cada tuco quedan pintadas al pintar el cubo de diferentes maneras.

Para la destreza de inducción (generalización) se presenta la actividad titulada "Cubos de igual color". Con el mismo material utilizado en la actividad anterior se busca una generalización de los resultados al ampliar el tamaño de los cubos.

Para la destreza de deducción se presenta la actividad titulada "La Balanza". En esta actividad se presenta un problema en donde, para poder resolverlo, el estudiante debe establecer una igualdad a partir de relaciones existentes entre los diferentes elementos.

Para la destreza de metacognición se analiza la carga metacognitiva que tiene cada una de las actividades anteriores.

Bibliografía

[1] Anderson, J.R. *Cognitive Psychology and its Implications*. New York: Freeman & Company, 1990.

[2] Anderson, J.R. (En prensa). *Rules of the Mind.*

[3] Atwood, M.E.; Polson, P.G. "A process model for water jug problems". *Cognitive Psychology*, 8, 191-216, 1976.

[4] Dovidio, J.F.; Evans, N.; Tyler R.B. "Racial Stereotypes: The contents of their cognitive representations". *Journal of Experimental Social Psychology*, 22, 22-37, 1986.

[5] Feuerstein, R., Rand, Y., & Rynders, J.E. *Don't Accept Me as I Am: Helping "Retarded People" to Excel*. New York y Londres: Plenum Press, 1988.

[6] Feuerstein, R. *Instrumental Enrichment: An Intervention Program for Cognitive Modifiability*. Baltimore: University Park Press, 1980.

[7] Gardner, H. *The Mind's New Science: A History of the Cognitive Revolution*. New York: Basic Books, 1985.
[8] Hofstadter, D. "Waking up from the boolean dream or, subcognition as computation". *En Metamagical Themes*. New York: Basic Books, 1985.
[9] Lubart, T. & Sternberg, R.J. *Defying the Crowd: Cultivating Creativity in a Culture of Conformity*. New York: Free Press, 1995.
[10] Montero, E. "La evaluación dinámica: Un concepto alternativo a la evaluación tradicional". *Revista Educación*, vol. 18, # 2. Facultad de Educación. Universidad de Costa Rica, 1995.
[11] Newell, A. y Simon, H. *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1952.
[12] Nichols, P.D. "A framework for developing Cognitively Diagnostic Assessments". *Review of Educational Research*, vol. 64, #4, 1994.
[13] Pylyshyn, Z. *Computation and Cognition. Toward a Foundation for Cognitive Science*. Cambridge, Massachusetts: Bradford Books, 1984.
[14] Rosch, E. On the internal structure of perceptual and semantic categories. En T.E. Moore (Ed.), *Cognitive Development and the Adquisition of Language*. New York: Academic Press, 1973.
[15] Shepard, R.N.; Meltzer, J. "Mental rotation of three-dimensional objects". *Science*, 171, 701-703, 1971.
[16] Snow, R.E. Toward assessment of cognitive and conative structures in learning. *Educational Researcher*, 1989.
[17] Sternberg, R.J. *Successful Intelligence: How Practical and Creative Intelligence Determine Success in Life*. New York: Simon and Schuster, 1996.
[18] Stevenson J.C. y Evans, G.T. "Conceptualization and measurement of cognitive holding power". *Journal of Educational Measurement*, vol. 31, #2, pp.161-181, 1994.
[19] Turing, A. *Computing machinery and intelligence*. *Mind*, 59, 433-460, 1950.
[20] Vygotsky, L.S. *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge: Harvard University Press, 1978.

Observaciones y sugerencias a la enseñanza-aprendizaje de la geometría, en secundaria, en Costa Rica

Antonio Briceño V.; Ronald Rodríguez S.*

Introducción

"La geometría fue el eje del desarrollo de la matemática y parte fundamental de la cultura básica del hombre, desde la hegemonía de los griegos hasta el siglo XIX. Quizá fue la primera rama de la matemática que alcanzó su desarrollo y mantuvo su dominio durante más de 20 siglos",(Editorial de la revista Educación Matemática. Volumen 2. No2. Agosto 1990).

El desarrollo posterior de la matemática, en gran parte, fue aportado por la geometría. No se puede olvidar el valor didáctico y formativo de la geometría y mucho menos su amplio campo de aplicación.

Algunos objetivos en el momento de la elaboración de este trabajo son, entre otros, hacer una serie de observaciones a la enseñanza de la geometría, en la secundaria, en Costa Rica, ¿Cómo puede influir el uso de la computadora en la enseñanza de la geometría? y tratar de establecer algunas sugerencias para fortalecer o "mejorar" la enseñanza de la misma.

¿Cómo influyó la geometría en la formalización de la matemática? Y ¿Cómo influye en el desarrollo intelectual de los estudiantes?

En el proceso de la enseñanza-aprendizaje de la matemática en la secundaria, se omite lo que para todos los matemáticos es la esencia de la misma, lo fundamental, su razón de ser, su aspecto deductivo.

Quizá muchos tengan razón al decir ¿Para qué? Enseñar matemática formal a personas que nunca estudiarán matemática, que esta hay que dejarla para los matemáticos, pero no se debe olvidar que hay muchos teoremas que se pueden demostrar en la secundaria, con varios fines, entre ellos: el convencer a los estudiantes de su veracidad, que conozcan la formalidad de las matemáticas y, el principal, para que desarrollen sus estructuras mentales y fortalezcan su pensamiento deductivo.

Para fortalecer todos estos aspectos, no hay nada mejor que proponer demostraciones de teoremas acerca de la geometría (especialmente la euclidiana para secundaria), ya que si retrocediésemos un poco en el tiempo, nos daríamos cuenta de que; esta rama de la matemática fue la primera en sistematizarse de manera lógica, debido a que los geómetras fueron los primeros matemáticos en demostrar sus afirmaciones. Un ejemplo de ello es la obra que contiene el conocimiento geométrico de la antigüedad, que fue elaborada por el matemático griego ***Euclides*** y, que lleva el nombre de ***Los Elementos***. Esta obra parte de algunas suposiciones y luego con base en éstas, todas sus proposiciones son demostradas lógicamente, claro que éste contiene algunos errores puesto que fue elaborada hace, aproximadamente, 2000 años.

Tan profundo fue su impacto que hoy día cualquier proposición que se haga con respecto al campo de la matemática debe ser demostrada lógicamente para que puede ser aceptada.

* Estudiantes de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora.
Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

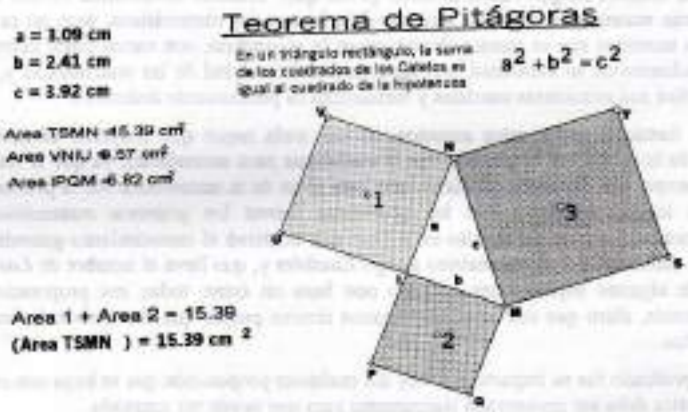
Finalmente como uno de nuestros propósitos es hacer un estudio a la enseñanza-aprendizaje de la geometría, en Costa Rica especialmente, nuestro consejo es que si se está impartiendo un curso de geometría euclidiana o no euclidiana, no debe dejarse de lado, el **pensamiento deductivo**.

Situación actual

A pesar de los esfuerzos que realizan los profesores y profesoras para desarrollar en sus estudiantes ciertas destrezas y habilidades, tales como: pensamiento deductivo, pensamiento crítico, creatividad, competitividad entre otros, que son las conductas que se desean alcanzar de alguna u otra manera, pero en la mayoría de los casos no se está logrando. Quizá porque en muchos casos se dan las clases de forma monótona, rígida, inflexible y metódica lo cual no le permite al alumno o alumna explotar su potencial, privando al estudiante y a la estudiante tener un aprendizaje basado en la verificación, el descubrimiento, error como fuente de aprendizaje, análisis y tener sus propias conjeturas.

Se piensa que una solución al problema puede ser la inclusión de un proceso de enseñanza-aprendizaje activo, en donde el estudiante y la estudiante participe directamente y el profesor y la profesora sea un guía, un compañero o compañera más. Esto se podría lograr utilizando diversas metodologías didácticas, tales como: *método expositivo, método interrogativo, método de los cuatro pasos, método de laboratorios, método de proyectos y método asistido por computadora*. Lo ideal sería utilizar la llamada combinatoria metodológica, debido a que con un sólo método es imposible satisfacer las necesidades de todos los estudiantes, porque todos piensan, sienten y viven en formas diferentes, entre otras cosas. Por ejemplo, se puede desarrollar una lección de tipo laboratorio como la siguiente:

Laboratorio con doblado de papel



Objetivo: Verificar que en todo triángulo se cumple que las medianas y las mediatrices son concurrentes.

Materiales

Tres triángulos formados previamente con papel.

Desarrollo

- Doble el primer triángulo de manera que queden representadas todas las medianas del mismo.
- Conjeture que ocurre con las medianas del triángulo.
- Doble el segundo triángulo de manera que queden representadas todas las mediatrices.
- Conjeture que ocurre con las mediatrices del triángulo.

Uso de software en educación

Existen diversos programas computacionales enfocados especialmente a la enseñanza de la geometría.

Podemos mencionar entre algunos de estos programas el Geometer's Sketchpad, Dr. Geo, Cabri-Geometre y Cartesio; los cuales son una gran ayuda para que los estudiantes y las estudiantes, descubran, verifiquen, exploren, conjeturen, etc., muchos teoremas de manera intuitiva.

Estos permiten mostrar muchas propiedades, por medio de animaciones y movimientos, que en una pizarra sería imposible, además hacer dibujos y obtener resultados mucho más precisos, en menos tiempo, y de una manera más simple. Por ejemplo, una aplicación gráfica al famoso *Teorema Pitágoras, se puede realizar de la siguiente manera:*

La enseñanza de la geometría en Costa Rica

En Costa Rica la educación secundaria se ha dividido en dos bloques: III Ciclo y la Diversificada. En cada una de las cuales se ha establecido como premisa el hacer énfasis en las construcciones geométricas para así llegar a que el estudiante pueda construir conocimientos abstractos. Además se ha enfatizando en la aplicabilidad de los conceptos para que de esta forma el estudiante pueda ver lo útil que tiene la geometría y también para fortalecer conceptos matemáticos que se requieran.

El M.E.P. (Ministerio de Educación Pública) es el ente encargado de establecer los programas, que todos los colegios, deben asumir en sus cursos de matemática y geometría especialmente.

El programa de III Ciclo está basado, en su totalidad, en geometría *Euclidea*. Sin dejar nunca de lado las construcciones geométricas que el mismo *Euclides* realizaba en *"Los Elementos"*.

Se comienza con conceptos como punto, recta, figuras geométricas(triángulos, polígonos, cuadriláteros), propiedades de los triángulos y teoremas como los de *Thales y Pitágoras*.

En cuanto a la educación Diversificada, siempre se conservan las ideas de construcciones geométricas. Además se sugiere que deben hacerse presentaciones que no sean del tipo axiomático, deductivo y riguroso.

El estudio de la geometría, en educación Diversificada, comienza con todo lo referente a Círculo y Circunferencia, continúa con lo relacionado a polígonos y finaliza con la estereometría (esto en el primer año, aquí es donde finaliza). Es quizá el único año en donde se da el estudio de geometría del espacio. Pero a pesar de su importancia, no es un tema que se toma muy afondo en nuestro país.

Para el tema de *Estereometría* se cubren los siguientes temas:

- Cuerpos geométricos básicos.
- Areas laterales, totales, circulares, triangulares, de cuadriláteros o polígonos regulares determinados por cortes de planos en un cuerpo geométrico.

- Concepto de Volumen, de prisma regular, unidades de Volumen (S.I.).
- Conceptos de Capacidad, unidades de capacidad (S.I.).
- Relación de Volumen, capacidad, reducciones, Volumen de cuerpos amorfos.

Utilización de Software Educativo en Costa Rica.

En cuanto al software que se utiliza o puede emplearse para la enseñanza y aprendizaje de la geometría, los programas de estudio no contemplan en ninguna parte su posible inclusión, además en estos momentos los profesores y profesoras no reciben la capacitación necesaria para desarrollar procesos de enseñanza-aprendizajes asistidos por computadora.

Se puede decir que el único software que se utiliza es *Logo*, pero, a nivel de la escuela, también se ha querido introducir en secundaria, pero nos en la mayoría de los casos se nos encontramos con el problema mencionado anteriormente.

Es necesario incorporar el uso "adecuado" de la tecnología(*computadoras*), en el proceso educativo, siempre y cuando se le brinde la capacitación necesaria a los educadores y las educadoras, para sacarles el máximo provecho a estas, desde la utilización adecuada de "paquetes" como *Power Point, Word y Exel, hasta el uso de software dirigidos específicamente a la enseñanza.*

No se quiere decir, con esto, que la inclusión de nuevas tecnologías hagan mejor la educación, sino que el uso apropiado de éstas puede ser de gran ayuda tanto para los profesores y profesoras, como para los alumnos y alumnas.

Un ejemplo de como utilizar la computadora como herramienta metodológica es el siguiente laboratorio:

Objetivo: Verificar que en todo triángulo se cumple que las medianas y las mediatrices son concurrentes.

Materiales

Micro computadora, Software Geometer's Skechpad.

Desarrollo:

1. Dibuje un triángulo arbitrario.
2. Trace las medianas del triángulo.
3. Manipule el triángulo moviendo los vértices.
4. Conjeture qué ocurre con las medianas del triángulo.
5. Dibuje otro triángulo arbitrario.
6. Trace las alturas del triángulo y repita el paso 3.
7. Conjeture qué ocurre con las alturas del triángulo.
8. Repite el paso 1 y trace las mediatrices del triángulo.
9. Repite el paso 3 y conjeture qué ocurre con las alturas del triángulo.

Algunas Observaciones a la Enseñanza-Aprendizaje de la Geometría en Costa Rica.

En nuestros colegios hay algunos profesores de matemática que imparten sus lecciones siguiendo al pie de la letra el contenido de algún libro que utilizan como texto; sin juzgar o detenerse a examinar, si lo que está escrito en el libro es lo correcto o lo más adecuado para decirle a sus alumnos.

Lo anterior sucede más a menudo en el campo de la geometría y, creemos que una de las causas principales de estos problemas es, entre otros aspectos, el uso, por parte de los docentes, de un solo método didáctico, casi siempre el expositivo, que no favorece la flexibilidad del pensamiento de los estudiantes y dificulta el proceso de abstracción y, manejo de ideas y contenidos.

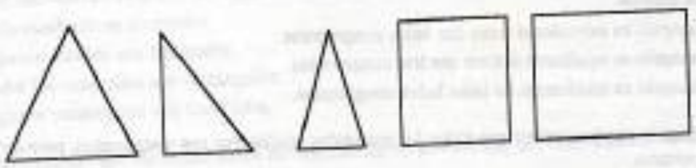
Se piensa que de los principales problemas en la formación de los estudiantes en el campo de la geometría, se desprende tres aspectos con respecto a la enseñanza de la misma:

- Descuido en la presentación de las figuras geométricas.
- Concepto y clasificación de las figuras geométricas, respecto a sus definiciones.
- Relación de la geometría con el mundo real.

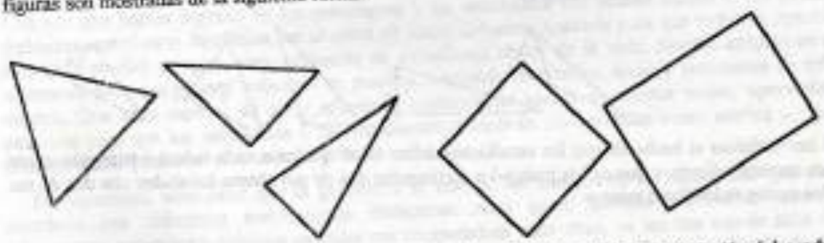
Para enfocar los dos primeros aspectos, haremos referencia a figuras geométricas tales como triángulos, cuadrado, rectángulo y rombo.

Respecto a la presentación de las figuras geométricas

Puede afirmarse que un gran porcentaje de los profesores de matemática, en el salón de clase, en el momento de dibujar estas figuras geométricas, se ven tentados y lo hacen de la siguiente manera:

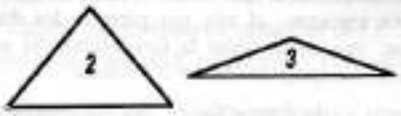


esto hace referencia a ellas como triángulo equilátero, triángulo rectángulo, triángulo isósceles, un cuadrado y un rectángulo, respectivamente, y sus estudiantes saben identificarlos, pero, si las mismas figuras son mostradas de la siguiente forma:



la gran mayoría pensaría un poco antes de mencionar de qué figuras se trata, a excepción del cuadrado que inmediatamente dirían que se trata de un rombo.

Otro caso particular es cuando se les presenta un triángulo isósceles como el #1, en el cual los dos lados congruentes son mayores que el tercero, lo identificarían sin ningún problema, pero cabe la posibilidad de que si les presentan triángulos isósceles como el #2 y el #3, en los cuales los tres lados son



congruentes y/o los dos lados congruentes son menores que el tercero respectivamente, tienen más problemas para indentificarlos.

Un consejo es no acostumbrar a los estudiantes a ver las diferentes figuras geométricas en una sola posición, en la que casi siempre la base se ve en forma horizontal.

Respecto a sus definiciones

En esto se debe ser muy cuidadoso, ya que los textos, o uno mismo como profesor, puede definir cosas erróneas. Pero también el docente debe tomar en cuenta que es posible definir el mismo objeto desde varias perspectivas; y hacerle saber a los estudiantes la(s) relación(es) que existen entre algunos conceptos de figuras geométricas.

Podemos hacer las siguientes definiciones:

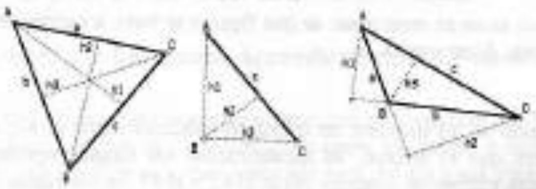
- Un triángulo es congruente si sus tres lados tienen la misma medida y sus tres ángulos tienen la misma medida.
- Un triángulo es isósceles si tiene dos lados congruentes.
- Un triángulo es equilátero si tiene sus tres congruentes.
- Un triángulo es escaleno si no tiene lados congruentes.

De lo anterior se puede concluir que todos los triángulos equiláteros son congruentes, pero no podemos concluir lo contrario.

Se puede definir la ***altura h de un triángulo*** como "el segmento de recta que pasa por un vértice y que llega perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto".

Se pueden observar las siguientes figuras:

Aquí hay enfatizar el hecho de que los estudiantes deben saber que para cada lado del triángulo existe una altura correspondiente, y que en los triángulos rectángulos dos de sus alturas coinciden con dos de sus lados a los cuales se les llama catetos.



Cabe mencionar que con los cuadrados, rombos y rectángulos pasan situaciones similares a las de los triángulos. Es común que los estudiantes de secundaria tengan ideas o concepciones como las siguientes:

- Los cuadrados no son rombos.
- Ningún rombo es un cuadrado.
- Los cuadrados no son rectángulos.

Estos son errores frecuentes, en los estudiantes y las estudiantes, consecuencia de las definiciones incorrectas o insuficientes que les proporciona ya sea el docente o la docente o bien un libro, y esto los aleja de los procesos de abstracción y razonamiento, que él sí es capaz de desarrollar siempre y cuando se le dé la oportunidad de hacerlo.

Unas definiciones pertinentes para referirnos a esas figuras, quizá no las mejores, podrían ser:

- Un cuadrilátero es una figura delimitada por cuatro lados.
- Un rombo es el cuadrilátero cuyos cuatro lados son congruentes.
- Un rectángulo es el cuadrilátero cuyos cuatro ángulos son rectos.
- Un cuadrado es el cuadrilátero cuyos cuatro lados son congruentes y sus cuatro ángulos son
- rectos.

Con definiciones como éstas los estudiantes y las estudiantes estarían en capacidad de deducir, por sí mismos(as), aseveraciones como las siguientes:

- Todo cuadrado es un rombo.
- Algunos rombos son cuadrados.
- Todos los cuadrados son rectángulos.
- Algunos rectángulos son cuadrados.

No se debe olvidar que las definiciones en matemática no son únicas, que éstas pueden variar siempre y cuando el contenido permanezca inalterado.

Relación de la geometría con el mundo real

Una vez que hemos logrado en los estudiantes y las estudiantes esa actitud crítica y, ese pensamiento deductivo, entre otras facultades, en el salón de clase, debemos ayudarle para que todo ese conocimiento adquirido puedan y sepan cómo utilizarlo en situaciones reales de la vida, nuestro consejo es que les animemos para que pongan todo esto en práctica, midiendo longitudes, áreas y volúmenes de diferentes objetos. Que sean capaces de sacar relaciones matemáticas acerca de objetos reales, aprovechar cada situación para que los estudiantes y las estudiantes descubran y/o aprendan cosas nuevas y, que sepa concluir qué le puede servir y cuándo utilizarlo.

Es importante mencionar que la geometría es uno de los campos de la matemática que puede ser abordado con diferentes metodologías didácticas, tales como método expositivo, interrogativo, laboratorios, proyectos y métodos asistidos por computadora entre otros, ya sea con uno de éstos métodos o haciendo las combinaciones necesarias (pertinentes) con algunos de ellos. Todo esto con fin de propiciar en los estudiantes los principios de individualización, socialización, actividad, autonomía y creatividad, que es lo que pretende el sistema educativo de Costa Rica.

Sin embargo no se debe olvidar que buena parte de los profesores y las profesoras que tenemos en nuestras instituciones de secundaria, cuando tuvieron la oportunidad de ser estudiantes, fueron formados de una manera muy rígida, muy distante a lo que se pretende hoy día, empero se desea que ellos no sean repetidores de esos usos y costumbres.

Se espera que no se pierda de vista el objetivo para con la educación costarricense y, si el cambio que desea es favorable para todos, entonces suceda que: como dijo **Karl Marx** *'El que no cambia con el cambio, el cambio lo cambia, porque la única constante que hay, es el cambio'.*

Bibliografía

[1] Flores P., Alfinio "La feria de Pitágoras". *Educación Matemática.* Vol. 4. Num 1. Abril, 1992.

[2] Jesús Salinas, Jesús. "Acerca de la demostración en geometría". *Educación Matemática.* Vol. 3. Num 3. Diciembre, 1991.

[3] Zárate, Eduardo. "Algunas reflexiones en torno a la enseñanza de la geometría". *Educación Matemática.* Vol. 3. Num 3. Diciembre, 1991.

[4] Carrión M., Vicente. "Un recurso en la enseñanza de la geometría". *Educación Matemática.* Vol.. 5. Num 1. Abril, 1993.

[5] Fritzler H., Wolfgang. "Triángulos y Cuadriláteros Iinscritos en un Círculo-una Aplicación del Software Educativo- 'Cabri-Geometre" *Educación Matemática*, Vol. 9. Num 2. Agosto, 1997.

[6] Angel, G; Adela, J.. "El modelo de razonamiento de Van Hiele, como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. un ejemplo: los giros. *Educación Matemática.* Vol. 3. Num 2. Agosto, 1991.

[7] Acuña, Claudia. "El Lenguaje Convencional, L jerga Escolar y la Geometría." *Educación Matemática.* Vol. 2. Num 2. Agosto, 1990.

[8] Zubieta, Francisco. "Los comienzos de la Geometría Deductiva". *Educación Matemática.* Vol. 2. Num 2. Agosto, 1990.

[9] Ongay, Fausto. "Algunas Curiosidades Sobre las Geometrías en el Plano". *Educación Matemática.* Vol. 2. Num 2. Agosto, 1990.

[10] Moreno A., Luis. "La Geometría del Desorden, y un Nuevo Diseño Curricular". *Educación Matemática.* Vol. 6. Num 3. Agosto, 1990.

[11] Meza C., Luis G. "Estrategias didácticas para el desarrollo de procesos de enseñanza aprendizaje asistidos por computadora". Presentada en el *"Taller Enseñanza de la matemática asistida por computadora".* Instituto tecnológico de Costa Rica.

[12] Meza C., Luis G. "Computadoras en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática: una taxonomía". En: *Memorias del V Congreso Centroamericano de Investigadores en Matemática (ECADIM).* Javier Trejos (editor). Liberia, Costa Rica, 1997.

[13] Meza C., Luis G. et al. "Planeamiento de procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática asistidos con software matemático". En: *Memorias del V Congreso Centroamericano de Investigadores en Matemática (ECADIM).* Javier Trejos (editor). Liberia, Costa Rica, 1997.

[14] Meza C., Luis Gerardo. Metodología de la enseñanza de la matemática. Notas técnicas para el curso "Teoría del aprendizaje 2". Escuela de Matemática. ITCR.

Desarrollo del pensamiento lógico

Lastenia Ma. Bonilla S.[1]

Según la opinión –bastante generalizada- de los docentes universitarios[2], en relación a los estudiantes de primer ingreso, ratificada por estudios psicológicos, es que no saben pensar: reflexionar, analizar, sintetizar, inferir, ... Estos profesores manifiestan que sus alumnos poseen algunos conceptos y emiten juicios pero con poca o sin ninguna fundamentación.

Dos caminos se perfilan entonces, uno es aceptar pasivamente esta realidad y por lo tanto no hacer nada, o tratar de cambiarla. Pero al intentar cambiarla, no hay que olvidar que nadie puede pensar por otro, es decir, cada persona tiene que esforzarse por pensar, tiene que aprender a aprender: aprender a razonar, aprender a sintetizar... El profesor lo que puede hacer es presentar a los alumnos actividades que provoquen el pensamiento, que 'obliguen' a pensar antes de responder. Teniendo esto como premisa, lo que a continuación se expondrá son algunas reflexiones sobre la posibilidad de desarrollar el pensamiento, y ejemplos de actividades realizadas en el aula, en las cuales se muestra la forma como el docente puede tratar de que el alumno, por sí mismo, encuentre la solución buscada. Algunos textos extraídos de la antología *Lecturas sobre el desarrollo de la inteligencia y del pensamiento*, de Arnobio Maya, y recogidos a continuación pueden ayudar a comprender la importancia que tiene involucrarse en lograr este desarrollo de las habilidades del pensamiento en los estudiantes:

Hoy más que nunca la escuela debe formar gente pensante y no solo domesticada que permita que otros piensen por ella, gente que sólo hace cosas mecánicamente, manipuladamente, mientras que otros son los que se apropian de todas las decisiones, merced a su capacidad y oportunidad que han adquirido de pensar (p. 11).

Los enfoques tradicionales de la educación, dicen Nickerson, Perkins y otros, se han centrado en la enseñanza de material de 'contenidos de los cursos' o, lo que es lo mismo, en impartir un conocimiento práctico. En comparación, agregan, se le ha prestado relativamente poca atención a la enseñanza de las habilidades de pensamiento, o al menos a la enseñanza de habilidades que intervienen en actividades de orden superior tales como el razonamiento, el pensamiento creativo y la solución de problemas. (p.13)

Usted como docente debe enseñar las habilidades de pensamiento porque si lo intenta y descubre que el esfuerzo no conduce a nada, lo cual es poco probable si se hace bien, el costo será solamente un poco de esfuerzo mal invertido, pero si es cierto que sí se puede enseñar a pensar y si usted no lo hace con sus alumnos y alumnas, tendrá mucho de qué arrepentirse por el potencial humano que usted contribuyó a desperdiciar, lo cual implica de alguna manera negarle posibilidades futuras de desarrollo a su comunidad y a su país lo cual es antiético y antiprofesional. (p. 14)

La mayoría de las personas y los docentes son conscientes de esta importancia pero no saben o no logran provocar el desarrollo del pensamiento en otras personas o en sus alumnos. Lo primero que hay que tener en cuenta, como se dijo anteriormente, es que el único modo de lograr que una persona piense, razone, es poniéndola a razonar, a pensar. Nadie puede pensar por otro.

---

[1] Decana Facultad de Educación, Universidad Latina de Costa Rica

[2] Solamente por sencillez en el estilo, este documento utiliza un formato tradicional que no contempla las diferencias de género. La posición es clara y firme, en cuanto a que toda discriminación sobre esta base, o de cualquier otra naturaleza, se considera odiosa e incongruente con los principios que en éste se expresan.

Dos conceptos que nos permitirán centrarnos en el tema son:

➔ Pensamiento, en un sentido estricto, se liga a entendimiento. Así se define como la capacidad y ejercicio de la actividad intelectiva o cognoscitiva. Pensamiento es tanto la capacidad o facultad de pensar, como el contenido pensado (concepto). En los últimos siglos el término pensamiento suele hacer referencia no solo a las operaciones lógicas del razonar o pensamiento discursivo, sino que incluye todas las funciones lógicas, epistemológicas y psicológicas de la mente humana. (Varios, 1981, Tomo 18, 243)

➔ Otro concepto que tenemos que clarificar es el de lógica. Lógica es una ciencia que tiene por objeto lo racional o lo discursivo y como ciencia que es, la lógica es el fruto de la actividad racional o discursiva, por lo tanto, es una ciencia cuyo objeto lo constituye la misma ciencia. Dicho de otro modo esta ciencia no se ocupa de nuestro conocimiento en cuanto que éste está vertido hacia la realidad del mundo circundante para conocerlo, sino que la lógica se ocupa de las "formas" que utiliza nuestra razón para la organización de los conocimientos que obtenemos en nuestro contacto con el mundo. (Cfr Cuellar y Rovira, 1994, 193)

Situándonos en el tema de la conferencia: desarrollo del pensamiento lógico y pensando que va dirigida a profesores de matemática, es importante aclarar que no se pretende que el profesor dé clases de lógica en sus clases de matemáticas, sino más bien que puedan provocar en sus alumnos el desarrollo de procesos lógicos, es decir, se pretende que todo profesor se ponga por objetivo lograr que sus alumnos piensen lógicamente. Pero aunque el estudiante no reciba clases de lógica, sí se hace necesario o imprescindible que el profesor conozca esas "funciones lógicas, epistemológicas y psicológicas de la mente humana" y que pueda hacer explícitas las formas o tipos de razonamiento correcto en cada actividad, al mismo tiempo que debe saber cómo planear actividades que logren el objetivo propuesto.

Se exponen a continuación someramente, algunos conceptos o conocimientos que se ve necesario que dominen los docentes:

A. Las operaciones de la mente:

➔ Concebir: concepto
➔ Juzgar: juicio
➔ Razonar: raciocinio.

1. Concepto: son una representación intelectual del ser y de la naturaleza de las cosas. Pueden ser simples o compuestos. El primer paso es la simple aprehensión de las cosas y su coronamiento es la definición y la división.

   Los procedimientos lógicos que tienen relación directa con los conceptos son:

   - Asociación de propiedades a los objetos
   - Distinción de los diferentes tipos de propiedades: esenciales y secundarias, generales y específicas, necesarias, suficientes y necesarias-suficientes
   - Inducción, se reduce a la observación de propiedades comunes a diferentes objetos y su extensión mediante una generalización empírica
   - Identificación de conceptos, con fundamentación
   - Definición.

   Es importante conocer también acerca de la definición

- El camino para llegar a ella,
- las clases que existen: esencial, nominal, descriptiva, genética y causal
- sus cualidades: precisa, propia, no circular y positiva.

2. Juicios: es la forma lógica del pensamiento que afirma o niega algo. Pueden ser verdaderos, falso o posibilidades.

   Las propiedades distintivas del juicio son:

   - El juicio compone o divide según la unión o división real de las cosas
   - En todo juicio se afirma explícitamente que algo es o no es
   - Un juicio es verdadero cuando afirma que es lo que es, y que no es lo que no es.

   Pueden ser simples o compuestos.

   Las proposiciones compuestas son juicios que se componen de varias proposiciones simples, unidas entre sí en una unidad de significado. Pueden ser: copulativas, conjuntivas, disyuntivas, condicionales, causales, temporales, adversativas y correlativas. (Cfr Sanguinetti, 1982)

3. Raciocinio: acto mediante el cual se llega a conocer una verdad nueva a partir de verdades ya conocidas.

   En el raciocinio se busca directamente la validez o corrección estructural. El raciocinio se divide en inductivo y deductivo. Este último se caracteriza porque su validez depende exclusivamente de que obedezca a reglas formales. En cambio, el inductivo se caracteriza porque su validez depende exclusivamente de factores materiales o de contenido, concretamente de que la enumeración de casos sea suficiente para fundamentar una generalización. La expresión verbal del raciocinio es la argumentación. (Varios 1981, tomo 19, 593)

B. Los procedimientos generales usados en toda elaboración científica son la definición, división y demostración, por ello se debe concentrar la atención en estas actividades mentales; por ejemplo, es importante que el alumno aprenda a definir, y para ello debe encontrar diferencias y similitudes entre los objetos.

Algunos autores, tomando en cuenta los avances de la psicología cognitiva, individualizan las funciones generales de los procesos del pensamiento y las habilidades cognitivas básicas en las que estas funciones se articulan y que son necesarias para un correcto desarrollo. Santo di Nuovo (cfr varios1995b, 177-221) asumiendo como cuadro de referencia el Sistema de Objetivos Fundamentales de la Educación propuesto por García Hoz, expone las habilidades correspondientes a cada función. A continuación se presentan solamente las que hacen referencia al área de desarrollo reflexiva, pues son las que remiten más directamente al tema que aquí se desarrolla:

Área de desarrollo	Funciones mentales	Habilidades básicas
Perceptiva	Atención	
	Percepción	
Reflexiva	Conceptualización	- Pensamiento analítico - Pensamiento sintético - Pensamiento intuitivo - Pensamiento generalizador - Pensamiento evaluador

		- Pensamiento alternativo - Pensamiento estratégico o medio-fin - Pensamiento secuencial - Pensamiento analógico - Pensamiento causal
Creativa	Productividad divergente	
	Imaginación y fantasía	
Retentiva	Aprendizaje y memoria	
Expresiva verbal	Comunicación lingüística	
Expresiva práctica	Expresión corporal	
	Expresión pictórico-plástica	
	Expresión musical	
	Motrices	
	Lúdica	
	Relacionales y sociales	
	Productividad laboral	

En esta fase se adquieren algunas nociones esenciales para la estructuración del pensamiento lógico:

- Nociones espaciales y temporales
- Nociones dimensionales
- Nociones de cantidad y número
- Seriación
- Correspondencia
- Conservación del peso, de la cantidad
- Clasificación
- Conceptualización abstracta
- Inducción/deducción
- Probabilidad
- Causalidad. (cfr varios 1995b,188-190)

Estas habilidades posteriormente deben ser traducidas a objetivos de aprendizaje, utilizando los verbos significativos de acciones como son: considerar separadamente, analizar, distinguir, dividir, descomponer, calificar, calcular, y muchos más.

Los pedagogos de los Estados Unidos también se plantearon el problema del desarrollo del pensamiento, en especial en el área de matemáticas y surgieron preguntas como la siguiente: ¿cómo pasar de unas clases donde se "transmite la información", donde el aprendizaje es sólo acumulación pasiva de dicha información, donde la atención se centra sólo en los contenidos matemáticos que hay que enseñar, a unas lecciones donde el interés se coloque sobre la propia actividad matemática, en el proceso de construcción del conocimiento matemático?

Y la respuesta coincide con lo anteriormente expuesto.

Lo primero es modificar la epistemología del conocimiento matemático actual, y así la enseñanza de las matemáticas debe ser vista como:

- Resolución de problemas
- Comunicación
- Razonamiento
- Capacidad de establecer conexiones (cfr varios 1994, 300, citando NCTM,1989)

La *National Council of Teachers of mathematics* de los Estados Unidos indica que en este nuevo contexto, la enseñanza de las matemáticas debe promover que los alumnos adquieran determinadas habilidades como:

- habilidad para explorar, conjeturar y razonar lógicamente
- resolver problemas no rutinarios
- habilidad para desarrollar una comunicación sobre la actividad matemática y la propia matemática
- desarrollar autoconfianza para realizar búsquedas, conjeturas, generalizaciones y toma de decisiones, y
- acostumbrarse a utilizar tanto información cuantitativa como espacial, etc. (cfr varios 1994, 300, citando NCTM, 1989)

Esta misma comisión, propone cinco metas curriculares para los estudiantes

- aprender a valorar las matemáticas,
- tomar confianza en la propia destreza
- ser capaz de resolver problemas matemáticos
- aprender a comunicarse matemáticamente
- aprender a razonar matemáticamente (varios, 1994, 300)

Si éstas son las metas para los alumnos, la actividad del profesor debe variar; la acción docente debería caracterizarse por preguntas constantes que animen a los estudiantes a plantearse dudas, retos, o conflictos, para que ellos mismos las respondan; o hagan preguntas al profesor o a sus compañeros que les permitan ir visualizando la resolución.

Las preguntas podrían insertarse en las categorías o metas anteriormente citadas. A continuación se presentan algunas preguntas como ejemplo:

1. Ayudar a los estudiantes a trabajar juntos para dotar de significado a las matemáticas.
   - ¿Qué es lo que los demás piensan sobre lo que ha dicho Jaime?
   - ¿Alguien tiene la misma respuesta pero lo puede explicar de una manera distinta?
   - ¿Puedes convencernos de que esto tiene sentido?
2. Ayudando a los estudiantes a confiar más en ellos mismos para determinar si alguna cosa es matemáticamente correcta.
   - ¿Por qué piensas esto?
   - ¿Cómo llegaste a esta conclusión?
3. Ayudando a los estudiantes a aprender a razonar matemáticamente.
   - ¿Esto se cumple siempre?
   - ¿Puedes pensar un contraejemplo?
   - ¿Lo puedes probar?
4. Ayudando a los alumnos a aprender a realizar conjeturas, inventar y resolver problemas.
   - ¿Qué sucedería si...?

- ¿Cómo pensaste la forma de resolver el problemas?
- ¿Qué hay de igual y de diferente entre tu método y el de ella?

5. Ayudando a los estudiantes a conectar las matemáticas, sus ideas y sus aplicaciones.
   - ¿Cómo se relaciona esto con ...?
   - ¿Qué ideas de las que habíamos aprendido antes han sido útiles para resolver el problema?
   - ¿Hemos resuelto alguna vez algún problema parecido? (varios, 1994, 302-303)

Un ejemplo de lo anterior tomado del libro *Teaching and learning mathematics in the 1990s*, y traducido es:

> Considere este escenario familiar: el profesor ha pronunciado magistralmente una exposición introductoria, magistral en su claridad y la riqueza de sus ejemplos. Los alumnos estuvieron atentos, interesados, y comprometidos. "Ahora, a mí me gustaría que ustedes intentaran resolver unos pocos problemas por ustedes mismos". Siguieron varios minutos de silencio. Una mano desamparada se alzó.
>
> - "Por favor, profesora, yo no entiendo".
> - "Si, Adam. ¿Qué es lo que no entiendes?".
> - "Todo".
>
> Para ayudar a Adam a señalar con precisión su dificultad y preparar la escena para una ayuda constructiva, el procedimiento siguiente es recomendado:

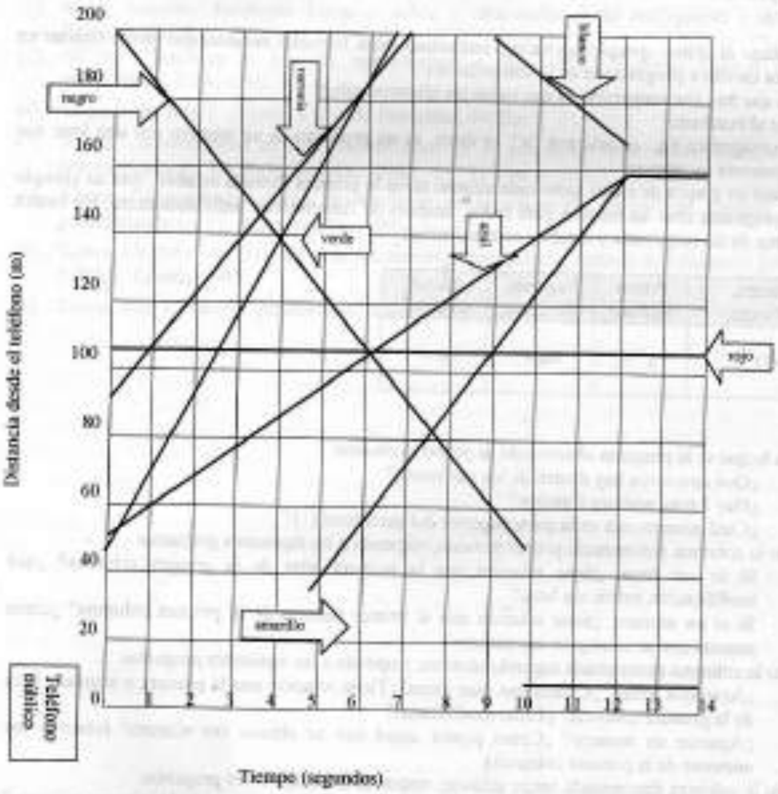
Procedimiento	Propósito.
1. Leame el problema. Si usted no conoce una palabra, omítala.	1. Identificar los errores de lectura
2. Dígame lo que la pregunta le está pidiendo a usted que haga.	2. Identificar los errores de comprensión
3. Dígame cómo hará usted para encontrar la respuesta.	3. Identificar los errores de transformación
4. Muéstreme lo que hace para obtener la respuesta. Dígame que está usted haciendo.	4. Identificar los errores en el uso de las habilidades procesuales
5. Ahora escriba abajo la respuesta a la pregunta.	5. Identificar *encoding errors*.

La investigación reportada por Clements (1980) indica que al menos el 40 % de los errores de los estudiantes en los problemas matemáticos escritos ocurren antes de que ellos tengan que usar las habilidades procesuales, esto pone en evidencia el punto principal en el que los profesores deben realizar un laborioso esfuerzo. En general, los estudiantes y los profesores necesitan focalizar su atención en la transformación de la tarea escrita hacia un procedimiento matemático. Las cinco preguntas arriba escritas, pueden equipar a los profesores para evaluar lo que los estudiantes entienden e identificar el punto en el cual ocurre la dificultad. (Cfr NCTM, 1991, 122-123)

En el ejemplo anterior se enfatizó el uso de las preguntas para lograr que el alumno participe activamente en su aprendizaje.

Pero existen otro modos de lograr esta participación. Un ejemplo podría ser el siguiente, en el cual se ilustra cómo a partir de un gráfico se puede contar una historia. La actividad comienza dividiendo a los alumnos en pequeños grupos y presentándoles un gráfico distancia-tiempo en el cual se muestra el movimiento de varios carros de diferentes colores a lo largo de una carretera recta. Cada grupo escribe una historia o diálogo que relate la experiencia de un pasajero de uno de los carros. Después de preparar la historia que es una explicación del gráfico, uno de los estudiantes lee, al resto del grupo la historia mientras los otros de su grupo representan lo que se lee. Mientras la historia se está leyendo, los compañeros de la clase escuchan cuidadosamente y comentan sobre la fidelidad de la historia con el gráfico, en términos de consistencia con la información matemática y de la plausibilidad del mundo real.

El gráfico presentado a los alumnos es el siguiente



Y una parte de la historia que se escribió fue la siguiente:

"Nosotros dejamos el lugar del teléfono público y nos montamos en nuestro Ferrari verde y corrimos a prisa hacia la casa a 36 metros por segundo (108 Km/h)."

"¡Un carro azul delante de nosotros va muy lento!

Tiempo = 1

"Cuando nosotros pasamos cerca del carro azul (a los 30 metros del teléfono), nosotros pudimos ver adelante un carro naranja , un carro rojo parqueado al lado de la calle y a los 150 metros adelante había un gran camión negro viniendo hacia nosotros".

Tiempo = 2

"Usted vio que el carro naranja pasó rozando el carro rojo parqueado.

Tiempo = 3 y un ratito

"¡Hey, mire! El carro rojo pertenece al Sr Smith, nuestro profesor de matemáticas. El está caminando para ir a inflar la llanta (murmullo compasivo)... (NCTM, 1991, 125-126)

Y para finalizar el último ejemplo: un trabajo individual sobre fórmulas notables que puede realizar un alumno tanto por escrito o programado en la computadora.

Lo primero que hay que asegurarse es que todos los alumnos saben:

- Elevar al cuadrado
- Lo que significa 6a, es seis por "a", es decir, es un producto de un número por una letra que representa un número.

Se trabajó en grupos de cinco, pero cada alumno tenía la primera fórmula notable con un ejemplo diferente. Las preguntas eran las mismas para todos, después de responderlas individualmente, los cincos 'discutían' acerca de las respuestas y sacaban consecuencias.

Primera columna	Primer término	Segundo Término	tercer término.
$(a+3)^2 =$	$a^2 +$	$6a +$	$9 =$

1. Responda a lo que se le pregunta observando la primera columna.
   - 1.1. ¿Qué operación hay dentro de los paréntesis?
   - 1.2. ¿Hay letras, número o ambos?
   - 1.3. ¿Cuál número está en la parte superior del paréntesis ( )?
2. Observando la columna denominada primer término, responda a las siguientes preguntas
   - 2.1. Si es una letra, ¿tiene relación con la primera letra de la primera columna? ¿qué modificación sufrió esa letra?
   - 2.2. Si es un número, ¿tiene relación con el primer número de la primera columna? ¿cómo piensas que se consiguió ese número?
3. Observando la columna denominada segundo término, responda a las siguientes preguntas.
   - 3.1. ¿Aparecen letras? ¿Cuáles son esas letras?¿Tiene relación con la primera o segunda letra de la primera columna? ¿Están modificadas?
   - 3.2. ¿Aparece un número? ¿Cómo piensa usted que se obtuvo ese número? (observe los números de la primera columna).
4. Observando la columna denominada tercer término, responda a las siguientes preguntas.
   - 4.1. Si es una letra, ¿tiene relación con la letra del segundo término de la primera columna? ¿qué modificación sufrió esa letra?
   - 4.2. Si es un número, ¿tiene relación con el número del segundo término de la primera columna? ¿cómo piensas que se consiguió ese número?
5. Ponle valor a cada letra y efectúa las operaciones
   - 5.1. $a = 2$

Estos ejemplos pueden ayudar a cada profesor a imaginar otros instrumentos propios, que permitan pasar de unas clases donde sólo se transmite la información, a otras más activas, donde lo importante es tanto el desarrollo del pensamiento lógico como los contenidos que se quieren transmitir.

Bibliografía

[1]. Cuellar B., Luis; Rovira M., José Ma. *Introducción a la filosofía 3*, Magisterio Casals, España, 1994.

[2]. Maya, Arnobio, *Antología. Lecturas sobre el desarrollo de la inteligencia y del pensamiento,* Proyecto SIMED.

[3]. NCTM. "Teaching & learning mathematics in the 1990s" *National council of teachers of mathematics*, USA, 1991.

[4]. Sanguinetti, Juan J. *Lógica*, EUNSA, Pamplona, 1982.

[5]. Varios. *La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia*, Tratado de Educación personalizada no. 14, Rialp, España, 1994.

[6]. Varios. *La enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria*, Tratado de Educación personalizada no. 23, Rialp, España, 1995.

[7]. Varios. *Del fin a los objetivos de la educación personalizada*, Tratado de Educación personalizada no. 3, Rialp, España, 1995.

[8]. Varios. *Voz. raciocinio. pensamiento.* Gran Enciclopedia Rialp, Rialp, Madrid, 1981.

La formación de profesores de matemáticas en las nuevas tecnologías. Una experiencia práctica.

Lourdes Hernández R.; Ma. del Carmen. Rodriguez P.[1]

Resumen

El desarrollo científico-técnico alcanzado en la época actual ha puesto en manos del hombre nuevas tecnologías que incrementan su bienestar y productividad.
Particularmente a la computadora se le atribuye haber transformado en muchos sentidos todas las esferas de la vida social y el impacto que viene produciendo alcanza por supuesto la esfera educativa.

A la comunidad académica corresponde asimilar estas nuevas tecnologías y asumir la preparación de las nuevas generaciones.

Los problemas de la educación, y en particular, de la enseñanza de la matemático demandan de una elevada preparación científica de los profesionales que participan en el proceso docente-educativo de esta disciplina. Este objetivo solo se puede lograr si se introducen, métodos y medios que propicien una efectiva superación y calificación técnica y profesional del personal docente. Por ello, resulta fundamental fomentar vías de educación post graduada.

El presente trabajo expone una experiencia de cómo involucrar a profesores universitarios de matemática a través del postgrado a esta emergente tarea.

Desarrollo

Al analizar los cambios en el perfil profesional actual y futuro, se alienta un esfuerzo de la comunidad educativa tanto en relación con los métodos de enseñanza que incorporan la computadora para mejorar la calidad de la formación, como para estimular su uso en el contexto de trabajo. Aun no se ha logrado el cambio que las Nuevas Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (NTIC) pueden potenciar. No asumir el reto de insertarlas en el proceso pedagógico en un breve periodo de tiempo pudiera limitar la contribución de los profesionales en la solución de problemas sociales.

Muchos docentes reconocen el papel de la computadora sobre otros medios en el proceso de enseñanza - aprendizaje. Comparándola con otros medios técnicos, como el video o la radio, vemos que ésta aventaja a ambos en su capacidad de interactuar con el estudiante. Esta ventaja, unida a la posibilidad de usar imágenes y sonido, la convierte en un medio de alta capacidad educativa.

El profesor debe considerar a la computadora como un soporte en la enseñanza que aventaja a otros medios por su alto nivel de interacción, es decir, no verla sólo como una nueva herramienta de apoyo en el aula, sino como aquella que puede transformar los métodos tradicionales de enseñanza, si sus posibilidades se utilizan constructivamente sobre la base de una cultura informática. Todo ello avala su creciente uso en el proceso pedagógico.

Una de las limitaciones presentadas para introducir la computadora en la escuela, ha sido la resistencia de los maestros a utilizar la nueva tecnología. En algunos casos porque no quieren verse desplazados en sus funciones por un equipo, y en otros porque no se sienten capacitados ni pueden estar al día, en relación con el desarrollo acelerado de la informática.

---

[1] M/c, profesoras de matemática de la Facultad de Ingeniería Mecánica del Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cuba.

De nada vale poseer esta novedosa tecnología si no se está preparado para asumirla. De hecho, se necesita adquirir una cultura informática que facilite explotar su potencial. Claro está, que no es posible hablar del papel de la universidad en la preparación informática del colectivo estudiantil, si sus profesores no están preparados para enfrentar el reto. Es indispensable la preparación de los docentes para realizar esa importante tarea.

El profesor es la persona más capacitada para conocer los problemas de su aula, de la asignatura que imparte y la solución de los mismos. El sistema de acciones didácticas consecutivas que organiza para llevar adelante su clase permite la incorporación de diversas técnicas que distinguen la misma clase impartida por dos profesores distintos. Sin dudas, la inserción de la computadora en el proceso docente es tarea del profesor, y solo él decide si a pesar de las limitaciones de un programa, este puede ser utilizado por sus alumnos, o si por el contrario pese a las virtudes que brinda el mismo, no satisface los objetivos a alcanzar en la asignatura.

Es importante tener en cuenta que para alcanzar un cambio cualitativo en la enseñanza es necesario que la inserción de la computadora en el aula no constituya una suma de los momentos en que se emplea este equipo en el aula, sino un proceso donde cada uno de esos momentos está estrechamente relacionados entre sí, conformando un sistema.

Nuestra experiencia esta basada en la impartición de un curso a docentes de matemática de una institución universitaria, en la cual la utilización de este medio como apoyo a la enseñanza era hasta el momento del curso muy limitada, sin embargo los docentes mostraron mucho interés en la búsqueda de vías para su implementación en las clases de forma novedosa y creadora.

Nuestra tarea estuvo dirigida a dar respuesta durante el curso a la siguiente interrogante:

¿ Cuándo y cómo utilizar la computadora en la impartición de su asignatura?

Para desarrollar este proceso se les orientó ante todo, hacer un análisis y estudio de que orientaciones y políticas habían en este sentido en el territorio de la institución y a partir de este resultado proyectar la estrategia a seguir.

Como una primera etapa se debe analizar en qué momentos es necesario el uso de este medio, a partir de un análisis de la asignatura o las necesidades y problemas que presenta la institución, según corresponda. Es necesario hacer una valoración no de los problemas aislados, sino de todo el sistema, lo que implica ver cómo y cuándo utilizarla, los fines de la inserción, que aporta, su papel en el cambio, etc.

Para ello proponemos algunos aspectos a tener en cuenta.

Para insertar la computadora en una asignatura en particular es necesario partir de los problemas pedagógicos que se presentan en la misma, por ejemplo, la simulación de un proceso no visible en la práctica, o el limitado tiempo con que cuenta una temática para analizar los resultados que el estudiante debe haber calculado previamente, la poca motivación de los estudiantes por la materia, dificultades con los conocimientos propedéuticos en la asignatura, poca bibliografía para el tratamiento de los contenidos, entre otros.

En consecuencia, el análisis de este punto se divide en dos momentos. El primero ocurre al analizar, con un enfoque sistémico, los componentes del proceso de enseñanza en la asignatura y sus relaciones internas. Un segundo momento implica verificar en que medida la computadora puede, ya sea con software de propósito general o con fines específicos docentes, puede contribuir a resolver estos problemas o algunos de ellos.

Por tanto, deben analizarse la ubicación de la asignatura en plan de estudio, los objetivos de la asignatura, los contenidos, métodos y medios de enseñanza que se utilizan. También debe tenerse en cuenta en que medida incrementa la calidad del proceso pedagógico al integrar conocimientos, analizar variadas alternativas y fenómenos complejos, entre otros.

La aplicación de la propuesta de inserción de la computadora implica la existencia de todos los recursos necesarios para poner en práctica el proyecto, lo que incluye la existencia de los programas y aplicaciones previstas en el proyecto.

Luego, en la concepción de la propuesta de inserción de la computadora y su puesta en práctica deben tenerse en cuenta dos momentos importantes:

- La selección entre el software existente, de aquel que satisfaga los requerimientos de calidad y los objetivos trazados en la estrategia de computarización.

- Diseñar un software, para que sea elaborado a la medida de las exigencias planteadas.

Una vez determinado los momentos en que se va a emplear la computadora, debe seleccionarse y evaluarse la calidad del software existente relacionado con los temas escogidos, como medio de enseñanza, siguiendo una metodología para tales fines, y seleccionar aquellos que satisfagan los objetivos que se han propuesto.

Una vez sensibilizados los profesores con la tarea, para cumplir las etapas antes expuestas, se presentó un conjunto de software relacionados con las matemáticas, también los cursistas hicieron una búsqueda de aplicaciones y de todo lo mostrado fueron capaces de criticar y evaluar comenzando de esta forma el análisis de propuesta de proyecto de cada uno. La mayoría optó por la segunda opción e iniciaron el trabajo encaminado a diseñar las aplicaciones en diferentes temas de sus asignaturas avalando desde la necesidad del proyecto hasta la posible implementación posterior en las actividades docentes. Se desarrolló la siguiente metodología para la elaboración del guión:

1. **Nombre de la aplicación propuesta.**

2. **Objetivo**
   Debe ser formulado con toda claridad y precisión. Su alcance estará en correspondencia con la función didáctica y con las habilidades previstas a desarrollar.

3. **Caracterización**
   Tiene en cuenta los siguientes aspectos:
   - Temática
   - Nivel y edad del usuario
   - Conocimientos propedéuticos
   - Función didáctica

4. **Información**
   Responderá a los criterios pedagógicos, psicológicos y socioculturales. La información puede ser gráfica, textual o sonora. Su contenido tendrá como requisitos:
   - Nivel de actualidad
   - Rigor científico

- Estar profesionalizado
- Responder a la interdisciplinariedad
- Ritmo
- Volumen
- Estructurado de acuerdo a los niveles de asimilación
- Definir núcleos de información para determinados tipos de software
- En este aspecto se especificará en la bibliografía orientada de consulta.

5. **Secuencia de la navegación.**
Se refiere a la secuencia de escenas (textual o gráfica) del software. En este aspecto se definirán las figuras, videos, animaciones , efectos sonoros, etc.

6. **Diseño general de las pantallas.**
Concibe la forma de presentar el menú, los mensajes de error. Para cada escena se tendrán en cuenta los siguientes elementos:
   - Marcos/ventana
   - Zonas sensibles
   - Botones
   - Iconos
   - Animación
   - Sonido
   - Objetos estáticos: títulos, imágenes, zonas.
   - Objetos dinámicos: mascotas, viñetas, animados
   - Objetos interactivos: iconos, botones, listas
   - Tiempo de duración de escenas y las acciones
   - Contextualización profesionalizada de las escenas.

7. **Diagrama de la ayuda**
   - Flujo
   - Contenido
   - Diseño

8. **Requerimientos para la manipulación.**
Especificar para qué tipo de máquina se confeccionará la aplicación.

Aunque el papel protagónico en las tareas descritas anteriormente le corresponde al profesor, debe ser un equipo multidisciplinario (psicólogos, pedagogos, diseñadores, programadores, etc.) quien participe activamente en todas ellas, asumiendo cada uno su rol en la tarea.
Nuestro objetivo principal en el curso fue lograr un primer acercamiento en este sentido y los cursistas mostraron ser capaces de diseñar sencillas aplicaciones que a través de presentaciones realizadas en Power Point simulaban software educativos posibles a implementar para la solución de los problemas identificados en la docencia que imparten..

Queda mucho por hacer, pero el alcance insospechado de la revolución tecnológica que vivimos impone un cambio de escenario a la universidad del nuevo siglo.

Bibliografía

[1] Alessi S. Y S. Trollip, *Computer-based instruction. Methods and development*, New Jersey, 1985
[2] Glez Manet, Enrique, *Impacto social de las tecnologías audiovisuales*, Editorial Pueblo y Educación, 1996.
[3] Hernández R, Lourdes. *Fundamentos de la instrucción asistida por Computadora*. Curso de Maestría Mayo1999.
[4] Jaramillo, Fabián. *¿Cómo se utilizan los computadores en los colegios?*, Ediciones Abya-Yala, Ecuador, 1995.
[5] MES, "Programa de computación" editado por el MES en 1990
[6] Pérez Vicenta y M. Pilar de la Cruz, "Más allá de la computadora", Revista Educación No. 2, La Habana, Cuba, 1994.

Comunicación: factor esencial en el uso de ordenadores en Matemática

Tamahara I. Díaz G.; Adriana Martín C.; María Febles.E.; Félix J. Domínguez A.

Resumen

Los ordenadores representan un apoyo importante en la enseñanza de la Matemática actual. Para lograr que los estudiantes interioricen su importancia y aplicación en esta rama del saber, la comunicación pedagógica ocupa un lugar cimero ya que no sólo permite el intercambio con el profesor sino que, a través de él, logra la comprensión de la necesidad e importancia del uso del ordenador.

Actualmente el desarrollo ascendente de la ciencia requiere de profesionales con un nivel superior de integración, por lo que resulta imprescindible una correcta formación de los mismos. No queda exenta de ese desarrollo la Educación y los métodos y medios que en su conjunto se apliquen. El perfeccionamiento continuo de la enseñanza exige de técnicas novedosas que simplifiquen y apoyen el trabajo científico – técnico y entre éstas pueden considerarse los ordenadores que, aún cuando han hecho su aparición hace unas décadas, deben estar presentes desde los primeros años de la enseñanza y muy en particular en la enseñanza superior. Es por ello que resulta interesante valorar este aspecto en el marco de la enseñanza de las Ciencias Básicas y, dentro de ellas en la Matemática.

Hoy la ciencia psicopedagógica ha demostrado que para que la educación sea efectiva es necesario promover una relación positiva con los estudiantes que permita establecer compromisos con su educación por parte de los educandos y cuyo resultado contribuya a su formación integral.

Es importante, no sólo el contenido a desarrollar con los alumnos, sino, cómo se va a transmitir la información y que medios utilizar; hay que prever la forma de incidir más directamente en ellos para lograr un resultado favorable en el proceso que permita un aprendizaje significativo.

La labor del profesor es educar a sus estudiantes, no sólo transmitirle sus conocimientos, sino lograr que el mismo se desarrolle y de una u otra forma aprenda, pero que lo haga de una manera significativa, integral y para ello el profesor debe trabajar debe trabajar de manera tal que haya una construcción armoniosa de esa -su- subjetividad.

Un instrumento importante a desarrollar por el profesor es una buena comunicación pedagógica que le permita optimizar su función orientadora en aras de resultados superiores y compromisos por parte de los estudiantes en su propio aprendizaje con el uso de los avances de la ciencia y es por ello que en la enseñanza de la Matemática un rol importante le corresponde a los ordenadores como medio para el aprendizaje y la aplicación de conocimientos.

Si revisamos la estrategia informática de las carreras en que trabajamos, encontramos que algunas de las habilidades que se deben lograr en los primeros años son: algoritmizar, utilizar una hoja de cálculo electrónico, utilizar un editor gráfico y de presentaciones, utilizar paquetes matemáticos, y otras.

Aún cuando a la Matemática no le corresponde directamente lograr los objetivos que conlleven a la formación de dichas habilidades, puede incidir indirectamente en los mismos, incorporando en las clases el uso de los ordenadores.

Cuando un docente aborda una temática en la que se auxilia del ordenador para exponer, demostrar o ejemplificar un concepto matemático, de hecho lo utiliza como un medio de enseñanza y lógicamente con la exposición gráfica que muestra, tiene que estar presente la exposición y explicación adecuada del profesor, señalando los aspectos importantes con la aplicación de su maestría pedagógica, estableciendo una correcta comunicación con sus alumnos, a través de la modulación de la voz, los gestos que emplea, el énfasis que hace.

Así mismo, cuando el profesor enfrenta a sus estudiantes con un nuevo software o le orienta utilizar alguno ya revisado con anterioridad en la aplicación a los ejercicios que le orienta o en alguna tarea extraclase, lo hace de forma tal que el estudiante se sienta motivado a conocer más de su uso y aplicación, del alcance que tiene para darle solución a sus tareas escolares. Además, el estudiante siente la necesidad de continuar en esa línea aún cuando la disciplina que trabaja en ese momento no sea específicamente la informática.

Para lograr exitosamente estos objetivos, la comunicación entre el docente y el estudiante desempeña un rol decisivo puesto que constituye una premisa importante en el proceso de enseñanza – aprendizaje y sólo estableciendo eficazmente esa comunicación se puede asegurar que el estudiante comprenda la necesidad e importancia del uso de los ordenadores en la Matemática.

Caracterizar la comunicación en el proceso docente permite conocer mejor este elemento y así promover el desarrollo de su acción como una habilidad – profesional del mismo. Para lograr esta caracterización deben analizarse de forma científica los siguientes aspectos:

- El cumplimiento de sus diferentes funciones.
- El clima psicológico existente en el aula.
- El estilo de comunicación utilizado.
- La percepción del alumno por el profesor.
- La percepción del profesor por el alumno.

Un profesor comunicativo es aquel que tiene aptitud o inclinación natural a comunicar a otro lo que posee, sin embargo, esto no exime la posibilidad de desarrollar habilidades de comunicación más completas en los docentes. Un profesor que reúne las cualidades comunicativas, podrá transmitir a sus estudiantes la importancia del uso de la computación en la Matemática sin perder de vista la importancia y la ineludible necesidad de interiorizar los conceptos y su desarrollo, puesto que si el alumno no se convence de esto, los ordenadores y su uso podrían atentar contra el pensamiento lógico y racional en la enseñanza de la Matemática y así convertirse en máquinas para aplicar conceptos sin un análisis previo. Esto traería como consecuencia que se forme un profesional incapaz de aplicar, con una amplia y clara visión los conceptos que le aporta la matemática en su futuro desarrollo y comprensión de las demás ciencias.

Es por ello que en las ciencias psicológicas, la comunicación es considerada una categoría con el mismo nivel de importancia que la categoría actividad, pues permite explicar los vínculos entre las personas de manera directa o indirecta además de la actitud y actuación del individuo, lo que permite entender científicamente en que consiste el hecho de enmarcar al hombre como un ente social, y por tanto permite comprender el uso de los diferentes recursos que posee de manera lógica y racional.

La comunicación posee una alta carga educativa ya que no sólo permite la trasmisión de toda la realidad psicológica de las personas, sus valores sociales, conocimientos, habilidades y experiencias, sino que además, González F. Y Mitjans A. (1989) afirman que la unidad de lo cognitivo y lo afectivo constituye un principio esencial para comprender y utilizar la comunicación en la educación del hombre.

Se impone el papel que juega en la educación la comunicación para lograr que ocupe el papel que le corresponde en el proceso docente educativo y en mejores resultados en dicha actividad.

Si revisamos la teoría de Vigotsky en lo referente a la orientación y aplicada a la situación pedagógica, encontramos que orientar es ayudar al desarrollo personal del sujeto y el profesor debe ser cuidadoso al brindar la orientación para que el estudiante sienta deseos de educarse. Es por ello que para que la tarea del docente sea más eficaz en lo referente a introducir medios de aprendizaje, la orientación debe ser clara, precisa e incentivar en los estudiantes el interés por utilizar los mismos en la tarea escolar.

La enseñanza de la Matemática puede alcanzar niveles superiores si se hace un uso adecuado y racional de los ordenadores tanto como medio de enseñanza para mostrar y ejemplificar conceptos como en la función de medios de aprendizaje para aplicar los conceptos matemáticos en otras ramas del saber y por esto, la comunicación está en la vanguardia de este proceso, permitiendo una orientación certera del uso de los ordenadores mediante una adecuada orientación por parte de un docente que reúna las condiciones de profesor comunicativo.

Puede concluirse que en el tránsito por el camino de la enseñanza, encontramos que paralelamente con la enseñanza de cualquier ciencia y por ende de la Matemática, debe ir la comunicación, máxime si se aspira a introducir nuevas ideas en aras de elevar la calidad del proceso enseñanza – aprendizaje. Además, otra conclusión importante está dada por la importancia que ha cobrado en la Pedagogía y por tanto en el proceso antes referido, la orientación desarrolladora por lo que, al incorporar los ordenadores a este proceso, resulta inevitable profundizar en el estudio de la comunicación como una vía para lograr una orientación precisa y en un lenguaje claro transmitir eficazmente a los estudiantes el mensaje que se le quiere hacer llegar y que en el caso expuesto resulta la necesidad del uso de las computadoras en el aprendizaje y aplicación de la Matemática.

Bibliografía.

[1] González, F. *Comunicación, personalidad y desarrollo.* Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba, 1995.

[2] González, F; Mitjans, A. *La personalidad. Su educación y desarrollo.* Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba, 1989.

[3] Kan-Kalik, V.A. *Para el maestro sobre la Comunicación Pedagógica. Prosviechenie.* Ariño, M. M. Et al.(1993). *La motivación, punto de partida en la enseñanza de la Matemática en la Universidad Moscú,* 1987.

[4] O'Shea, T. et al.. *Enseñanza y aprendizaje con ordenadores. Inteligencia artificial en la educación.* Ediciones Anaya Multimedia S. A., Madrid, 1985.

[5] *La computadora como herramienta en este proceso.* Universidad Tecnológica Nacional Argentina, Memorias del Congreso COMAT'93, Universidad de Matanzas, Cuba, 1993.

Recursos tecnológicos en la formación del profesorado

María de los A. Martínez R.; Narciso Sauleda P. [1]

1. Ordenadores, multimedia y educación

En el alba de la era de la información la formación inicial del profesorado debe atender las necesidades emanadas de la creciente tecnificación de la sociedad, y al mismo tiempo ha de rentabilizar la efectividad de las nuevas tecnologías en los procesos de aprendizaje y en la consecución de los objetivos curriculares. Por ello, todo proyecto docente debe dedicar una alta espaciosidad a las previsiones de uso y a la integración de los recursos tecnológicos, justificando siempre la fundamentación didáctica (Anderson, 1991; Sauleda, 1992). La diferenciación entre los diferentes media se ha caracterizado hasta ahora por los sistemas de símbolos que utilizan, pero algunos media quedan mejor caracterizados por lo que pueden hacer con la información, es decir su capacidad de procesar símbolos. Este es el caso de los ordenadores, el prototipo de los procesadores de información. Los ordenadores pueden yuxtaponer o transformar información de un sistema de símbolos a otro. Un alumno puede mecanografiar texto y un ordenador con un sintetizador de voz puede transformar el texto en sonido o un ordenador puede tomar valores numéricos y transformarlos en gráficos. Se están desarrollando estudios que demuestran que los ordenadores ayudan a crear vínculos entre sistemas simbólicos, por ejemplo entre gráficos y el mundo real. Es un hecho demostrado que lo que caracteriza al ordenador es la transformación de los sistemas de símbolos, más que su sistema de símbolos. El ordenador es además capaz de procedimentalizar información (Kozma, 1991), es decir puede operar con símbolos de acuerdo con reglas especificadas. Profusas investigaciones evidencian la capacidad de ayudar a los alumnos a elaborar sus modelos mentales y corregir sus "missconceptions" con el uso de microcosmos.

La dificultad de los alumnos de conectar el aprendizaje simbólico de la escuela con situaciones reales puede ser superada con la situación de laboratorio basada en microordenadores. Las capacidades de transformación de los ordenadores pueden hacer esta conexión. El laboratorio basado en microordenadores (Woerner et al). , 1991) permite, por ejemplo, el uso de sensores de temperatura para analizar el mundo real; así lo hicimos en una participación nuestra en una clase deformación de profesores en la Universidad de Sheffield. En dicha clase un sensor conectado a un microordenador permitía el dibujo de una gráfica de variación de la temperatura con relación al tiempo. El sensor medía la temperatura de agua con hielo, que era calentada hasta alcanzar el punto de ebullición. En otra experiencia un sensor medía las oscilaciones del perímetro torácico de un alumno a través de distintos tipos de respiración. El ordenador transforma estos datos y los representa en momento real en la pantalla. Kozma (1991) expresa que se ha hallado, en casos similares, un incremento significativo entre pre y postests en la interpretación de gráficos.

Uno de los rasgos que distingue un profesor experto de uno novel es la naturaleza de sus modelos mentales y como los utilizan para resolver problemas. Las capacidades de procesamiento de los ordenadores pueden ayudar a los novicios a refinar sus modelos mentales. Una serie de estudios en física evidencian que los expertos tienen extensos dominios de conocimiento, organizados en esquemas significativos, que están estructurados a través de las leyes de la física. Los esquemas tienen información no sólo de los esquemas de la física, sino también de como y en que condiciones aplicarlos. Es decir

---

[1] Escuela Universitaria de Formación del Profesorado, Universidad de Alicante. Apartado 99. 03080 Alicante.
Telf. 96 / 5903712, Fax: 96 / 5903464.

contienen conocimiento declarativo y procesal. Los modelos de los novicios son incompletos o erróneos. La modificación de los modelos es influenciada por ciertas condiciones como el fallo de un modelo a responder a determinadas predicciones. En estos casos una persona puede cambiar su modelo mental en favor de otro, disminuir la confianza en el modelo mental o modificarlo. El objetivo del aprendizaje es en muchos casos el último presupuesto.

La capacidad de los ordenadores de representar entidades simbólicas en formas que pueden ayudar a informar sobre los modelos mentales o la capacidad de representar gráficamente objetos concretos o abstractos o la capacidad de proceduralizar las relaciones entre símbolos y la capacidad de los alumnos en manipular los símbolos y observar las consecuencias permite a los alumnos ser conscientes de lo que se adecua y lo que es inadecuado de su modelo mental. En suma los estudios se decantan por afirmar la existencia de una relación positiva entre las capacidades de procesamiento de los ordenadores y su influencia en las representaciones mentales y los procesos cognitivos de los alumnos. Los estudiantes trabajando con ordenador pueden manipular micromundos para solucionar sus diferencias entre sus modelos mentales incompletos o imprecisos y los principios formales representados en el sistema. Según Kozman (1991) los trabajos de White (En prensa) muestran que los alumnos novicios dentro de estos sistemas se benefician de experiencias estructuradas de complejidad progresiva. Otros sugieren que estos simbólicos medio ambientes operacionales serán particularmente potentes si se conectan con fenómenos reales, de modo que ayuden a los alumnos a conectar sus modelos más elaborados a las experiencias del mundo real que ellos pueden explicar.

En el proceso de evolución de la era de la información las investigaciones sobre aprendizaje en entornos o medio ambientes con multimedia se incrementan, aunque debido al rápido desarrollo y a la alta diversidad de los productos queda mucho por hacer en el análisis didáctico de este ámbito. El termino multimedia no es reciente, hasta no hace mucho se ha aplicado al uso de diversos instrumentos en forma más o menos coordinada. Empero los avances en la tecnología han determinado la aparición de instrumentos que permiten facilitar Información que antes era suministrada por distintos aparatos. El ordenador juega un papel central en este medio ambiente, ya que coordina el uso De varios sistemas de símbolos: texto, gráficos, vídeo y sonidos, permitiendo el procesamiento de información por parte del alumno para hacer selecciones y tomar decisiones.

En este momento la tecnología multimedia está en un punto de alto desarrollo, especialmente después que Microsoft e IBM le han dado un gran soporte. Los vendedores argumentan que esta tecnología Ayudaría en la situación de sobrecarga de información. Hoy, disponemos de mucha más información que del tiempo suficiente para analizarla antes de tomar decisiones, por ello conviene empaquetar los datos forma en que sean accesibles rápidamente (Becker, 1991). La mayoría de profesionales de ventas en este campo suponen que la instrucción será una de las aplicaciones fundamentales de esta tecnología multimedia. Microsoft está desarrollando lecciones en esta tecnología para el aprendizaje de sus propios programas. Como un paso en esta dirección, Microsoft ofrece Productivity Pack que enseña acerca del funcionamiento de Windows. Uno de los usos más llamativos de la tecnología multimedia radica en las impresionantes presentaciones que incluyen video, música, animación y sonido. Estas presentaciones pueden ser ofrecidas en el aula a los alumnos en un gran monitor. A la vez el profesorado dispone de programas para crear sus propias presentaciones, por ejemplo, Ask-Me 2000 es un "authoring system", que permite crear una presentación multimedia. Las plataformas de hardware que se recomiendan para los sistemas multimedia giran alrededor de una configuración con un microprocesador Pentium a 90 MHz, 8-16 MB de RAM, un disco duro con al menos 500 MB, tarjeta gráfica super VGA, un CD ROM y un sistema audio mejorado.

2. Almacenamiento y recuperación de información de información en redes de conocimieno mediante el ordenador

El conocimiento humano se duplica, aproximadamente, cada ocho años, un ritmo de crecimiento que es a la vez un privilegio o bendición y una carga. En este proceso de expansión de la información el hallar datos concretos se convierte en una tarea laboriosa. Los ordenadores pueden facilitar la búsqueda de las informaciones. La información ubicada en libros y bibliotecas se encuentra almacenada en forma lineal, mientras que el cerebro humano no trabaja de esta manera, sino por asociación. De un ítem salta a otro por asociación de pensamientos, de acuerdo con las vías de una red o tejido de neuronas.

Los sistemas hipermedia trabajan a través de un almacen de información en bloques o nodos, que contienen texto, gráficos, sonido y video. Una red de uniones conecta los nodos, pudiéndose acceder a cada nodo a través de una serie de ventanas en la pantalla del ordenador. Esta asociación permite al usuario acceder a ideas en una forma lineal o no-lineal, saltando entre los nodos de forma similar a como sucede con las asociaciones en el cerebro. Las potenciales aplicaciones de estos medios son infinitas, como las del mismo pensamiento humano.

Los bloques de construcción o sillares de los hipermedia son los nodos. Cada nodo es un bloque de información que representa un concepto o tópico. Virtualmente los bloques pueden contener información de cualquier tema y de cualquier medio. Un nodo puede comprender desde una única palabra o gráfico a una enciclopedia. El tamaño ideal del nodo depende de la información que contiene. Un soneto o un cuadro pueden ocupar un solo nodo, mientras que una novela o un manual de mantenimiento de un avión pueden distribuirse en varios, con un capítulo en cada uno. La versatilidad de los nodos conduce a la existencia de distintos tipos de nodos. Unos son de un carácter general y pueden contener información, que va desde un libro completo a un párrafo o un dibujo; otros segregan la información de acuerdo con cierta clasificación; otros contienen sólo gráficos, o únicamente texto (Spiro, 1991) y otros pueden presentar detalles, o comentarios o una idea central. Asimismo, un nodo compuesto puede estar constituido de una serie de nodos individuales siendo la mejor ubicación de informaciones que comparte un mismo tema, por ejemplo una colección de poemas que exploran una única visión temática.

El plan más simple de organizar los nodos es a través de unos nodos iniciales que se subdividen por algún sistema de clasificación en otros nodos, que a la vez son subdivididos formando un sistema jerárquico. Estas uniones entre nodos pueden seguirse en cualquier dirección en búsqueda de informaciones más generales o más precisas. El inconveniente de las clasificaciones jerárquicas radica en la necesidad de sistemas de clasificación rígidos. Por ejemplo la comparación entre las formas de vida terrestres y las marinas no viene facilitada por una clasificación que se inicia con la diferenciación entre plantas y animales. Con la intención de conseguir mayor flexibilidad en la búsqueda de la información se han desarrollado diversos modelos de uniones entre nodos. Todos tienen nodos fuente y destino; en algunos un sólo nodo interconecta a diversos otros nodos. La mayoría de conexiones pueden atravesarse en cualquier dirección. En algunos nodos los destinos son atributos del nodo fuente, en otros consisten en material diverso que se relaciona con la fuente sólo por asociación. Al incrementarse el número de nodos y uniones entre estos en un sistema hipermedia se acrecienta, asimismo, la extensión y la profundidad de las posibles búsquedas. No obstante, un sistema complejo puede asentarse en un tejido de redes, por el que puede ser muy difícil navegar y que da emergencia a un problema de desorientación. El problema de saber dónde uno está en la red y qué direcciones puede seguir hace necesario en muchos de los sistemas de hipermedia la presencia de un mapa. En un sistema básico el mapa recopila el plan general con todos los nodos y sus uniones. No obstante, en la mayoría de los casos se muestran únicamente los nodos y uniones alrededor del nodo que está activo.

3. Las redes y las autopistas de la información, caminos en el nuevo universo de la educación.

Un ordenador y un sistema de telecomunicación es una vía abierta a un universo de información, cuasi-sin-puertas. Las autopistas de la información que unen múltiples *networks* permiten una amplia profusión de intercambios de información: 1. Enviar correo electrónico de una escuela a otra. 2. Hacer uso de sistemas hipertexto que permiten saltar de una palabra de un archivo a otro archivo relacionado con este tópico, el cual puede estar en una localidadod geográficamente muy distanciada. 3. Reunir a varias escuelas o colegas a través del ordenador manteniendo un intercambio de información. 4. Visualizar videos en respuesta a una solicitud concreta. 5. Utilizar agentes inteligentes que buscan en las redes información sobre tópicos especificados. La anterior visión, de carácter impresionista, define con claridad las amplias potencialidades que abren a la educación las redes y las autopistas de la información.

4. Los ordenadores en los departamentos de educación

Los ordenadores pueden usarse en los Departamentos de Educación dirigidos a la formación del profesorado, al menos, en tantas formas como en otra institución educativa, por ejemplo pueden facilitar el acceso a la información, conducir un diálogo tutorial o producir un modelo para la simulación. Expresado en la forma más sencilla, un estudiante para profesor aprende predominantemente en tres direcciones: las asignaturas que debe enseñar, las técnicas para enseñarlas y la manera en que los alumnos aprenden. Además de la posibilidad de trabajar estas tres dimensiones, los ordenadores ofrecen dimensiones nuevas para la formación de profesores, que no pueden ser atendidas por otros medios. En suma, el ordenador no es únicamente un medio nuevo de presentación para una enseñanza convencional.

Un nivel de uso de los ordenadores en las clases de profesores en formación es suministrar a los alumnos herramientas o aplicaciones que faciliten explorar algún dominio o sean un instrumento para llevar a cabo una tarea. Entre estas herramientas de carácter emancipatorio se puede citar, por una parte los procesadores de texto, las bases de datos, los programas estadísticos y programas similares. Por otra parte son numerosos los programas de carácter instructivo que pueden facilitar el aprendizaje de las matemáticas u otra materia como por ejemplo, la educación ambiental o la educación para la salud. Otro nivel de uso es situar a los alumnos como observadores críticos de programas instructivos, "courseware", como material para el estudio del aprendizaje y la enseñanza. Los profesores en formación pueden analizar la efectividad con que los niños usan diversos programas: tutoriales, simulaciones, juegos realísticos, "role playing", construcción de modelos, microcosmos, laboratorio basado en microordenador, etc. A algunos alumnos que se inician en la escritura se les ofrece la oportunidad de usar un procesador de textos como uno de sus primeros instrumentos de escritura. Cochran-Smith,M, Kahn,J. & amp; Paris,C.L. (1991) sugieren que bajo ciertas condiciones los procesadores de texto funcionan como una especialmente oportuna y feliz herramienta para los que aprenden a escribir, aunque también indican que esto no ocurre en todos los casos.

Los programas sobre cómo los alumnos aprenden podrían ubicarse en otro nivel que atendería a simulaciones de cómo se produce el aprendizaje de los estudiantes o sobre la inteligencia artificial y los sistemas expertos. Hay programas que simulan un niño con un error conceptual que determina equivocaciones en la suma o la resta y permiten que el profesor en formación formule una diagnosis y ayude al niño a comprender una idea. El ordenador puede, asimismo, simular una clase. Así hay un programa relativo a una clase en que se define el grado de atención y de indisciplina de los alumnos, el estado del conocimiento de los miembros de la clase y lo apropiado de la relación entre las actividades y los objetivos. Los tests informan acerca de los signos vitales de la clase, si los alumnos leen, escriben, utilizan ayudas visuales,... La clase termina antes si hay demasiada confusión o ruido. Es un modelo de las interacciones del aula. Al igual que en un programa de simulador de vuelo, los alumnos deben practicar procedimientos de emergencia hasta que éstos se conviertan en una segunda naturaleza. Las dificultades son las usuales en las simulaciones, la primera, que es difícil diseñar una simulación precisa porque no se conoce suficientemente sobre la dinámica de las aulas y la segunda es conocer la distancia que va a separar el uso de la simulación y la transferencia de lo aprendido a una clase real. Otro programa describe un modelo práctico de entrenamiento de profesores que suministra práctica y la capacidad de evaluar en una forma aún no vista en la enseñanza basada en el ordenador. El programa propone una multiplicidad de problemas graduados en función de su complejidad. El curso es capaz de conducir a los alumnos desde micromundos sencillos hasta otros que son muy complejos y muy similares al mundo real. El modelo presenta un problema definido dentro de unos límites y después aporta informaciones y potenciales acciones para resolver el problema. Está estructurado en forma que suministra feedback. El modelo es un simulador, que se sitúa entre la enseñanza teórica y la práctica en las aulas.

Un nivel de gran complejidad reuniría los programas diseñados por los propios profesores en formación para alumnos de un determinado curso y materia. Por otra parte, el uso del ordenador para las telecomunicaciones, el correo electrónico, da emergencia a un nivel de gran amplitud y potencialidad en el escenario educativo. La diversidad de opciones es inequívocamente interminable, dada la versatilidad de los ordenadores. Así, en el campo de la tecnología multimedia, se pueden efectuar consultas bibliográficas, leer el Boletín Oficial del Estado o, en el Reino Unido, analizar experiencias del profesorado en distintos proyectos educativos. A este rasgo de ausencia de fin de la diversidad se auna la inmediatez de evolución del hardware y software, lo que origina que los escritos pierdan vigencia con absoluta rapidez. Casi resulta innecesario abundar aquí sobre el papel inequívocamente indispensable que juega el ordenador en los Departamentos de Educación como herramienta para la investigación y para la docencia universitaria -procesadores de texto, bases de datos, paquetes estadísticos, hojas de cálculo, programas generadores de gráficos, edición de diapositivas o transparencias, presentación de diaporamas, etc.

Recientemente se estan desarrollando programas de una segunda generación de diseño instruccional asisitido por ordenador (Merril et al.,1990, 1992). Estos programas prtenden integrar la información del aula y asistir al profesor y al alumno en el proceso de toma de decisiones. Obviamente el objetivo de estos programas es ambicioso y difícil de alcanzar, pero sus aportaciones teóricas son cuando menos para profundizar en la reflexión del proceso de interacción en el aula.

5. Microprocesadores en el aula

Los ordenadores personales cambiaron radicalmente el mundo de los negocios en la década de los ochenta, es probable que en los noventa cambien radicalmente el mundo de la educación. El sistema de educación que ha dominado desde los inicios de la civilización puede evolucionar radicalmente. Las últimas innovaciones tecnológicas, de alguna forma pueden ser comparadas a la adopción de la escritura fenicia por los habitantes de Grecia hace casi tres mil años. La escritura de los comerciantes fenicios se basaba en una relación directa entre los sonidos de la lengua hablada y los símbolos utilizados para representarlos. Los conceptos atenienses de ciudadano libre y democracia hubieran sido más difíciles sin un sistema que facilitara el acceso a la información. En los últimos cuarenta años la tecnología de la información electrónica digital controlada por los especialistas en sus centros de cálculo, con laboratorios con aire acondicionado, dominaba el manejo de la información. La revolución de los microprocesadores ha cambiado la situación pues los sistemas basados en éstos pone la información en manos de todo el mundo. La primera fase del microprocesador es el ordenador personal. Es la explosión de los ordenadores de los ochentas. La segunda fase es la substitución de los grandes equipos y los miniordenadores por sistemas basados en microprocesadores. La última fase de la revolución de los microprocesadores aún no ha comenzado. Puede empezar al final de la década cuando el poder de la tecnología en computadoras se dirija a ayudar a la gente de todas las edades a aprender todo tipo de cosas.

En la actualidad ya hay suficientes elementos demostrativos que evidencian la proximidad de la revolución informática. Software educativo de todo tipo desde los menos elaborados hasta la enseñanza ayudada por ordenador. Algunos de los primeros programas son juegos que, no obstante, poseen más valor educativo que otros programas con intencionalidad instructiva. Juegos de simulación como Flight Simulator de Microsoft, o SimCity y SimEarth, de Maxis son excelentes ejemplos de cómo uno aprende jugando. SimEarth es un modelo de evolución de la vida en distintos planetas con diferentes condiciones ambientales; el usuario debe ir modificando las condiciones geológicas y físicas para mantener la vida sin gastar la energía que le permite utilizar el programa y adicionalmente puede crear vida. En críticas aparecidas en la prensa inglesa se ha definido a este tipo de programas como el jugar a ser Dios. Otros precursores son PB Study Bible que incluye numerosas traducciones y diccionarios en hebreo y griego, y PC Globe, que es un atlas computarizado. El número de software dirigido a traducciones es ya muy alto como el Spanish Assistant, que además ayudan en el aprendizaje de las lenguas. La revisión del software de escenario (Keegan, 1991) como medio de aproximación entre la retórica del investigador y la práctica en el aula se puede ver en un artículo publicado por los autores (Martínez Ruiz y Sauleda, 1994).

Las condiciones para facilitar el uso educativo de todo el potencial de la actual tecnología son la maduración del hardware para hacer los multimedia ampliamente accesibles, la dedicación de recursos suficientes para crear auténtico software educativo y el desarrollo de un mercado amplio para el uso de software vía compras individuales. Las tres condiciones pueden darse a fines de la década. La primera condición se da; por simple mejora tecnológica y un mercado competitivo. La segunda será una consecuencia de la tercera por el atractivo de la recompensa financiera. La clave, pues, está en la tercera condición y algunos piensan que la clave puede ser a través de ver el camino de la educación como una vía de entretenimiento y disfrute. Aprender es una de las cosas más gratificadoras y divertidas que una persona puede hacer. Para desarrollar este tipo de software será preciso contar con las mentes más capaces del mundo educativo y también las más creativas del mundo del entretenimiento. Este es, probablemente, uno de los retos más apasionantes de la actual década.

6. Visión crítica de la relación informática- aula escolar

Los educadores en Estados Unidos se encuentran fascinados por la idea de que la introducción de una nueva tecnología será una respuesta definitiva a los problemas del aprendizaje y la enseñanza. En parte, una faceta de la cultura es la fascinación por las máquinas y por la promesa que ofrecen de un progreso creador y de nuevas fronteras. Cada escuela desea tener lo último y lo mejor en tecnología educacional y la carrera para comprar ordenadores para no quedarse atrás incide fuertemente en los presupuestos de los centros. Quizás en España esta situación no se sienta en una forma tan generalizada, pero si es vivida por una gran parte del profesorado más preocupado. En los entornos en que el uso del ordenador se ha generalizado, es posible que haya llegado el momento de contemplar en forma más holística lo que los ordenadores pueden y no pueden hacer. La desilusión ha arraigado en clases en las que disponen, desde hace más de diez años, de ordenador y que perciben como la revolución electrónica en educación no se ha materializado. Algunos educadores no ven al microordenador como la solución a sus problemas, en parte por el reconocimiento de que con sólo la introducción de una nueva tecnología no se puede cambiar el proceder.

Unicamente cuando se enfoca con un perspectiva contextualizada se puede comprender en qué medida y vías los microordenadores cambiarán las vidas de los profesores y alumnos en su ambiente social. Una perspectiva contextualizada significa formular preguntas substantivas del tipo de quién se beneficia del uso de los ordenadores, si los beneficios serán distribuidos en forma ecuánime, qué cambios curriculares y en el profesorado son necesarios, cómo deben variar las relaciones entre el profesor y el alumno, qué aspectos del aprendizaje de los alumnos deseamos que los ordenadores cambien. Por ejemplo si pretendemos que los alumnos dejen de ser "iletrados" en el uso de los ordenadores entonces necesitamos conocer el significado que queremos dar al término cultos o letrados en el manejo de los ordenadores. El sentido de competentes en el uso del ordenador debe ser reconsiderado en el ámbito de una sociedad en la que el control y el acceso al flujo de la información deviene cada día más significativo como una vía de acceder al poder y a un estatus. La tecnología no es nunca neutral en sus efectos. Para bien o para mal la revolución electrónica reconfigurará las clases del siglo XXI y la cuestión es si esta reestructuración será gestionada en el sentido de que todos los alumnos se beneficien.

Seymour Papert (1987), el creador del lenguaje Logo, señalaba que los investigadores que estudiaron los efectos del lenguaje Logo en resultados tales como los procesos cognitivos eran víctimas de lo que llamó "Technocentric thinking ", que consistía en convertir las propiedades técnicas de la máquina en el rasgo central de la investigación. Papert rechazó el uso de planteamiento de problemas del tipo de cuál es el efecto del ordenador en el desarrollo cognitivo o si el Logo funcionaba y sugirió que dichas preguntas manifestaban una carencia de comprensión de que el contexto para el desarrollo humano es una cultura, nunca una tecnología aislada. En esta línea señaló, refiriéndose a Logo, que un elemento cultural puede ser poderoso si es integrado en una cultura, empero es un simple conocimiento técnico cuando no se integra. La integración, que propone Papert, de Logo y Lego permite la construcción en el aula de robots, siendo una propuesta que indica una de las propensiones que se está desarrollando con las nuevas tecnologías. Emihovich (1991) afirma que la competencia en el uso del ordenador, "computer literacy", es una de las múltiples competencias que los niños deben adquirir en una sociedad tecnológica y es, por tanto, un capital y los que no la adquieran van a quedarse atrás y por tanto habrá que atender, en forma especial, a los alumnos provenientes de las minorías sociales. Nuestro punto de vista no es que los alumnos adquieran el dominio para saber programar en un sentido técnico, sino que ellos vean a los ordenadores como parte de sus vidas y que perciban cómo sus experiencias puedan ser entretejidas en el mundo de las experiencias del ordenador en clase. Los ordenadores quedan dentro de un amplio contexto social y no se focaliza sólo en el mundo técnico de la máquina.

Las acepciones referentes al significado de lo que es "computer literacy " son diversas y dispares, pero, en general, se centran en considerar la efectividad de la máquina fundamentalmente como una herramienta para uso personal o para llevar a t,rmino instrucciones en forma más eficiente en un contexto social. Las afirmaciones de que el conocimiento del lenguaje Logo, por ejemplo, incrementan el conocimiento del niño sobre su pensamiento y le da control sobre él mismo y, por tanto, incide positivamente en los rendimientos en matemáticas y otras materias no parece hoy un hecho demostrado y los estudios en dicha dirección evidencian las dificultades de la evaluación. Como establecemos en otro apartado se necesitan nuevos modelos para enseñar, aprender e investigar los efectos de la tecnología en la clase. Las investigaciones son complejas por aquello de que todas las acciones humanas ocurren en un contexto cultural, tratamos con múltiples factores que están altamente interrelacionados. Las investigaciones es de desear que tiendan un puente sobre la orilla del investigador y la orilla del profesor que a menudo se pregunta cómo utilizar las investigaciones del primero. Aquí se propone que el dominio básico del ordenador debe ser, como otras competencias, un recurso y un capital que el alumno debe disponer para disfrutar de las oportunidades del futuro.

En general, se asume que la introducción en una clase de un microordenador con un específico paquete de software tiene un impacto determinado y generalizable en las aulas sobre los profesores, y los alumnos. Es decir, se tiende a considerar al ordenador como una variable independiente, como un agente de cambio controlable y cuantificable. La anterior asunción no resulta exacta. En vez de que la nueva tecnología reconfigure el medio ambiente de aprendizaje es el ordenador el que debe ser situado en el modelo de organización social establecido en el aula. Es una evidencia que dos ordenadores iguales con idéntico software para procesar textos introducidos en dos aulas distintas pueden ser usados en forma diferente. De ahí el entender al ordenador como una variable dependiente (Michaels, 1991) afectada por el contexto del aula. En realidad el uso de esta terminología no es adecuado, ya que hay una influencia mutua, el ordenador influye y es influido por el contexto del aula. El ordenador sí tiene un claro impacto en el aula, así la presencia de un ordenador y un programa de procesador de textos influye en el escribir de los alumnos, actuando la máquina como una variable dependiente e independiente a la vez. Por tanto, es difícil decidir sobre el impacto del ordenador en el aula sin considerar el impacto de la clase y del profesor sobre el ordenador. La diferencia de estilos pedagógicos en dos aulas determinó; que en el caso de una clase en que el control y la gestión emergía del resultado de las relaciones profesor-alumnos y la profesora toleraba una gran parte de informal interacción personal y el que los alumnos establecieran su propio ritmo de trabajo, a la vez que estimulaba la responsabilidad en el uso de las herramientas del aula, el grupo usaba el correo electrónico y confiaba en la capacidad experta de los alumnos. En otra clase orientada en el sentido en que el profesor dirigía el ritmo de trabajo y las condiciones con poco tiempo libre y de socialización, el ordenador era integrado bajo el control del profesor.

A la hora de caracterizar diferencias entre los profesores es problemático aseverar, sin conocer todas las circunstancias, que el profesor actúa correctamente y que otro no lo hace. En suma, la tecnología de la información y de las comunicaciones ha abierto puertas y avenidas en un nuevo universo y queda a los profesores la resolución del problema de cómo enseñar a los alumnos a elegir los caminos que conduzcan a los encuentros educativos más fértiles y humanísticamente más formadores.

Bibliografía

[1] Anderson, J. "Information technology: a cross-curricular competence for all pupils". *Computers & Education* 17: 23-29, 1991.

[2] Becker, H.J. "Encyclopedias on CD-ROM". *Educational Technology* 2:7-8, 1991.

[3] Cochran S., M.; Kahn, J.; Paris, C.L. "Writing with a felicitous tool". *Theory into Practice*. 29 (4) : 235-244, 1991.

[4] Emihovich, C. "Technocentrism Revisited: Computer literacy as cultural capital". *Theory into Practice*. 29(4): 227-234, 1991.

[5] Keegan, M. "Design and effects of scenario educational software". *Educational Technology* (6) 19-25, 1993.

[6] Martínez R., M.A.; Sauleda, N. "La disparidad entre la retórica del investigador y la práctica en el aula: el software de escenario como medio de aproximación". *Tossal. Revista Interdepartamental de Investigación Educativa* (1): 55-65, 1994.

[7] Merril, M.D.; Li, Z. ; Jones, M.K. "Second generation instructional design (ID2)". *Educational Technology*, 2 : 7-14, 1990.

[8] Merril, M.D.; Li, Z.; Jones, M.K. "Instructional transactional shells: responsabilities, methods and paramethers. *Educational Technology* 2: 5-26, 1990.

[9] Michaels, S. "The computer as a dependent variable". *Theory into Practice* (4): 246-254, 1991.

[10] Spiro, M. "Cognitive flexibility, constructivism, and hypertext". *Educational Technology* 5, 24-33, 1991.

[11] Sauleda, N. "Propensiones en la enseñanza de las ciencias: El escenario del próximo milenio". *Tosal. Revista Interdepartamental de Investigación Educativa* 1: 11-23, 1992.

[12] Woerner, J.; Rivers, R.H.; Vockell, E.L. *The computers inthe science curriculum*. McGraw-Hill , 1991.

La formación postgraduada en las técnicas informáticas para la enseñanza de la matemática en las carreras de ingeniería

Dr. Eugenio Carlos Rodríguez[1]

Resumen

La Enseñanza de la Matemática para los estudiantes de ingeniería en los tiempos actuales está enfrentando muchos retos, el mayor de ellos es el uso de técnicas de computación que está revolucionando las formas tradicionales de enseñar la Matemática.

El profesor de matemática tiene que prepararse para enfrentar este reto.

En este trabajo se plantean problemas tales como:

1. *¿Qué debe conocer el profesor de Matemática sobre estas técnicas para aplicarlas en la enseñanza de la Matemática?.*
2. *¿Cómo implementarlas en forma integrada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática?.*
3. *¿Qué vías tiene para aprender y dominar estas técnicas?*

La Enseñanza de la Matemática para los estudiantes de ingeniería en los tiempos actuales está enfrentando muchos retos, el mayor de ellos es el uso de técnicas de computación que está revolucionando las formas tradicionales de enseñar la Matemática.

La Matemática que se enseñe al ingeniero del Siglo XXI requiere de un profesor capaz de enfrentar los retos de esta época, para ello el mismo debe superarse sistemáticamente, no solamente para actualizarse en todas las técnicas que requiere su profesión sino, sobre todo, para lograr que sus alumnos no sólo aprendan nuevos conocimientos sino que "aprendan a aprender".

¿Cómo lograr que el profesor de Matemática alcance ese estadio? El ingeniero del Siglo XXI ya está en nuestras aulas y los profesores de Matemática seguimos siendo los mismos del siglo XX.

¿Cómo organizar la superación de los profesores de Matemática? ¿En qué se tienen que superar para lograr este objetivo?

Pensemos que primero debemos estar seguros de que estamos trabajando por lograr que la Matemática alcance los objetivos que se propone en las carreras de ingeniería:

- La Matemática como herramienta de cálculo.
- Como herramienta para modelar y resolver problemas de ingeniería.
- Como lenguaje universal capaz de contribuir al conocimiento y desarrollo de otras disciplinas propias del perfil profesional.
- Como herramienta para lograr el desarrollo del pensamiento lógico, la capacidad de razonar, de enfrentarse a situaciones nuevas.

---

[1] Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría". La Habana, Cuba.

Si no lo hemos logrado hasta ahora, o lo hemos logrado a medias, ahora es más necesario aún.

A nuestro juicio la superación del profesor de Matemática debe estar dirigida en cuatro vertientes:

- La superación en la Matemática, incluyendo sus nuevas teorías.
- En las técnicas y teorías que contribuyan a mejorar el aprendizaje de la Matemática.
- En el conocimiento del perfil del estudiante.
- En la Informática.

Superación en Matemática.

En aquellos lugares donde una parte de los profesores de Matemática para ingeniería son ingenieros, una parte de la superación de éstos debe estar dirigida hacia un conocimiento más profundo de la Matemática.

Evidentemente en cualquier caso la superación en la propia Matemática debe ser sistemática, más aún si se tiene en cuenta el desarrollo de nuevas teorías que están teniendo un impacto en la actualidad, tales como la lógica difusa, los fractales y otras.

La aplicación de las nuevas tecnologías en muchas ramas de la ingeniería está obligando a muchos profesionales a enfrentarse a un nivel de Matemática, fundamentalmente en cursos de postgrado, por encima del que adquirieron durante la carrera. Esta realidad está obligando a redefinir la Matemática que necesita cada carrera de ingeniería, hasta dónde llega el pregrado y dónde comienza el postgrado, constituyendo un reto para los profesores de Matemática.

La superación en teorías psicopedagógicas.

Un grupo numeroso de profesores de Matemática dedican gran parte de su tiempo a estudiar, aplicar y a investigar en distintas teorías y tendencias psicopedagógicas, ese grupo es cada vez mayor.

¿Qué sucede con el resto? No quiere decir que los que no estudian estas teorías sean todos malos profesores, hay excelentes profesores de matemática entre ellos, que por su experiencia y su maestría pedagógica ocupan un lugar entre los mejores. Quizás pudieran ser mejores aún si fundamentaran teóricamente lo que hacen.

Muchos de los problemas que se confrontan en la actualidad pudieran resolverse si todos los profesores conocieran que el alumno debe ser el centro del proceso de enseñanza – aprendizaje, si conocieran métodos de enseñanza activa, si enseñaran a sus alumnos a resolver problemas, sólo por poner algunos ejemplos.

Entonces, estos elementos deben formar parte de la superación del profesor de Matemática, lo que no quiere decir que todos se dediquen a investigar en esta dirección.

El perfil del estudiante.

Sin lugar a dudas conocer el perfil del estudiante es una gran ventaja para el profesor a la hora de desarrollar ejemplos, de motivar a los alumnos, de mostrar el papel de la Matemática en la carrera.

Conocer el perfil del estudiante forma parte de la articulación lógica entre la Matemática y las demás disciplinas de la carrera, el profesor debe conocer qué otras disciplinas utilizan la Matemática, qué herramientas utilizan, las notaciones, los métodos, lo que ayudará a motivar a los alumnos en la Matemática y en su carrera.

La Informática.

El vertiginoso desarrollo de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones ha tenido un gran impacto en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las disciplinas propias del perfil profesional y de las ciencias básicas en las carreras de ingeniería, incluyendo la Matemática.

Ya existe en el mercado un gran número de paquetes profesionales capaces de resolver cualquier tarea que hasta hace poco requería de cálculos muy engorrosos (DERIVE, MATLAB, MATHEMATICA, etc.); además de los cientos de software diseñados especialmente para la enseñanza de la Matemática en los más disímiles temas, tales como tutoriales, entrenadores, evaluadores, libros electrónicos, etc.

A pesar de lo expuesto con anterioridad, las aplicaciones actuales no siempre consideran los avances pedagógicos, ni los cambios psicológicos que influyen en la educación. Simplemente perpetúan con tecnología avanzada estructuras anteriores, incapaces de asumir nuevas demandas y técnicas docentes. Por tanto, es necesario una nueva versión de la interacción entre el alumno y la computadora de un nuevo paradigma para soportar nuevas técnicas. En relación con lo planteado "no tiene sentido que un programa de formación se limite a pasar el texto por la pantalla, porque así no saca partido a las mejores cualidades del ordenador; es absurdo utilizar un aparato caro para hacer lo que esté al alcance de la sencilla técnica del libro".

De todo lo anterior, se deduce la necesidad de perfeccionar los métodos de enseñanza – aprendizaje de manera que el proceso de instrucción trasmita lo mismo en menos tiempo, sin sacrificar la amplitud, la profundidad y la calidad de la enseñanza. Se requiere una actualización y adecuación de los conocimientos de los individuos de acuerdo con sus necesidades (reentrenamiento de la fuerza de trabajo) en aras de mantener su potencial profesional y aumentarlo, dando respuesta a los requerimientos de la sociedad ante los procesos de reestructuración, reconversión o desarrollo.

¿Qué debe conocer el profesor de Matemática sobre las técnicas de la Informática para aplicarlas en la enseñanza de la Matemática?.

Se han generalizado dos tendencias entre los docentes de Matemática que usan la Informática en sus clases:

1. El uso de Asistentes Matemáticos (DERIVE, MATLAB, etc.) o de otros paquetes profesionales que están en el mercado (tutoriales, entrenadores, etc.)

2. La elaboración de softwares especialmente diseñados por el profesor o por el colectivo de profesores.

En la actualidad, existe y se consolida un modelo de enseñanza en el cual, el papel de la Informática ocupa un lugar bien definido. Este modelo responde al entorno tecnológico en que se desarrolla la sociedad y se encuentra en constante evolución. En el marco de este modelo la computadora se utiliza principalmente en tres vertientes:

Como medio de enseñanza.

- Para motivar al alumno.
- Mostrar interpretaciones geométricas.
- Hacer demostraciones.
- Hacer ejemplos cercanos a la realidad (uso de paquetes Profesionales: DERIVE, MAATLAB, etc. o SW especialmente desarrollados).

En el trabajo independiente del alumno.

- Tutoriales
- Entrenadores ¿Conductismo?
- Evaluadores

Como herramienta de cálculo: Se elimina el desarrollo de habilidades de cálculos engorrosos dejando esto a la computadora.

Emplear este tiempo en otras habilidades como: modelación, resolución de problemas, desarrollo del pensamiento lógico, enfrentarse a situaciones nuevas.

Evidentemente la aplicación de este modelo requiere que el profesor tenga un conocimiento mínimo del uso de la Informática, el profesor debe dominar el uso de al menos un Asistente Matemático, aquel que decida usar en sus clases, así como dominar también el uso de aquellos tutoriales o entrenadores que incorpore a su asignatura. Esto no quiere decir que el profesor que desee profundizar en la Informática no lo haga y aquel que se interese en aprender cómo hacer software educativo tiene también ese campo por delante.

¿Cómo implementar las técnicas de la Informática en forma integrada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática?.

La introducción de la Informática en el a enseñanza de la Matemática requiere de una transformación, esta transformación requerirá del rediseño de las asignaturas, incluyendo sistemas de objetivos, conocimientos, habilidades y de evaluación, así como la revisión de los textos.

Se trata de la aplicación consciente de estas técnicas, en un contexto pedagógico, en el cual se integran adecuadamente la Matemática, la Informática y la Pedagogía.

¿Qué vías tiene el profesor de Matemática para apender y dominar las técnicas de la Informática que requiere esta transformación?.

Está claro que la autosuperación es una vía importante para la preparación del profesor.

Sin embargo, la educación postgraduada dirigida en este sentido debe jugar un papel determinante en la transformación que se quiere lograr.

En este contexto los cursos de Diplomados y Maestrías posibilitan alcanzar distintos estadios en la especialización.

El diplomado posibilita la formación especializada de los graduados universitarios, al proporcionar la adquisición de conocimientos y el desarrollo de habilidades en aspectos de un área particular de la ciencia o del arte.

El diplomado está constituido por un grupo de cursos articulados entre sí, que deben incluir, además, la realización de un trabajo teórico y (o) práctico adicional, no comprendido en los cursos que lo integran. Su duración mínima será de 200 horas.

La Maestría es el proceso de formación posgraduada que proporciona a los graduados universitarios dominio profundo de los métodos de investigación, amplia cultura científica y conocimientos avanzados en un campo del saber, desarrollando habilidades para el trabajo docente de investigación y desarrollo.

Una combinación adecuada de asignaturas puede dar los dos niveles de especialización, las asignaturas de un Diplomado pueden constituir el bloqueo básico de una Maestría. Una vez obtenido el Diploma se puede optar o no por continuar la Maestría.

Por Ejemplo:

Diplomado en la Enseñanza de la Matemática.

Didáctica de la Matemática.

Tendencias pedagógicas contemporáneas.

Evaluación del aprendizaje.

Resolución de problemas.

Metodología de la investigación educativa.

Informática para el trabajo científico.

Informática Educativa.

Asistentes Matemáticos I

Asistentes Matemáticos II

Seminario de Proyectos.

Métodos estadísticos.

Trabajo de Diploma.

Maestría en la Enseñanza de la Matemática

Bloque básico.

El bloque básico está constituido por las asignaturas del Diplomado, una vez aprobado el mismo se puede continuar con las asignaturas optativas para obtener el título de la Maestría.

Bloque de asignaturas optativas:

Formación de habilidades matemáticas.

Estructuración del conocimiento.

Métodos activos y medios de enseñanza.

Diseño Curricular.

Psicología de la enseñanza de la Matemática.

Ingeniería del Software.

Elementos de Inteligencia Artificial.

Herramientas para elaborar software educativo.

Fundamentos de la Instrucción Asistida por Computadoras.

Sistemas inteligentes para la Instrucción Asistida por Computadoras.

Seminario de Proyectos.

Tesis de Maestría.

Conclusiones.

Cualquiera que sea la opción de superación, el reto de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la Matemática requiere la atención del profesor.

La opción de cursos de Diplomados y Maestrías da una formación integral, que permite al profesor estar preparado para la transformación que reclama el uso de la Informática en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Bibliografía.

[1] Durán B., Mayra. "Propuesta de un entorno educativo utilizando la tecnología informática". *Tercer Taller Internacional sobre La Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura*. La Habana, Cuba, 1998.

[2] Fernández C., Martha. *Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema límite de funciones con el uso de un Asistente Matemático*. Tesis de Maestría. La Habana, Cuba, 1998.

[3] *Memorias del Tercer Congreso Iberoamericano de Informática Educativa*. Colombia, 1996.

[4] O'Farrill D., Yolanda; Carlos R., Eugenio y otros. "La Enseñanza de la Matemática en la era de la multimedia, virtualidad e Internet". Mesa Redonda en el *Tercer Taller Internacional sobre La Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura*. La Habana, Cuba, 1998.
[5] Pinto C., Ma. Caridad. "Aprendizaje automatizado en la enseñanza de la Matemática Superior". *Tercer Taller Internacional sobre La Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura*. La Habana, Cuba, 1998.
[6] *Proceedings of Third International Conference on Computer Aided Learning and Instruction in Science an Engineering*. Spain, 1996.
[7] Rodriguez, Carlos E. *Enseñanza de la Matemática en Ingeniería y Arquitectura*. Curso dictado en la Escuela de Invierno en Didáctica de las Matemáticas. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Monterrey, México, 1998.
[8] Rodriguez, C. Eugenio. "La Superación del profesor de Matemática en la Universidad de hoy. Una experiencia cubana". Conferencia dictada en la *XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME –13)*. Sto. Domingo, República Dominicana, 1999.
[9] Rodriguez, C. Eugenio. " Perfeccionamiento de la disciplina Matemática en una carrera de Ciencias Técnicas para el uso de la Informática en el proceso de enseñanza-aprendizaje". Proyecto de Investigación en el Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría", La Habana, Cuba.
[10] S, Allesi; S, Trollip,. *Computer Based Instruction*. USA, 1985.
[11] Valido G., Iván. *Propuesta de un sistema didáctico para la enseñanza de las integrales con el empleo de un Asistente Matemático*. Tesis de Maestría, La Habana, Cuba 1997.

Curso de ecuaciones diferenciales asistido por computadoras en la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC)

José Cuevas G.[1]**;**
Manuel Alvarez B.; Iván Valido G.[2]

Resumen

La enseñanza de las Matemáticas en las carreras de Ingeniería contribuye a la formación científica del futuro egresado y lo capacita para dar continuidad a su superación profesional. Las transformaciones en la esfera científico-técnica que la humanidad ha experimentado en las últimas décadas constituyen un reto para la pedagogía de las Matemáticas en el nivel universitario. Se imponen transformaciones en los métodos y medios de enseñanza que tradicionalmente se han venido empleando.

La evolución tecnológica ofrece nuevas herramientas cuyo uso exige una reflexión acerca de su valor e integración al entorno pedagógico. La computadora se ha insertado al proceso de enseñanza-aprendizaje para enriquecerlo. Su adecuado uso incrementará la eficiencia y calidad del mismo.

En el marco de esta nueva filosofía, en lo que al uso de la computadora en la docencia se refiere, y teniendo en cuenta las optimas condiciones de trabajo que proporciona la UPC a sus profesores y estudiantes, se ha elaborado un diseño para el Curso de Ecuaciones Diferenciales que se dicta en el segundo ciclo de 1999, dirigido a los estudiantes de las carreras de Civil, Electrónica e Industrial.

Temas del curso

Tema I	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	(28 horas)
Tema II	Transformada de Laplace y sus Aplicaciones	(16 horas)
Tema III	Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales	(12 horas)

En el diseño se adopta como forma de enseñanza: la clase teórica, la clase activa y el seminario.

- **La clase teórica:** Contiene los elementos teóricos indispensables para el trabajo individual del estudiante. Se elabora, por parte del docente, contemplando el uso de los más avanzados medios audiovisuales disponibles en las aulas, entre ellos las computadoras. Están dirigidas, además, a propiciar el empleo de técnicas de computación.

- **La clase activa**: Se desarrolla en un aula especializada que dispone de computadoras personales (Pentium 2) conectadas en red y con acceso a Internet, en las cuales trabajan dos alumnos por máquina. Esta sala dispone, además, de una computadora para el docente y pizarra. En el desarrollo de la clase deben estar presentes los siguientes factores:

✓ **Desarrollo de habilidades.** El estudiante trabaja con el contenido recibido previamente en clase (conferencia o CP) y desarrolla un conjunto de habilidades tales como: interpretar, calcular, identificar, graficar y algoritmizar.

[1] Dpto. de Ciencias, Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Lima, Perú. e-mail: jcuevas@upc.edu.pe

[2] Dpto. Matemática General, ISPJAE, C. Habana, Cuba.
e-mail: malvarez@ind.ispjae.edu.cu, ivalido@upc.edu.pe

- ✓ **Introducción de nuevos contenidos**. Se descubren conceptos a través de situaciones problémicas.
- ✓ **Sistematización**. El estudiante integra los contenidos y con ella se posibilita encontrar nuevos matices.

Los enunciados de los ejercicios para *la clase activa* se les proporcionan a los estudiantes con suficiente antelación a través de su correo electrónico.

• **Los seminarios:** Para esta actividad, teniendo en cuenta la diversidad de carreras por sección, se seleccionan ejercicios y problemas relacionados con la especialidad del estudiante que resuelven y exponen por equipos. Están planificados al menos uno por cada Tema.

En la evaluación del curso estarán presentes las siguientes actividades:

- ✓ Cuatro prácticas calificadas
- ✓ Una prueba parcial
- ✓ Una prueba final

Como aspecto novedoso, el estudiante las realizará haciendo uso de las herramientas informáticas que sean necesarias, lo cual naturalmente impone al docente diseñar nuevos tipos de preguntas que se alejan de lo que tradicionalmente se ha hecho.

A pesar de la diversidad de ***asistentes matemáticos*** que existen actualmente en el mercado diseñados para trabajo docente, se ha seleccionado DERIVE por destacarse en los siguientes requerimientos: Cálculo simbólico, capacidad gráfica, potencial numérico, expresividad, nivel informático y facilidad de explotación. En el tema III se empleará además el MN99, software elaborado en el ISPJAE por el Dr. Manuel Alvarez. Este paquete de programas, destinados a los temas relacionados con la matemática numérica, proporciona al usuario las herramientas necesarias para trabajar en el tema III.

Aunque el sistema de habilidades correspondiente al antiguo diseño del curso no sufre relevantes modificaciones, se incorporan a este sistema, habilidades relacionadas con la realización y cálculo de determinadas operaciones mediante el empleo de DERIVE, empleo de los File de Utilidades especializados en los diferentes temas, así como aquellas relacionadas con gráficas de funciones, e importación desde el ambiente DERIVE a otras aplicaciones Windows

Bibliografía

[1] Solanilla, J. *Aprendizaje de conceptos y principios matemáticos a través del ambiente de computaciones*. Universidad de Panamá, 1996.

[2] Valido, I. *Propuesta de un sistema didáctico para la enseñanza de las integrales con el empleo de un asistente matemático*. ISPJAE, Ciudad Habana, 1997.

[3] Kutzler, B. *Introduction to derive for windows*, Austria, 1997

[4] Zill, D, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. Tercera edición. Grupo Editorial Iberoamérica, 1997

Uso de Derive como apoyo a la enseñanza del cálculo diferencial

Marta Fernández Casuso[1]

El conocimiento de las diferentes técnicas computacionales ocupa un lugar principal en la formación del ingeniero. En particular, la vinculación de la Matemática con la computación y la relación de este vínculo con las disciplinas afines al perfil profesional, hacen pensar que la tecnología de las computadoras se hace compatible con los fenómenos cognoscitivos y las situaciones didácticas asociadas al aprendizaje de la misma.

En el programa de la asignatura Matemática I un concepto cardinal es el límite de una función en un punto. La continuidad, la derivada y la integral son conceptos que recurren al de límite de manera que cabe esperar que un aprendizaje deficiente de este concepto, ocasione un aprendizaje deficiente en el resto de los temas (Arcos I, 1994), sin embargo diversos trabajos de investigación, lo mismo que la experiencia en el aula, muestran que con las formas de enseñanza tradicional al presentar la definición, el estudiante tiene dificultad para interiorizar el concepto, dado el proceso de abstracción que se necesita para adquirir cierta familiaridad con el mismo. "Una imagen vale más que mil palabras es verdad, pero a condición de que la imagen llegue a ser entendida adecuadamente, pues de otra forma no valdrá nada" (Guzmán, M, 1996). Esto hace necesario por un lado que se replantee el papel del concepto de límite en el tema y por otro lado explotar alternativas didácticas para su enseñanza.

Conocemos de experiencias en dos universidades españolas que se llevan a cabo con la utilización del asistente Matemático Derive desde 1990. En particular en la Universidad Politécnica de Valencia se introduce el asistente en todo el proceso de enseñanza - aprendizaje desde la explicación de la clase hasta la realización de exámenes y ha logrado resultados satisfactorios, aunque en la medida que ha pasado los cursos se ha disminuido la motivación de los estudiantes. En La E. U. Informática de la Universidad Politécnica de Madrid, los alumnos tienen una hora de práctica semanal en cada asignatura, aspectos centrales de esta experiencia son el cuidado en la elaboración de materiales así como en la coordinación con las clases de teoría. Sin embargo se observa que las prácticas han incidido en la disminución de la capacidad de desarrollar un razonamiento matemático para la resolución de problemas (García, 1995).

En la carrera de Telecomunicaciones y Electrónica del ISPJAE se imparten asignaturas como: Procesamiento de señales y Procesamiento digital de imágenes que requieren actualmente del conocimiento profundo de la computación, además puede que en determinado momento el estudiante o ya el ingeniero necesite calcular una transformada o quizás un límite para el trabajo que esté realizando, y si ha tenido instrucción relacionada con los asistentes matemáticos pueda rápidamente resolver su problema. Este es un factor importante que determina la necesidad de que se dedique tiempo, desde el ciclo básico en el nivel terciario, a la introducción de asistentes matemáticos dentro de las asignaturas, así como de técnicas de computación en el curriculum académico de dicha especialidad.

En los últimos años se ha tomado conciencia de la necesidad de vincular la impartición de las asignaturas de Matemáticas para las Ciencias Técnicas en Cuba con el uso de asistentes matemáticos. En la mayoría de las Facultades ya se trabaja en la implementación del Derive pero sólo se limitan a la explotación como herramienta de cálculo o sea para resolver ejercicios sin texto. En particular, la matemática que se imparte en la Facultad de Eléctrica del ISPJAE ha sufrido modificaciones con el uso del asistente matemático Derive, ya que se han ido realizando intentos progresivos con el objetivo de buscar sistemas alternativos a la clase tradicional, que permita mayor actividad y motivación del

---

[1] Departamento de Matemática General, Facultad Ingeniería Industrial, ISPJAE, Ciudad Habana, Cuba.

estudiante, utilizándose como medio de enseñanza y como herramienta de trabajo en laboratorios, acorde a la disponibilidad de recursos de nuestro Centro, todo esto con el fin de lograr un aprendizaje eficaz de los contenidos de la asignatura matemática mediante el uso de Derive en clase y en prácticas de laboratorio. Para ello el alumno asiste a 5 laboratorios en diferentes momentos del desarrollo de los temas de la asignatura, con el fin de resolver ejercicios que permitan apoyar su comprensión de los conceptos, fomentar su capacidad crítica, su intuición y su capacidad de abstracción.

Para garantizar el conocimiento del asistente se articula con la asignatura de computación de forma que al realizarse el primer laboratorio de matemática, los estudiantes ya tengan recibido los elementos necesarios para la utilización adecuada del asistente. Los ejercicios del primer laboratorio de matemática sirven como aplicación en las clases de computación. En el primer laboratorio se tratan ejercicios y problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales, determinantes y matrices.

Para que sea significativo el aprendizaje, éste debe reunir varias condiciones. La nueva información debe relacionarse de modo no arbitrario y sustancial con lo que el alumno ya sabe, dependiendo también de la disposición, motivación y actitud de éste por aprender, así como de la naturaleza de los materiales o contenidos de aprendizaje (Díaz-Barriga, 98). Teniendo en cuenta lo anterior, el segundo laboratorio se dedica a la realización de ejercicios y problemas encaminados a la preparación de condiciones para la impartición del tema límite de funciones, por ello se realizan ejercicios donde, a partir de la gráfica de una función, se realizan transformaciones elementales, que sirvan para ilustrar mediante aproximaciones sucesivas de funciones al valor límite, así como graficar ésto, la evaluación de puntos de funciones y de sucesiones etc.

Para la presentación del tema Límite de funciones se imparte una conferencia con el apoyo del programa DELTA que se apoya en los acercamientos gráficos y numéricos para la definición del concepto, con la utilización del Derive, lo que nos permite una mayor fidelidad y exactitud en las representaciones visuales que con los instrumentos normales, lápiz y papel, tiza y pizarra. Dicho programa consta de 4 módulos para el tratamiento visual de la gráfica en una vecindad del punto, una tabla de valores próximos al punto donde se quiera calcular dicho límite para el tratamiento numérico, el valor de δ en función de la ε para la función que se está trabajando y un cuarto módulo con la interpretación geométrica de la definición del concepto de límite. Posterior a la realización de la clase práctica, donde se realizaran ejercicios de forma manual, se realiza una clase de laboratorio donde aparecen ejercicios para usar la definición del concepto, para calcular límites que tengan un mayor grado de dificultad para el estudiante y aplicaciones del concepto, por ejemplo, el cálculo de asíntotas.

También se realizó un laboratorio para calcular integrales de funciones de dos variables e integrales iteradas.

Para complementar el estudio de las gráficas de funciones, posteriormente a la presentación de los conceptos asociados y la metodología para el análisis del comportamiento de funciones reales de variable real y a la realización de forma manual de ejemplos y ejercicios de menor grado de dificultad, se realiza un laboratorio que tiene por objeto analizar gráficas de más complejas así como plotearlas utilizando Derive y, de esta forma, ir controlando los resultados obtenidos en la computadora. Posteriormente a éste se realiza un seminario donde se discuten las características de las funciones y la utilización de Derive para obtener los elementos necesarios, así como las posibilidades y dificultades encontradas al plotear la curva con el asistente matemático.

Cabe destacar que después de cada laboratorio los alumnos deben entregar un informe con los resultados de los ejercicios que fueron realizados en la práctica, discutiendo con algunos las principales dificultades detectadas en su trabajo.

Al finalizar el semestre se ha aplicado una encuesta a una muestra de 26 alumnos que recibieron el curso. En la misma se tuvo en cuenta el interés por el uso del Derive, dificultades de las prácticas, utilidad de las mismas, influencia en el aprendizaje. Las valoraciones de la misma son las siguientes: Un 94% opina que la utilización de Derive le motivó el interés por la asignatura, un 89% estuvo de acuerdo con que los laboratorios son un complemento del desarrollo de los ejercicios realizados en el aula , un 98% opina que los laboratorios son efectivos, útiles, un 80% está de acuerdo con el orden y la secuencia de los laboratorios , un 94% plantea que se incremente la cantidad de laboratorios. Otras opiniones señalan que se complementen los laboratorios con algunos de Mathlab, que se que se evalúe con el uso de Derive y que se elabore una tarea para realizar con el apoyo del asistente.

Conclusiones

El uso que estamos haciendo del Derive nos permite desarrollar una metodología para una enseñanza más activa que le obligue al alumno a reflexionar y a trabajar con los conceptos de la asignatura y que le permita hacerlo a su ritmo ya que permite reducir el tiempo dedicado a los cálculos.

El tiempo de uso del Derive dependerá de cada objetivo perseguido en cada situación.

En muchos casos es necesario que se realicen cálculos rutinarios a mano, ya que lo bueno es que los alumnos utilicen la computadora, no para hacer algo que no saben hacer, sino para hacer algo que ellos con paciencia serían capaces de hacer.

Bibliografía

[1] Arcos, I. "Acerca de los conceptos de límite y continuidad". *Memorias de la Octava Reunión Centroamericana de Formación de profesores*. Costa Rica, 1994.

[2] Arcos, I. "Visualización en el Cálculo. Lectura de gráficas en el caso específico de los límites". *X Simposio Internacional sobre investigación en Matemática educativa*. Mérida, Nov., 1993.

[3] Diaz Barriga F. *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*, 1998.

[4] Dubinsky, E, *Calculus and computers*, 1995

[5] García, A. *Nuevas estrategias de enseñanza de las matemáticas.*

[6] Guzmán, M. *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en A. Matemático.*

[7] Solanilla, José F. "Aprendizaje de conceptos y principios matemáticos a través del ambiente de programación y la computación simbólica. Propuesta metodológica". *Memorias de la 10ma Conferencia Centroamericana de Matemática educativa*. Puerto Rico, 1996.

Experiencias didácticas en la enseñanza de la matemática con computadoras

Tamahara I. Díaz G.; Rosa del C. González R.; Lourdes Tarifa L.; Israel Mazario T.[1]

Resumen

Si algún medio desempeña un papel indispensable y novedoso en la Enseñanza de la Matemática al finalizar el milenio, es el ordenador. La utilización de este recurso pedagógico ha apoyado el trabajo de las disciplinas básicas que intervienen en la formación de los futuros ingenieros. El trabajo resumen algunas experiencias didácticas desarrolladas con alumnos de ingeniería de los primeros cursos, utilizando ordenadores en la enseñanza de la matemática.

En la actualidad, las técnicas asociadas a las computación son decisivas en el desarrollo integral de la enseñanza. Le educación superior en Cuba se ha ido transformando en la misma medida que los avances científicos-tecnológicos se han ido incrementando y para ello el trabajo científico-metodológico se ha desarrollado y ha ido incorporando la computación, no sólo como una ciencia independiente por sus características como tal, sino además como punto de apoyo para el resto de las ciencias básicas y específicas en el sistema computacional. En la enseñanza de la Matemática también se ha hecho necesario realizar experiencias que coadyuven a perfeccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje utilizando los ordenadores como medio de enseñanza demostrativo y como una herramienta que permita al estudiante ejecutar las acciones que deba dominar para su aplicación. Las experiencias que se exponen en forma breve se realizaron en tres perfiles de ingeniería: química, mecánica y agronomía. El ingeniero Químico necesita no solamente conocer definiciones y conceptos matemáticos, también se hace necesario su interrelación con los ordenadores desde el inicio de sus estudios universitarios puesto que, a partir del segundo año de estudios (de un total de 5), utilizan diferente software específico para la especialidad. En esa carrera, la Matemática transcurre en cuatro semestres que incluyen temas de álgebra y de cálculo diferencial e integral para funciones escalares y vectoriales de una y de varias variables. Para la experiencia se seleccionó un software de fácil manejo y comprensión por parte de los estudiantes, el cual consistió en el sistema interactivo de cálculo simbólico Derive, que permite abordar un gran espectro de temáticas. Algunas de las características más relevantes de Derive son: utiliza aritmética exacta, permite extender el trabajo a casi la totalidad de temas de los cursos que se trabajan, posee excelentes condiciones para la realización y utilización de gráficos y tiene un agradable ambiente de trabajo. Para no interrumpir el número de horas de las que dispone la disciplina, se programaron cuatro talleres en el laboratorio de computación utilizando horarios extra clase. Los mismos se desarrollaron con el alumno ayudante, preparado previamente por el docente. En los detalles se orientaron en principio hacia la explicación de las características del software y, posteriormente, se desarrollaron ejercicios. Por último se le asignaron tareas extra a los alumnos del grupo, encaminadas a desarrollar habilidades como interpretar y calcular. Estas fueron respondas y depositadas en una carpeta de la red, destinada a tal fin. Las sesiones programadas se realizaron en el segundo semestre posterior a que los alumnos recibieron la asignación de Análisis de Procesos como tal . En los semestres tercer y cuarto se le plantearon tareas independientes en la carpeta mencionada anteriormente y los estudiantes, de forma independiente depositaron sus respuestas en la misma.

Al realizar un intercambio con el grupo que efectuó la experiencia, pudo constatarse que en general fueron motivados por el docente para estas actividades y para comprender las ventajas que en los

1 Universidad de Matanzas, Cuba.

próximos cursos le pueden reportar los conocimientos adquiridos, les facilitó el trabajo de cálculo en la resolución de tareas cuando éstos son largos y tediosos, y les ayudó a modelar problemas sencillos. Reconocer la facilidad de software y el tiempo que pueden ahorrar con su uso, fue otras de las opiniones recogidas así como el hecho de que las limitaciones materiales impiden la utilización al máximo del curso aprendido. Para las actividades, se preparó un folleto destinado a estas experiencias que resultó de utilidad para el alumno ayudante y para los estudiantes del grupo en general. La Matemática Superior III de Agronomía incluye entre sus contenidos, la Programación Matemática con una concepción que permite consolidar en los estudiantes la convicción sobre las posibilidades que tiene la disciplina para modelar y resolver problemas científico-técnicos relacionados con su perfil profesional, con otras disciplinas y su vida real, incorporando los ordenadores que reveles a estos alumnos la importancia de los mismos en la resolución de problemas. Primeramente se desarrollan acciones en las actividades docentes de forma que el estudiante adquiera habilidad en la modelación de problemas sencillos y posteriormente en el Laboratorio de computación aplicar indistintamente los programas LO, QSB y Lindo a los problemas modelos cuyas tablas de salida han de interpretar. En esta actividad los estudiantes reciben la propuesta que aparece en el programa y analizan la resolución óptima al problema modelado, considerando los datos que ofrece el software sin que se afecte el valor óptimo de la base. La información la refleja cada estudiante en un informe al profesor, propiciando la comunicación entre ambos y así ejerciendo este último el control y evaluación tanto del trabajo individual como grupal para que de esa forma se convierta el trabajo computacional y su domino paulatino en un instrumento que enriquece los conocimientos del estudiante y aporta un elemento más para su desempeño en otras ciencias y en su futura vida profesional.

Hace varios años, se viene utilizando el software Derive con fines docentes, en la carrera de Ingeniería Mecánica, pues todos los temas que son abordados en la disciplina Matemática pueden ser tratados a través del uso de este sistema y cada día más se reconocen las grandes potencialidades de éste, al realizar de manera eficiente grandes cálculos.

Estas y otras muchas razones han hecho que en las clases prácticas se utilice el Derive como herramienta de trabajo, pero tratando siempre de que el estudiante se enfrente primero a la situación matemática o ingenieril, las modele, razone la vía de solución y analice el algoritmo de trabajo y posteriormente utilice el software para realizar los cálculos, obtenga las funciones que necesite, las grafique, y haga la valoración de sus propiedades y pueda hacer conclusiones al respecto. El trabajo con este software es muy amplio, se incluye en todas las asignaturas de la disciplina, en el trabajo con límites, integrales, series, interpolación y ajuste de curvas, así como con las ecuaciones diferenciales. Para las ecuaciones diferenciales de segundo orden ha sido elaborado en el departamento un fichero que las resuelve sin dificultades.

En el trabajo con los métodos numéricos también es muy útil para que el estudiante compruebe cuán acertada es la respuesta obtenida a través de otro software específico en el tratamiento numérico, analizando, en el caso de soluciones diferentes, cuál es la razón del problema, lo que puede estar dado por no haber tenido en cuenta la convergencia del método utilizado u otra causa que esté relacionada con los conceptos teóricos que el alumno debería tener en cuenta y que son tan necesarios de enfatizar en ellos, pues son las bases matemáticas que en muchas ocasiones no quedan lo suficientemente sólidas y provocan la inexactitud de los resultados que se obtienen. Es bueno señalar que las guías para las clases prácticas en el Laboratorio de Computación se entregan con varios días de antelación, pues siempre contienen, dependiendo del tema que se aborde, problemas que el estudiante tiene que modelar primeramente. En la actualidad se encuentra en su fase final la elaboración de un folleto de ejercicios para el trabajo con este software en las aulas. Como parte de la experiencia, se diseñó un sistema de evaluación multidisciplinario en la que intervienen la asignatura de Matemática que en ese momento está impartiéndose y la Introducción a la Computación en la que se evalúan los conceptos teóricos de Matemática y los requerimientos computacionales, lo que hace que los conocimientos se afiancen mucho más. Además, los estudiantes utilizan ese software en otras especialidades de la carrera en varios años y en los trabajos finales de sus tesis de diploma. Durante los cuatro cursos de puesta en práctica de la experiencia, los resultados han sido alentadores y los estudiantes se muestras interesados en el uso de este software incluso después de graduados, en su trabajo como profesionales.

Conclusiones

Realizadas las experiencias y después de observar sus primeros resultados puede concluirse que si se logra una adecuada motivación con los estudiantes, aún cuando por primera vez se enfrentan a esta situación, se puede lograr el uso con éxito de los ordenadores como un medio de enseñanza y aprendizaje de la matemática y sus aplicaciones. Así mismo, se logra una correcta intercomunicación entre la máquina y el usuario, estableciendo normas para el uso de nuevos paquetes profesionales, a medida que el alumno avanza en sus estudios.

Bibliografía

[1] Anillo, M. M., et al. "La motivación punto de partida en la enseñanza de la Matemática en la Universidad. La computadora como herramienta en este proceso", *Memorias del Congreso COMAT'93*, Universidad de Matanzas, Cuba, 1993.

[2] Durán B., Mayra. "Propuesta de un entorno educativo utilizando tecnología informática" IPSJAE, *Memorias del III Taller Internacional de la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura*. La Habana, Cuba, 1998.

[3] Fernández de Córdoba, P et al. *Memorias del III Taller Internacional de la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura*, La Habana, Cuba, 1998

[4] García González, E. et. al. *Recomendaciones para el uso de la computadora en el proceso de estudio*. Departamento de Informática Universidad de Matanzas, Cuba.

[5] Hernández, H. *Formación Matemática en el nivel terciario*. Ministerio de Educación Superior, Cuba.

[6] Lezana, Blanca et al. "Una Nueva modalidad en la enseñanza del Cálculo Diferencial". *Memorias del III Taller Internacional de la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura*, La Habana, Cuba, 1998.

[7] O'Shea, T. et.al Enseñanza y aprendizaje con ordenadores. Inteligencia artificial en la Educación Ediciones Anaya Multimedia, S.A. Madrid, 1985.

[8] Pijeira Cabrera, E.H. et al. *Sistemas interactivos de matemática como auxiliares para el desarrollo de habilidades de la disciplina matemática*, Universidad de Matanzas. Cuba, 1994.

[9] Torrano, E. et al. *Introducción a las matemáticas con computadoras*. Universidad Politécnica de Madrid, 1991.

[10] Torres, Jazo, J.M. et al. *Memorias del Congreso COMAT'93*. Universidad de Matanzas, Cuba, 1993.

Aprendizaje significativo: una reflexión

Rosa Inés Lira V.[1]

Resumen

El presente artículo evidencia los puntos principales de la teoría de Ausubel. Hace énfasis en la importancia de generar un aprendizaje realmente significativo en el aula para que tanto estudiantes como profesores experimenten un cambio en el significado de la experiencia. Se da énfasis en lo que debe ser La nueva arquitectura del aprendizaje y algunas nuevas metodologías que podrían contribuir con el cambio de paradigma de un enfoque encausado en la enseñanza hacia otro centralizado en el aprendizaje.

Cada vez que escribo un artículo o preparo un curso sobre aprendizaje significativo generalmente lo hago pensando en todos aquellos, quienes al igual que yo, creen que el aprendizaje en la escuela, colegio, universidad o en cualquier otro lugar puede ser más eficaz de lo que actualmente es.

Cuando se está consciente que uno de los grandes desafíos fundamentales para la educación de nuestro tiempo es preparar a la gente para que prevea los cambios, y dé forma al futuro en lugar de acomodarse a él, salta a la vista la necesidad de un mejor conocimiento de las corrientes educativas modernas y sobre todo de la necesidad de preparar a los educandos para ser pensadores competentes.

Quiero ser positiva al pensar que gracias a la vertiginosidad de nuestra época, el avance tecnológico e informático, y el intelectualismo virtual, se está presenciando el crecimiento de un notable **consenso** hacia una movilidad académica distinta, hacia un nuevo paradigma: dejar de pensar en un enfoque educativo encausado en la enseñanza y aproximarse a otro centralizado en el aprendizaje, es imprescindible en estos tiempos.

Afortunadamente, educadores reflexivos de todas partes del mundo están prestando atención a la importancia de cambiar o innovar nuevas metodologías o estrategias didácticas que no solo permitan una mejor enseñabilidad de su materia, sino también permitan desarrollar las habilidades del pensamiento de los alumnos y sus potenciales más valiosos.

¿Difícil?, sí; pero no una utopía.

Es una tarea con carisma de reto, cuyo grado de dificultad se ha elevado porque durante muchos años, la práctica educativa dominante estuvo inspirada en una sicología del aprendizaje derivado de principios asociacionistas o conductistas los cuales consideraban el aprendizaje como una acumulación de "asociaciones" provenientes de un estímulo que debía generar una respuesta inmediata. Esta acumulación de "conocimientos" podían dividirse en cientos de componentes los cuales debían ***llenarse*** en las cabezas vacías de los alumnos. De aquí la muy trillada metáfora de la Tabla Rasa; y el muy usado método de la Tolva, en el cual el criterio es la cantidad de conocimientos que fluye del profesor al estudiante y muchas veces de las notas del profesor a las notas del estudiante, sin haber pasado por la mente de los dos.

Otros como los Conductistas Equipotenciales consideraban que las "leyes del aprendizaje son igualmente aplicables a todos los ambientes, espacios e individuos." (Pozo, 1996). Esta concepción les permitía repetir el mismo contenido o materia año, tras año, década tras década; *negando así, las*

---

[1] Centro de Desarrollo Académico (CEDA), Instituto Tecnológico de Costa Rica.

diferencias individuales y el *desarrollo potencial* que cada uno de nosotros tiene. Por fortuna, hubo quienes se opusieron a esta visión dominante del aprendizaje conductista. Piaget (1974) por ejemplo, y sus discípulos han sostenido durante más de 50 años que el conocimiento adquirido mediante la memorización no es verdadero conocimiento.

La sicología Cognitiva y el Constructivismo constituyen otras dos buenos ejemplos de oposición contra el aprendizaje memorístico o mimético. Los científicos cognitivos de hoy comparten una visión constructivista del aprendizaje y afirman que las personas no son registros de información, sino constructores de conocimiento. Saber algo no es sencillamente haber recibido la información, sino también, haberla interpretado y relacionado con otros conocimientos. Ausubel y Novak, al igual que muchos constructivistas afirman que el Conocimiento es "Diferenciación progresiva y re-organización de estructuras"; por lo tanto el aprendizaje es un fenómeno constructivo en donde el sujeto es potencialmente activo. En el mismo sentido, el aprendizaje, según Vygostky (1995) "debe ser una actividad significativa para la persona que aprende, y dicha significatividad está directamente relacionado con la existencia de relaciones entre el conocimiento nuevo y el que ya posee el alumno."(capítulo 2).

Esta es una crítica fundamental a la enseñanza tradicional ya que el aprendizaje resulta muy poco eficaz si consiste simplemente en la repetición mecánica de elementos que el alumno no puede estructurar ni formar un todo relacionado.

Aprender es "sinónimo de comprender (Ausubel, 1989). Es decir, lo que se comprende será lo que se aprenderá y recordará mejor porque quedará integrado en nuestra estructura de conocimientos, sin olvidar obviamente el proceso de interacción entre el conocimiento nuevo y el que ya poseen los estudiantes. En otras palabras, a veces no es tan importante el producto final que emite el alumno como el proceso que le lleva a dar una determinada respuesta. (Esto es importante de tomarlo en cuenta en situaciones de exámenes o evaluaciones).

Aprendizaje significativo, sus orígenes

Al resumir el planteamiento de Ausubel (1989), se evidencia que la idea central de su teoría es la del ***aprendizaje significativo***, entendido éste como el proceso que relaciona nueva información con algún aspecto ya existente en la estructura cognoscitiva de un individuo. Este proceso ocurre por medio de la ***diferenciación*** y ***reconcilliación*** progresiva de conceptos que se van generando inmediatamente después de la presentación del material, permitiendo la construcción e interrelación de nuevas ideas, o secuencias de aprendizaje diseñadas a partir de ejes problemas.

Los principios claves para el establecimiento de estos procesos de asimilación de la nueva información, según Ausubel (1989), giran en torno a dos ideas fundamentales:

- El principio de diferenciación progresiva. Este expone que: a. Para los seres humanos es menos difícil aprender aspectos diferenciados de un todo más amplio y ya aprendido, que formularlo a partir de sus componentes diferenciados y específicos; b. La organización de una materia en particular en la mente de un individuo consiste en una estructura jerárquica en que las ideas más inclusivas ocupan el ápice e incluyen las proposiciones, conceptos y datos progresivamente menos inclusivos y más finamente diferenciados.
- El principio de reconciliación integradora. En el aprendizaje superordinado o combinatorio las ideas establecidas en la estructura cognoscitiva se pueden reconocer al hallar su relación en el curso del nuevo aprendizaje.

Pero, ¿Cómo se produce esa vinculación de los insumos nuevos con los contenidos previos de cada individuo?

Ausubel (1972) considera que la estructura cognitiva de cada persona manifiesta una organización jerárquica y lógica, en la que cada concepto ocupa un lugar en función de su nivel de introyección, generalidad y capacidad de incluir otros conceptos. El aprendizaje significativo produce al tiempo la estructuración del conocimiento previo y permite la extensión de su potencialidad explicativa y operativa provocando su organización, su introyección o su reformulación en función de la estructura lógica del material que se adquiere, siempre que existan las condiciones para su asimilación significativa.

De esta forma, el material aprendido de forma significativa es menos sensible a las interferencias a corto plazo y mucho más resistente al olvido, por cuanto no se encuentra aislado, sino asimilado a una organización jerárquica de los conocimientos referentes a la misma área temática. El aprendizaje es por lo tanto significativo cuando:

- Genera en los estudiantes sentimientos positivos.
- Se sienten mejor por sus logros.
- Son más propensos a trabajar espontáneamente.
- Empiezan a establecer conexiones o interrelaciones.
- Comprenden lo que están haciendo y por qué lo están haciendo.
- Empiezan a socializar el conocimiento.

En suma, es significativo cuando los estudiantes asumen la **responsabilidad de su propio aprendizaje.** Es decir, cuando los estudiantes asumen la responsabilidad de su propio aprendizaje encuentran, entre otras cosas, *tiempo* y son capaces de crearlo, porque han podido vivir responsablemente su aprendizaje y no solamente sufrirlo como tantas generaciones estudiantiles anteriores lo han hecho. Esto, empero, implica no solo **calidad del aprendizaje**, sino también un **cambio** en el **significado de la experiencia**.

Al respecto Barr y Tagg señalan: " Cuando se asume una responsabilidad, uno establece metas y después actúa para lograrlas, modificando continuamente el propio comportamiento para obtenerlas de una manera mejor. La responsabilidad de obtener un resultado no significa garantizarlo ni implica tener el control total de todas las variables relevantes; es hacer del logro de un resultado el criterio por el cual uno mide sus propios esfuerzos." (1999:4). En este sentido, quizás no esté de más recordar que no basta la presentación de una información a un individuo para que la aprenda, sino que es necesario que la construya mediante su propia experiencia interna. De ahí la importancia de que el profesor preste atención a las concepciones de los alumnos, ya sean a las que ya poseen antes de que comience el proceso de aprendizaje como a las que irán generándose durante ese proceso.

Así pues, la clave del aprendizaje significativo está en la vinculación sustancial de las nuevas ideas y conceptos con el bagaje cognitivo del individuo; sin olvidar la ***significatividad potencial del aprendizaje***, para lo cual Ausubel identifica dos ámbitos:

- *La significatividad lógica*: se refiere a la coherencia en la estructura interna del material, secuencia lógica en los procesos y consecuencia en las relaciones entre sus elementos componentes.
- *La significatividad psicológica*: que sus contenidos sean comprensibles desde la estructura cognitiva que posee el sujeto que aprende.

Estos ámbitos se tornan comprensibles en El Modelo de Aprendizaje Significativo de Ausubel (1972:72). Según el Modelo se infiere que la *potencialidad significativa* del material es la primera condición para que se produzca el aprendizaje significativo. El segundo requisito es la disposición positiva del individuo respecto del aprendizaje y requiere una red de conexiones entre la **dimensión lógica, la cognitiva y la afectiva.**

El factor motivacional, emocional, actitudinal es fundamental y está presente en todo aprendizaje. En efecto el valor educativo se incrementa cuando los estudiantes integran ***pensamiento, sentimiento y actividad.***

La nueva arquitectura del aprendizaje

Lo esencial de lo que llamo la nueva arquitectura del aprendizaje es por lo tanto la comprensión de lo que estamos aprendiendo en un nivel profundo, con una metodología que permita las conexiones lógicas y mutuamente interdependientes entre el sujeto y el objeto de estudio.

Si existe una relación viva con el estudiante, si el profesor sabe conectar su enseñanza con las necesidades profesionales, si trabaja en armonía con su institución y con su propia personalidad, la enseñanza a la lograr mucho más que una simple transferencia de informaciones o conocimientos: va a desarrollar la productividad profesional y humana de los estudiantes. Lo difícil de ésto, como sabemos todos, es que la red de las relaciones entre estudiantes, campo profesional, institución y el profesor mismo muchas veces no está en armonía. Existen más bien tensiones, conflictos y hasta contradicciones. Al respecto, Andrews (1993:104) señala que " la metodología más significativa y efectiva es: establecer contacto. Contacto con personas, contacto con problemas, contacto con conocimientos y emociones, contacto con relaciones y contextos; o en otras palabras "involucrar" a los estudiantes y también a los profesores, creando así una **cultura del aprendizaje mutuo."**

No podemos enseñar con calidad sin aprender. Enseñar a otros siempre es también enseñarnos a nosotros mismos, es decir ayudarnos a aprender. Como bien lo señala Wesseler: "Si no quisiéramos terminar agotados y frustrados como profesores estudiantes tenemos que buscar los desafíos y escoger los métodos adecuados, creando así una verdadera cultura del aprendizaje, a saber una **cultura del desarrollo de potenciales humanos**." (1996).

Enseñando con nuevos métodos

El primer desafío está en cómo simplificar un contenido complejo. La metodología tradicional trataba de simplificar los temas complicados aislando sus elementos: conceptos básicos por un lado, elementos, hechos y definiciones por otro. Hoy en día se propone simplificar esos mismos contenidos pero en forma integrada. Está comprobado que los seres humanos sobreviven en sus complejos mundos reales, porque tienen un talento natural de simplificar los problemas reales integrándolos en sus propios contextos. Lo más significativo, como hemos venido evidenciando, lo más profundamente percibido, lo más situado en un contexto dado, es lo que más fácil se entiende, aprende y recuerda.

Las metodologías denominadas activas e interactivas se aplican de manera variada porque crean relaciones profundas entre los estudiantes y los profesores, establecen colaboraciones laborales y educativas, otorgan una realimentación productiva, promueven el "terremoteo" en los estudiantes y los llevan a hacer esfuerzos de auto-organización, de re-equilibración para solucionar los desafíos o las situaciones problemas propuestas por el profesor y así aprender.

Estas metodologías además, apoyan un respeto mutuo de talentos diversos, no solo entre los estudiantes, sino también en la relación alumno-docente. "Los métodos activos contribuyen a una '*resonancia morfogenética*' que llega no solamente a una adquisición efectiva de conocimientos, sino también a formar profundos patrones productivos, cuya efectividad sobrevive el valor de los conocimientos cognitivos." (Wesseler, 1996).

Algunos ejemplos de las metodologías activas sugeridas por el mismo autor son las siguientes:

- Trabajo en grupo pequeño. Todo el éxito de la Universidad de Harvard parece basarse una buena parte en este enfoque metodológico de grupo pequeño.
- Proyecto de estudio. Sobre una tarea bien definida los estudiantes se acercan a la realidad y aprenden trabajando o haciendo con el profesor.
- Estudio de casos. Este es aplicable no solo a la economía como en Harvard sino también a cualquier otra disciplina.
- Aprendizaje por contrato (el profesor y el estudiante elaboran un contrato que les posibilita un proceso de aprendizaje de alta responsabilidad.
- Experimentos en Laboratorios o en el campo.
- Investigaciones estudiantiles. Los estudiantes trabajan en cooperación con sus profesores en proyectos de investigación.
- Aprendizaje de servicio: los estudiantes se dedican a un servicio para la comunidad y ganan experiencias valiosas de la realidad.
- Portafolio del aprendizaje. Los estudiantes escriben una especie de diario, reforzando así su rendimiento educativo, dándose retroalimentación a sí mismos.
- Se sugieren también los mapas conceptuales y los métodos heurísticos.

Los nuevos métodos no exigen más tiempo o más energía o más recursos, pero sí, después de una fase de experimentación y ensayo, exigen un uso inteligente del tiempo, de las energías, de los recursos y de la reflexión de todos los involucrados en el proceso. Esta capacidad de reflexión a la que se hace alusión es conceptualizada a la luz de Moraes quien la define como "la capacidad que permite al ser humano, y solamente a él, percibirse a sí mismo como llave de la comprensión de la realidad, con base en su saber y en su hacer, es decir, en su acción." (1999:12).

Las metodologías que se han sugerido o cualquier otra deben estar en consonancia con la nueva arquitectura del aprendizaje a la que se ha hecho mención, la cual envuelve el proceso caracterizado por el ciclo acción-ejecución; reflexión-depuración tanto en la interacción y el desempeño del alumno como en el análisis y reflexión por parte del profesor de su propio quehacer docente. Esta integración, alumnos – profesores involucrados y comprometidos en un proceso de reflexión recursiva y latente, examinando cada acción ocurrida como parte integrante de acciones futuras, darán frutos significativos y sorprendentes.

Esta nueva visión, sin embargo, no anula el papel del profesor al contrario, lo dignifica, lo reestructura con base en la comprensión de la dualidad existente en la relación educando-educador. "Uno no existe sin el otro; son por lo tanto, complementarios. La autoridad nace de esa relación, es desenvuelta en el proceso y no más impuesta." (Moraes, 1999).

Bibliografía

[1] Andrews, K.L. *Discurso de la VI promoción de Ingeniería*. Tegucigalpa, Honduras. 34 (1): 99-104, 1993.

[2] Ausubel, D. "Algunos aspectos psicológicos de la estructura del conocimiento". En ELAM, S. (Ed.) *La educación y la estructura del conocimiento*. Buenos Aires: El Ateneo. Pags. 211-252, 1972.

[3] Ausubel, D. *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Trillas, México, 1989.
[4] Barr, Robert; Tagg, John. "De la enseñanza al aprendizaje: Un nuevo paradigma para la educación de pregrado". En: *Materiales de Apoyo a la Evaluación Educativa*. México: CIEES, 1999.
[5] Brunner, J. *Desarrollo Cognitivo y educación*. : Morata, Madrid, España, 1988.
[6] Gimeno S., José; Pérez G., Ángel. *Comprender y Transformar la enseñanza*. Morata, Madrid, España, 1998.
[7] Moraes, Ma. Cándida. *El paradigma Educativo Emergente*. Material fotocopiado. San José, Costa Rica: Fundación Omar Dengo, 1999.
[8] Piaget, J. *To Understand is to Invent: The Future of Education*. Viking, New York, 1974.
[9] Pozo, J. Ignacio. *Teorías Cognitivas del Aprendizaje*. Morata, Madrid, España, 1995.
[10] Vigotsky, J. *Vigotsky y la formación social de la mente*. Paidós, México, 1995.
[11] Wesseler, Mattias. "El aprendizaje tomado en serio". *Psicología Educativa*. (Quito) IV:83-90, 1993.
[12] Wesseler, Mattías. *Hacia una excelencia profesional y social*. Instituto de Estudios Socio-Culturales. Universidad de Kassel, Alemania, 1996.

La reforma al cálculo. Qué debemos aprender?

Mario Marín S.[1]

Resumen

Este artículo es una pequeña nota acerca del movimiento de reforma al cálculo. Tiene como objetivo que el lector conozca las características principales del movimiento. Interesa también, poner sobre el tapete de discusión algunas observaciones acerca del estado de las cosas respecto a la enseñanza de la matemática en nuestro país.

1 Introducción

Como educadores, día a día nos vemos ante la dura realidad de que nuestros estudiantes no asimilan en los cursos lo que nosotros quisiéramos. Con frecuencia nos quedamos asombrados al verificar que, con el sistema de enseñanza del aprendizaje que utilizamos, buena parte de ellos hacen patente la terrible regla de *"curso aprobado, curso olvidado"*.

Ante esta situación, hemos hecho y seguimos haciendo esfuerzos para lograr mejorar la calidad de la educación que brindamos. Conocer nuevas alternativas, aprender de experiencias de otras latitudes, innovar y evaluar críticamente la innovación hecha, sacarle el máximo provecho a la tecnología existente, modernizar la concepción del proceso de enseñanza y aprendizaje, son opciones necesarias para tratar de solventar el déficit en el que podría encontrarse la educación.

En estas pocas notas se abordarán algunos tópicos relacionados con la enseñanza del cálculo, pero en realidad, cuanto se diga es aplicable en mayor o menor grado a la enseñanza de la matemática en general.

Durante los últimos semestres, la coordinación del curso de cálculo diferencial e integral, en la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica ha hecho sentir la necesidad de estudiar con algún detalle la problemática de la enseñanza del cálculo. La idea fundamental es compartir algunas ideas acerca del tema con el lector que revise estas notas.

Si bien es cierto que en el ámbito nacional se han hecho importantes aportes en la discusión del tema, se abordarán algunas ideas que han salido a la luz dentro del entorno de un movimiento de "Reforma en la Educación Matemática", desarrollado en el sistema educativo en los Estados Unidos, en particular esta reforma se refiere a dos movimientos: La reforma de la educación matemática K-12, impulsada por el (NCTM), siglas en inglés para *Concilio Nacional de Profesores de Matemática* y la reforma al cálculo, un movimiento, iniciado a mediados de la década de los 80 en los Estados Unidos, estimulado principalmente por la *Mathematical Association of América* (MAA), y por la *National Academy of Sciences*.

No se hará un tratamiento exhaustivo de las ideas, al contrario se presentan con un carácter informativo, de la forma fácil, dando más preguntas que respuestas. La bibliografía sobre el tema es amplia y existen foros de discusión donde puede obtenerse diversa información [14].

Es muy importante que se tenga en cuenta que estas propuestas han sido aplaudidas por unos y fuertemente cuestionadas por otros [6, 7, 8, 9, 10, 5]. Esto, además de normal, nos obliga a ser aún más críticos al momento de analizar cualquier propuesta educativa. De seguro, los cambios en la educación de un país tienen una gran incidencia en muchos escenarios de su desarrollo ya sea científicos, económicos, sociales y culturales.

---
[1]Instituto Tecnolígico de Costa Rica, Escuela de Matemática.

2 Las reformas

Cualquier intento de replantear la educación matemática universitaria, debe partir de una definición del verdadero rol de la misma en la formación de los futuros profesionales. Debe tomar en cuenta la necesidad de adecuar las prácticas pedagógicas acorde con las concepciones que se tengan respecto a lo que la educación matemática debe producir en los estudiantes. Y lo más importante de todo, debe partir de un convencimiento de la comunidad involucrada en el proceso, de que los cambios ayudarán a mejorar la educación matemática. Estas son algunas de las conclusiones que se desprenden de la discusión generada por la reforma de la educación matemática proporcionada en los últimos años en los Estados Unidos.

Han propuesto cambios importantes que en cierta forma coinciden con el sentimiento de muchos de nuestros educadores. Se ha propuesto sustituir el esquema de aprendizaje por repetición, incentivando formas de aprendizaje basadas en la motivación y en argumentos intuitivos. Si el estudiante se siente parte del proceso de generación del conocimiento, haciendo conjeturas, buscando contraejemplos, o estudiando aplicaciones reales, podría sentirse más identificado con la dinámica del aprendizaje, y sacar mejor provecho.

Por supuesto que una idea tan generosa como esta puede sufrir lastimosas deformaciones si no se tiene un panorama claro acerca de la educación matemática como un todo. Se trata de hacer coexistir, en una verdadera alianza, herramientas de pensamiento prácticas con un razonamiento matemático adecuado para que los conceptos que el estudiante adquiera sean sólidos y correctos.

Es imprescindible fortalecer los conceptos intuitivos con alguna forma de validación. Si el estudiante intuye un concepto; que gratificante, será ver que su razonamiento es correcto porque de alguna forma se puede justificar. Si se equivoca se ampliará su panorama del tema al descubrir algún contraejemplo. Al final todos ganamos.

Quizá el aspecto más relevante sea la necesidad de reconceptualizar muchas cosas. Esta frase tomada de [4] refiriéndose al lo que es el curriculum es iluminadora en este sentido "Un plan operacional detallando que contenidos deben ser enseñados a los estudiantes, cómo los estudiantes adquieren y usan ese concepto y cómo hacen los profesores para lograr desarrollarlo". Más aún, un verdadero curriculum debería tomar en cuenta aspectos acerca de la forma en que el individuo adquiere el conocimiento.

Por otro lado, se ha enfatizado en la necesidad de renovar el proceso de enseñanza y aprendizaje en matemática, utilizando aplicaciones reales. La matemática, además de verse como una disciplina con un alto grado de cohesión y una estructura interna bien definida, debe verse como una herramienta importante en el modelaje y solución de problemas.

El uso de ejemplos reales puede despertar en el estudiante la inquietud por entender y tratar de aplicar la matemática en la solución de problemas simples. Dos grandes logros se pueden obtener. Que el estudiante vea la utilidad tangible de lo que está aprendiendo y se motive y que el estudio de la matemática le ayude a desarrollar esquemas de razonamiento correctos. Las posibles aplicaciones deben tener un carácter general para ser accesibles a todos los educandos que las estudien.

Otros aspectos que han surgido en el análisis de esta reforma tienen que ver con el hecho de que la matemática es un lenguaje técnico muy preciso. Debe fomentarse en el estudiante la capacidad de utilizar con propiedad este lenguaje. En los cursos, es común que a los estudiantes se les pida una factorización y ellos resuelvan una ecuación, sin ningún sentimiento de culpa. Mientras no haya un uso adecuado de los términos, no habrá posibilidad de una comunicación eficaz y por lo tanto no habrá escenario adecuado para un entendimiento apropiado.

Cómo se puede esperar que un estudiante pueda obtener una conclusión válida de una experiencia si no dispone de los términos precisos para expresarla? Eso es un problema que hay que resolver primero.

Un tópico más abordado en la reforma tiene que ver con aspectos pedagógicos que debería implicar esta reforma.
Una adecuación de las ideas constructivistas puede resultar útil. El constructivismo aboga porque la adquisición del conocimiento ocurra únicamente cuando el estímulo externo es interiorizado y transformado a la manera en que nuestra mente aprende. Seguir a ciegas esta idea nos llevaría como educadores a un caos total. No hemos sido formados para educar así y probablemente nuestros educandos no hayan sido preparados para aprender así. Seguramente, llegar a un estado del arte de enseñar en el cual, pueda aplicarse metodologías constructivistas puras, tomará mucho tiempo y mayor seriedad y dedicación en políticas educativas. Sin embargo, sí se puede alimentar la esperanza de desarrollar híbridos entre instruccionalismo y constructivismo que permitan una mejoría en las estrategias de enseñanza y aprendizaje.
Por ejemplo, el tiempo dedicado a clase puede reorganizarse de manera que el estudiante "construya" su "propio conocimiento" redescubriendo conceptos y técnicas de solución de problemas. Esto ayudaría al desarrollo de experiencias a mediana escala que implementen aspectos del aprendizaje cooperativo y otras técnicas instruccionales derivadas del constructivismo.

3 La reforma del cálculo

Coincidiendo en parte con las ideas descritas en el punto anterior, el movimiento conocido como la Reforma del Cálculo; en particular aborda la temática del problema de la enseñanza del cálculo. Paralelamente impulsa estrategias para mejorar la calidad del cálculo que se enseña.
Algunos de los principios que propone son radicales. Partir de cero, no pensar en cuáles tópicos deben mantenerse y cuáles deben dejarse; al contrario, decidir cuáles temas son centrales e incluirlos. También defienden una concepción positivista del cálculo; mostrar al estudiante lo que se puede hacer con el cálculo y no lo que no se puede hacer. El otro aspecto que abordan se centra en la necesidad de ser realistas respecto al tiempo que el estudiante necesita para comprender los conceptos.
Los promotores de esta reforma se inclinan por una estrategia que llaman *la regla de cuatro*. Los aspectos gráficos, numéricos, analíticos y verbales deben conjugarse para lograr transmitir los conceptos al estudiante. En este escenario el estudiante es confrontado con el significado gráfico, el numérico y el verbal de lo que está haciendo. Con esto, según los defensores de la reforma, el estudiante se siente alentado a entender.
Hay mucha tela que cortar al analizar esta reforma, desde propuestas que simplifican las ideas en un sólo término, *los conceptos* [13], hasta posiciones de fuerte crítica [5] sobre cómo se interpretan los términos de la reforma.
Se ha escrito libros acorde con la filosofía de la reforma, por ejemplo [13], y materiales de apoyo, disponibles en diversos sitios en internet.
En términos generales, podría decirse que en mayor o menor grado los cursos de cálculo diferencial e integral que se enseñan padecen de males más o menos crónicos. Puede citarse por experiencia, que hay una generalizada falta de interés por lo que se puede aprender del curso. Probablemente una razón que favorezca esta actitud sea la trillada mecánica de definición–teorema–ejemplo–ejercicio, seguida en las clases. Otra muestra de que las cosas deben mejorarse es la promoción en los cursos, alrededor de un 50 % en el primer semestre del primer periodo en 1999, incluyendo el alto índice de retiros injustificados y abandono de cursos.
También la manera en que evaluamos es reveladora sobre el carácter de los cursos que se imparten, palabras como "calcule, derive, integre, resuelva, determine", son el encabezado más común en las preguntas. Los exámenes favorecen la manipulación casi ritual de símbolos y se deja poco espacio para que el estudiante demuestre que ha interiorizado algunos conceptos importantes. Los

mismos libros de texto, suelen proclamarse como defensores de una formación conceptual y terminan reduciendo los conceptos a una definición y una fórmula. Véase la forma que se desarrolla el concepto de integral definida en [12], en particular el teorema (5) en la página 340.
Por ejemplo, resulta paradógico que un estudiante pueda calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto y no sepa ni qué es una función, ni qué es una recta tangente. El cálculo diferencial es una materia muy importante, es el puente que comunica un amplio espectro de problemas científicos con la matemática, es importante que el estudiante se convenza de esto, para que se motive a comprenderlo mejor.
En buena parte la discusión debe centrarse en cómo mejorar el cálculo, fundamentalmente en la posibilidad de implementar escenarios de la enseñanza y del aprendizaje en los cuales el estudiante se sienta más motivado a aprender y el profesor disponga de los recursos adecuados para enseñar mejor los cursos de cálculo.

4 El rol de la tecnología

Hoy día, es indiscutible que cualquier propuesta sobre cómo mejorar la educación matemática debe tener en cuenta la gran influencia que tiene la tecnología. El espectro de actividades que puede plantearse hoy era inimaginable hace sólo veinte años, y es de esperarse que ese nuevo contexto nos lleve a reconsiderar la visión que tenemos sobre el curriculum y en general sobre toda la dinámica educativa[3].
Es necesario que las opciones que la tecnología ofrece amplíen el horizonte de posibilidades que se tienen y permitan enseñar una mejor matemática y en una forma mejor.
No solo se trata de introducir el objeto computacional como un agente más en el proceso, al contrario, el asunto es replantear el curriculum de manera que todo el entorno tecnológico forme parte integral del quehacer educativo. El proceso educativo no debe deformarse para encajar la computadora en algún lado, al contrario debe fortalecerse tomando ventajas del computador como un excelente medio para modernizar.
Una simple calculadora de bolsillo puede significar cosas absolutamente distintas para un profesor y para un alumno. Para el primero puede ser un medio para liberar al estudiante de labores calculeras y poco relevantes; creando espacios vitales para la reflexión y maduración de conceptos. Para el segundo puede ser un medio de liberarse de la necesidad de pensar en aspectos aunque sencillos, muy importantes. Muchas veces los estudiantes crean un grado de dependencia del calculador que es perjudicial, en especial cuando deteriora, en el estudiante, hasta la capacidad de hacer operaciones aritméticas sencillas.
Otro aspecto a tener en cuenta es la necesidad de reconceptualizar los cursos cuando adquieren el calificativo de *asistidos por computadora*, de no hacerlo se corre el riesgo de que el estudiante aprenda cómo hacer que la máquina le resuelva ejercicios con un alto grado de dificultad sin que tenga un entendimiento claro de qué significa esa solución.
Se hace necesario plantear alternativas a un buen número de interrogantes y llegar a un consenso sobre sus posibles respuestas. Por ejemplo, cuáles de las técnicas de manipulación tradicionales son obsoletas y cuáles son importantes para desarrollar capacidades deseables en los estudiantes. Cuál debe ser el balance entre los cálculos automatizados y los mentales. Si la meta es aprender haciendo cómo es que se aprende así, cómo es que se enseña así. Cómo se hace para evitar que el estudiante aprenda conceptos incorrectos, cómo se evalúa. Discutir sobre esas y muchas otras interrogantes es inpostergable.

5 Conclusiones

Trabajar por y para mejorar la educación matemática es más que una obligación, es un compromiso con nuestras futuras generaciones y con el sistema educativo, que debe constituirse en un promotor del avance científico y tecnológico del país.
Es hora de favorecer la innovación y la experimentación responsables, de generar espacios propicios para la discusión, para opinar y para la crítica constructiva. Los entornos científico, social y cultural actuales obligan a fortalecer y construir modelos para una dinámica educativa moderna acorde con las exigencias y expectativas del nuevo milenio.
Los modelos construidos hace diez o veinte años merecen renovarse, las condiciones que los generaron han cambiado, la percepción del significado de la educación también ha cambiado. Muchos de nuestros estudiantes llegan a la educación superior por presiones sociales, muchas veces desmotivados. Y nosotros tenemos la obligación de darles la mejor formación posible.

Bibliografía

[1] Benson, C. ; Long, V., "Re: Alignement", *The Mathematics Teacher* 91, 504–508, 1998.

[2] Bressoud, D., "Why do We Teach Calculus", *Amer. Math. Monthly* 99, 615–617, 1992.

[3] Burril, G., "National Council of Teachers of Mathematics", *The Mathematics Teacher* 91, 800–806, 1998.

[4] Ferrini-Mundy, J. ; Geuther, K., "An Overview of the Calculus Curriculum Reform Effort: Issues for Learning, Teaching, and Curriculum Development", *Amer. Math. Monthly* 98, 627–635, 1997.

[5] Wu, H., "The Mathematics Education Reform: Why You Be Concerned and Wath You Can Do". *Amer. Math. Monthly* 104, 946–954, 1997.

[6] Kaput, J., "Rethinking Calculus: Learning and Thinking", *Amer. Math. Monthly* 98, 731–737, 1997.

[7] Kilpatrick, J. "Confronting Reform", *Amer. Math. Monthly* 104, 955–962, 1998.

[8] Kleinfeld, M., "Calculus: Reformed or Deformed?", *Amer. Math. Monthly* 103, 230–232, 1996.

[9] Knisley, J., "Calculus a Modern Perpective", *Amer. Math. Monthly* 104, 724–727, 1997.

[10] Matinez, J ; Martinez, N. "In Defense of Mathematics Reform and the NCTM's Standards", *The Mathematics Teacher* 91, 746–755, 1998.

[11] Meza, G. *Informe de labores, Escuela de Matemática, Primer semestre 1999.* Documento Interno, Instituto tecnológico de Costa Rica, 1999.

[12] Stewart, J. *Cálculo Trascendentes Tempranas*, Tercera edición, Internacional Thomson Editores, México, 1998.

[13] Stewart, J. *Cálculo Conceptos y Contextos*, Primera edición, Internacional Thomson Editores, México, 1999.

[14] The Calculus Consortium: http://math.harvard.edu

Reordenamiento de conjuntos y Desigualdades.

José Rosales O.[1]

Resumen

Dados dos conjuntos de números reales con igual cantidad de elementos, se demuesta que el máximo de la suma de los productos de los elementos de los conjuntos se alcanza cuando ambos conjuntos están ordenados en forma ascendente. Además se dan aplicaciones a la solución de importantes desigualdades que han aparecido en competencias olímpicas internacionales.

1 Introducción

Suponga que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son n números positivos. Sea $y_1, y_2, \cdots, y_n$ un reordenamiento arbitrario de los $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i} \geq n. \tag{1}$$

La demostración de este resultado se puede realizar por inducción matemática. Dejamos los detalles al lector para que lo intente. Después de un rato se dará cuenta que no es un ejercicio simple de inducción. Sin embargo, si se usa el siguiente resultado, la demostración resulta ser un simple corolario.

Teorema 1 *Si el producto de n números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es igual a 1, entonces*

$$x_1 + x_2 + \cdots + \geq n. \tag{2}$$

En efecto, la desigualdad (1) se obtiene del teorema anterior al tomar $b_i = x_i/y_i$ y observar que los b_i son positivos y que

$$\prod_{i=1}^{n} b_i = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i} = 1.$$

La demostración del teorema 1 puede encontrarse en [1] o bien intentarla por inducción. Sin embargo, la demostración de la desigualdad (1) puede también ser obtenida como un caso particular de una desigualdad estudiada por Hardy y Litlewood en los años 30. En la siguiente sección se estudiará tal desigualdad.

2 Ordenamiento de conjuntos

Supongamos que $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ son dos conjuntos de números reales. Consideremos la siguiente expresión

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \tag{3}$$

Nos proponemos responder a la pregunta: ¿bajo qué condiciones sobre X y Y podemos concluir que (3) alcanza el valor máximo y el mínimo? El siguiente teorema responde esta pregunta.

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Matemática.

Teorema 2 *Sean $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ y $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ números reales. Para cualquier permutación $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se tiene que*

$$\begin{aligned} x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n &\geq x'_1y_1 + x'_2y_2 + \cdots + x'_ny_n \\ &\geq x_ny_1 + x_{n-1}y_2 + \cdots + x_1y_n. \end{aligned}$$

con igualdad si y solamente si $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ es igual a $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

La demostración de este resultado se basa en lo siguiente. Supongamos, para empezar, que $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ es una permutación de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en la cual solamente se han intercambiado dos elementos. En tal caso existirán dos enteros j y k, con $j < k$, tales que

- $y_j \leq y_k$,
- $x'_j > x'_k$.

Como

$$\begin{aligned} y_jx'_k + y_kx'_j - (y_jx'_j + y_kx'_k) &= (y_k - y_j)(x'_j - x'_k) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

se sigue que

$$y_jx'_k + y_kx'_j \geq y_jx'_j + y_kx'_k$$

Teniendo presente que $x'_k = x_j$ y que $x'_j = x_k$, hemos demostrado que

$$y_jx_j + y_kx_k \geq y_jx'_j + y_kx'_k$$

Esto demuestra la validez del teorema en el caso en que $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ es una permutación de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en la cual solamente se han intercambiado dos elementos. El caso general se sigue del anterior al aplicar el resultado un número finito de veces.

Si analizamos la demostración anterior nos percataremos que en el fondo lo que hicimos fue partir de un conjunto ordenado, luego lo desordenamos y nuestro procedimiento nos lo reordena. Observe también que el teorema (2) se utiliza para cualquier tipo de números, no importa si son positivos o negativos. Esto representa una enorme ventaja con respecto a la mayoría de las desigualdades conocidas.
Los siguientes corolarios son muy importantes. De hecho, el corolario (2) no es nada má y nada menos que el teorema 1. En el año de 1935 un problema del examen Kurschak de Hungría pedía la prueba del corolario (2).

Corolario 1 *Sea $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ una permutación de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,entonces se cumple que*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq x_1x'_1 + x_2x'_2 + \cdots + x_nx'_n$$

Corolario 2 *Sea $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ una permutación de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,entonces se cumple que*

$$\frac{x'_1}{x_1} + \frac{x'_2}{x_2} + \cdots + \frac{x'_n}{x_n} \geq n.$$

3 Aplicaciones

En esta parte presentaremos una buena cantidad de ejemplos donde se prueba la potencia del teorema (2) con respecto a otros métodos.

Ejemplo 1 Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números positivos. Entonces

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \tag{4}$$

con igualdad si y solamente si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. La desigualdad (4) es la famosa desigualdad de la media geométrica y la media aritmética. Para deducirla a partir del corolario (2) hagamos lo siguiente. Sea $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$, luego tomemos

$$x_1 = \frac{a_1}{G},\ x_2 = \frac{a_1 \cdot a_2}{G} \quad ,\ldots, \quad ,x_n = \frac{a_1 \cdots a_n}{G} = 1,$$

y apliquemos el teorema (1), que es en realidad un corolario del teorema (2), para obtener

$$\begin{aligned} n &\leq \frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_1} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1}} \\ &= \frac{a_1}{G} + \frac{a_2}{G} + \cdots + \frac{a_n}{G}, \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a que

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Ejemplo 2 Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números positivos. Entonces

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}, \tag{5}$$

con igualdad si y solamente $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. La desigualdad (5) se conoce como la desigualdad de la media geométrica y de la media armónica. Para demostrarla sean G y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como en el ejemplo anterior, entonces aplicando el teorema (1), se sigue que

$$\begin{aligned} n &\leq \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \\ &= \frac{G}{a_1} + \frac{G}{a_2} + \cdots + \frac{G}{a_n}, \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a

$$G \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}},$$

con igualdad si y solamente $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Ejemplo 3 Sean $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ y $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ números reales. Entonces

$$\begin{aligned} &(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq \\ &\qquad \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2\right), \end{aligned}$$

con igualdad si y solamente si para alguna constante k, se tiene que $x_i = ky_i$ para $1 \leq i \leq n$.

La desigualdad anterior es la famosa desigualdad de Cauchy-Schwarz. Para su demostración observe que si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ ó $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$, entonces el resultado es trivial. De otra forma, sea $S = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ y $T = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$. Definamos $a_i = x_i/S$ y $a_{n+i} = y_i/T$, para $i \le i \le n$. Por el corolario 1, se sigue que,

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{S} + \frac{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}{T} \\ &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2n}^2 \\ &\le a_1 a_{n+1} + a_2 a_{n+2} + \cdots + a_n a_{2n} + a_{n+1} a_1 + \cdots + a_{2n} a_n \\ &= \frac{2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n)}{ST}, \end{aligned}$$

lo cual es equivalente al resultado deseado. Igualdad se obtiene si y solamente si $a_i = a_{n+i}$ para $1 \le i \le n$, o lo que es lo mismo, $x_i T = y_i S$, para $1 \le i \le n$.

Ejemplo 4 Este ejemplo apareció como la primer pregunta de la Olimpiada Internacional de 1975, cuya sede fue Bulgaria. Sean $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ y $y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_n$ números reales. Sea $z_1, \cdots, z_n$ una permutación arbitraria de los $y_1, y_2, \cdots, y_n$. Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2.$$

La solución oficial es sumamente extensa, el lector puede comprobarla al ver [2] que es de donde nació la idea de este artículo. Sin embargo, si usamos el teorema 2 la solución es inmediata. En efecto, si desarrollamos la expresiones del lado izquierdo y del lado derecho de la desigualdad anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 &\le \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i y_i + y_i^2) &\le \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i z_i + z_i^2) \\ \sum_{i=1}^{n} (2x_i z_i + y_i^2) &\le \sum_{i=1}^{n} (2x_i y_i + z_i^2) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2,$$

se concluye que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ge \sum_{i=1}^{n} x_i z_i$$

que es precisamente el teorema 2.

Ejemplo 5 Este ejemplo apareció como la quinta pregunta de la Olimpiada Internacional de 1978, cuya sede fue Rumania. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n enteros positivos distintos. Pruebe que se cumple que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Sea $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ una permutación de términos crecientes de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, es decir que $a'_1 \leq a'_2 \leq \ldots \leq a'_n$. Observe que al ser los a_i enteros positivos y diferentes, se concluye que $a'_i \geq i$, para $1 \leq i \leq n$. Usando el teorema 2 se concluye que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} &\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{a'_k}{k^2} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\end{aligned}$$

Ejemplo 6 El siguiente problema apareció en una competencia de la República Popular de China, correspondiente al año 1985. Pruebe que

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_1} \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

para todos los números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si tomamos $x_{n+1} = x_1$, entonces el lado derecho de la desigualdad anterior toma la siguiente forma al usar sumatorias

$$\begin{aligned}\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_1} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_{i+1}} \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n\end{aligned}$$

Ejemplo 7 Este ejemplo apareció como la quinta pregunta de la Olimpiada Internacional de 1983, cuya sede fue Francia. Sean a, b, c los lados de un triángulo. Pruebe que

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $a \geq b \geq c$. En primer lugar probaremos que se cumple que $c(a+b-c) \geq b(c+a-b) \geq a(b+c-a)$. En efecto, observe que

$$c(a+b-c) - b(c+a-b) = ac - c^2 - ab + b^2 = (b-c)(b+c-a) \geq 0.$$

La otra desigualdad se prueba en forma totalmente análoga. Ahora, usando el teorema 2, se sigue que

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{c}\right) a(b+c-a) + \left(\frac{1}{a}\right) b(a+c-b) + \left(\frac{1}{b}\right) c(a+b-c) \\ &\qquad\leq \\ &\left(\frac{1}{a}\right) a(b+c-a) + \left(\frac{1}{b}\right) b(c+a-b) + \left(\frac{1}{c}\right) c(a+b-c) = a+b+c\end{aligned}$$

Simplificando, obtenemos que

$$\frac{a(b-a)}{c} + \frac{b(c-b)}{a} + \frac{c(c-a)}{b} \leq 0,$$

la cual es equivalente a la desigualdad original. El mismo argumento se aplica si se supone que $a \geq c \geq b$.

Para finalizar se dejan, como ejercicio, los siguientes ejemplos

Ejemplo 8 El siguiente problema apareció en una competencia de la ciudad de Moscú, correspondiente al año 1963. Pruebe que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

suponiendo que a, b, c son números positivos.

Ejemplo 9 Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales. Entonces

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

con igualdad si y solamente si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Ejemplo 10 El siguiente problema apareció en la Olimpiada Internacional de Matemática del año de 1964. Sean a, b, c los lados de un triángulo. Pruebe que

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

Bibliografía

[1] Bella Bollobás, *Linear Analysis*, Cambridge University Press, 1988.

[2] Denis Gerll & Georges Girard, *Les Olympiades Internationales De Mathématiques*, editions Jacques Gabay, Classiques Hachette, 1976.

[3] G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Pólya *Inequalities*, Cambridge University Press,1973.

[4] Murray S. Klamkin, *International Mathematical Olympiads*, The Mathematical Association of America, Nem Mathematical Library, Washington, 1986.

[5] Loren C. Larson *Problem-Solving Through Problems* , Springer-Verlag, New York,1983.

[6] Andy Liu, *Chinese Mathematics Competitions and Olympiads 1981-1993*, Australian Mathematics Trust,1998.

La enseñanza de los números complejos mediante matrices

Edgar Avila M.[1]

Resumen

En esta ponencia se tratará de cómo usar el isoformismo entre el campo $\mathbb{C}$ y un tipo especial de matrices reales de tamaño 2×2. Con la ayuda de este isomorfismo, la introducción al estudio del campo $\mathbb{C}$ se inicia al estudiante de una manera natural tal que conozca , aprenda y manipule los números complejos con la misma soltura que lo hace con las matrices.

1 Introducción

Es fácil y usual la enseñanza de las potencias a^n, con $a > 0$ y $n \in I\!N$ tanto en los primeros años de secundaria como en los diferentes niveles de la educación universitaria. Así , expresiones tales como 2^3, son comprensibles para el estudiante, pues su escritura corresponde a la expresión $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Pero más adelante, cuando se desea ampliar el conocimiento de potencias, esta escritura no funciona para expresiones tales como $2^{1.5}$; sin embargo debido a que algebraicamente son igualmente manipulables, el estudiante se accostumbra no solo a este tipo sino a otros aún más complejos tales como e^{π}. Veamos que el esquema mental original de potencia que se intenta enseñar varia en cuanto a la notación original.
Luego cuando tratamos de profundizar sobre el campo $I\!R$, enseñamos varios teoremas, en particular el conocido teorema $a^2 \geq 0, a \in I\!R$. Con este teorema en mano, pasamos a resolver inecuaciones tales como $(x^2+1)(x-1) \leq 0$.
Después de haber interiorizado de que todo número al cuadrado es positivo o cero, el estudiante pasa a un curso (generalmente de Algebra Lineal), donde se tiene que enfrentar al campo de los números complejos $\mathbb{C}$. Aquí su esquema mental se tambalea un poco, pues se encuentra que $i^2 = -1$. El efecto es similar al que tuvo de pasar 2^3 al proceso de asimilar $2^{1.5}$.
Por eso es conveniente, introducir al estudiante a los números complejos, tal que su construcción no sea nada artificial ni mítica.

2 Los métodos utilizados en la enseñanza

Uno de los recursos que se utilizan para los primeros conocimientos de los números complejos es mediante las siguientes operaciones de pares ordenados:

1. (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)
2. (a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)

Así al par $(a, 0)$ se le identifica con a, y al punto $(0, 1)$ se le llama i. Con esta notación se llega a la notación accostumbrada: $z = a + bi$.
La otra forma, -demasiado simplificada - consiste en denotar a i, como raíz de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

[1]Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Matemática

3 La forma matricial

Aunque ya el estudiante ha madurado bastante, la forma de definir las operaciones de los pares ordenados le puede parecer un poco artificial, pero como conoce el álgebra de las matrices, procedamos a su uso para la construcción de $\mathbb{C}$.
Veamos el conjunto de matrices reales $M_{2\times 2}$, con una forma especial:

$$G = \left\{ A \in M_{2\times 2} : A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right\}$$

Notemos en primer lugar que la matriz cero $0 \in G$.
La suma y la multiplicación son operaciones cerradas como se muestra seguidamente:

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}$$

De igual forma

$$AB = \begin{pmatrix} ac-bd & bc+ad \\ -(bc+ad) & ac-bd \end{pmatrix}$$

Puesto que $detA = a^2 + b^2$, se tiene que si $A \neq 0$, la matriz es invertible y además

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

Notamos que $A^{-1} \in G$. La asociatividad en G se sigue de la asociatividad de las matrices, con lo cual nos muestra que G es un campo.

4 El isomorfismo

Veamos la aplicación $f : \mathbb{C} \to G$,donde f la definimos de la manera siguiente:

$$f(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Se puede demostrar que f es biyectiva y que $f(z_1 z_2) = f(z_1)f(z_2)$, $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$, con $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Esto muestra que f es un isomorfismo.

5 La notación

La notación de "0" para la matriz nula es conocida y usada por los estudiantes
$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ por lo que su uso puede ampliarse y escribir :

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos ahora la matriz

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que el elemento $i \in G$. Calculemos i^2:

$$i^2 = i \cdot i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

De aquí obtenemos, sin ningún truco algebraico para el estudiantes, el objetivo primero para la construcción de $\mathbb{C}$: $i^2 = -1$.

6 El uso de la computadora

Si se tiene un paquete computacional (tal como *Mathematica*), la introducción de $\mathbb{C}$ es muy cómoda mediante este isomorfismo, además podemos efectuar algunos ejemplos sin necesidad de recurrir directamente a número i, aunque después si el paquete contiene tal número su uso resulta mucho menos artificial que la simple digitación de i.
Veamos el siguiente ejemplo: Calcular

$$4 + 3i + \frac{2 - 3i}{4 + 5i}$$

Usamos la notación matricial y obtenemos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

Efectuando estas operaciones obtenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{157}{41} & \frac{101}{41} \\ -\frac{101}{41} & \frac{157}{41} \end{pmatrix}$$

Esto nos dice que

$$4 + 3i + \frac{2 - 3i}{4 + 5i} = \frac{157}{41} + \frac{101}{41} i$$

7 Conclusión

Hemos presentado una forma de la enseñanza del campo $\mathbb{C}$ que ofrece una ventaja tanto en su escritura como en su manipulación por matrices, lo cual beneficia al estudiante puesto que su primer conocimiento con tal conjunto no le resulta nada artificial , lo cual contribuye a que sus ideas de las Matemáticas no les resulten ni mágicas ni engorrosas. Por otro lado las operaciones en este conjunto le serán más fáciles y accesibles . Por su parte, el profesor cuenta con la ayuda de las operaciones matriciales que con la ayuda de una computadora le será cómoda su primera presentación del campo $\mathbb{C}$.

Bibliografía

[1] Birkhoff, G.; S. Mac Lane. *Algebra Moderna*. Editorial Vincens-Vives, 1995.

[2] Grimaldi R.P. *Matemática Discreta y Combinatoria*. Addison-Wesley Iberoamericana.

[3] H.F. Höft; M. Höft. *Computing with Mathematica*, AcademicPress, 1998.

[4] Kostrikin A.I. *Introducción al Algebra*. McGraw-Hill, 1992.

¿Para qué enseñamos matemática en el colegio?

Luis Gerardo Meza C.[1]

Resumen

Reflexionar sobre "por qué" se enseña matemática en la educación secundaria y "para qué" se enseña son dos cuestiones diferentes. De acuerdo con Medaura (1990) el "por qué" nos da el origen, la causa o la razón de algo. El ""para qué"" nos da la meta, lo que se piensa lograr, el lugar adónde llegar.

El propósito de este trabajo es presentar al educador, principalmente al profesor de matemática, un panorama sobre las visiones dominantes de la naturaleza de la matemática, su enseñanza y su aprendizaje, que le permitan fortalecer una posición personal sobre la importancia de la enseñanza de la matemática y sobre el "para qué" de esta labor.

1. La importancia de tener claro el *"para qué"*

Como sugiere Medaura (1990) planteamos con frecuencia *"para qué"* enseñamos nuestra asignatura, nos ayudará a mantener el sentido de nuestra tarea docente y a tener claros los objetivos que nuestros alumnos deberán lograr.

Abarca (1990) indica que la escogencia de una u otra metodología didáctica y de los métodos que emergen de ella, depende entre otros factores, del para qué. Por otra parte, existen diferentes visiones sobre la naturaleza de la matemática, su enseñanza y su aprendizaje.

Santos (1996) afirma que en realidad, cada profesor posee un modelo o una caracterización de lo que son las matemáticas y cómo pueden ser aprendidas por los estudiantes. Sobre este punto, investigaciones recientes (Gómez y otros, 1996), han mostrado que los profesores no siempre son conscientes de tener una visión sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, y tampoco imaginan que existan conjuntos alternativos de visiones sobre estos aspectos.

Según Thompson (1992), citado por Moreno y Sacristán (1996), una tesis que ha sido ampliamente documentada en los estudios didácticos, es que las concepciones que los profesores tienen de las matemáticas afectan de forma apreciable su práctica docente y las formas de concebir las estructuras curriculares.

Santos (1996) indica que el modelo que tenga el profesor sobre las matemáticas y cómo éstas pueden ser aprendidas por los estudiantes, influye en las decisiones diarias que tiene que tomar sobre cómo presentar el contenido en el salón de clases.

Por todo lo anterior, es importante que el profesor de matemática reflexione sobre el "para qué" enseña matemática en la educación secundaria, buscando de paso, explicitar su propia visión de la naturaleza de la matemática y de la forma en la que aprenden matemática sus estudiantes.

2. Sobre la naturaleza de la matemática, su enseñanza y su aprendizaje

[1] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

El punto de vista platónico de la matemática asume que las entidades matemáticas son reales y que existen independientemente del sujeto. Para Platón la matemática no es inventada o construida por el hombre. Según esta posición, ha indicado Greene (1986), el hombre, con su intuición y por reminiscencia, descubre las ideas matemáticas que preexisten en el mundo ideal y que están adormecidas en su mente. Como indican Davis y Hersh (1981), citados por Santos (1986), de acuerdo con los platónicos, un matemático es un científico empírico similar a un geólogo, no puede inventar las cosas, porque estas existen de antemano. Lo más que puede hacer es descubrirlas.

Otro punto de vista conocido como *formalismo* relaciona el desarrollo de la matemática con un conjunto de axiomas, definiciones y teoremas, junto a la existencia de ciertas reglas que se usan para derivar y demostrar teoremas, proposiciones y fórmulas.

Es importante considerar, como señala Santos (1986), que aun cuando los platónicos y los formalistas tienen puntos de vista opuestos acerca de la existencia y realidad de las entidades matemáticas, coinciden en cuanto a los principios de razonamiento que son permisibles en la práctica de las matemáticas.

Una tercera corriente, denominada *intuicionismo*, afirma que las matemáticas pueden obtenerse solamente por medio de una construcción finita. Desde este punto de vista, indica Barker (1965), debemos poseer una demostración constructiva de cualquier afirmación matemática antes de sentirnos autorizados a decir que sabemos que dicha afirmación es cierta. En esta posición todo argumento utilizado en una demostración matemática debe recurrir sólo a procedimientos que puedan desarrollarse en un número finito de pasos. Si la demostración afirma la existencia de un cierto número, por ejemplo, debemos saber como construir ese número mediante un procedimiento claro en un número finito de pasos. Esta corriente rechaza el principio del "tercero excluido" (el principio de la lógica tradicional según la cual toda afirmación es o verdadera o falsa y no hay posibilidad media). Sostienen que bien puede haber proposiciones significativas que no tengan ni error ni falsedad. En este sentido consideran que pueden existir proposiciones que no podemos demostrar ni refutar. (Barker, 1965)

Esta posición causa considerables estragos, al decir de Barker (1965), en las matemáticas clásicas al rechazar algunos de sus métodos de razonamiento y algunos de sus axiomas.

El impacto de estas tres escuelas es resumido por Davis y Hersh (1981), citados por Santos (1986), de la manera siguiente:

> "En la segunda mitad del siglo XX, el formalismo llegó a ser la actitud filosófica predominante en los libros de texto y programas oficiales de matemáticas. La corriente intuicionista permaneció como una herejía con pocos partidarios. La escuela platónica fue y es compartida por casi todos los matemáticos. Pero similar a una religión escondida, se practica en privado y raramente es mencionada en público".

En la actualidad se dan importantes debates entre los matemáticos profesionales relacionadas con el papel que la demostración debe jugar en su disciplina. De acuerdo con Horgan (1993) los matemáticos pueden verse obligados a aceptar lo que muchos científicos y filósofos han admitido ya, a saber: que sus asertos sólo son, en el mejor de los casos, provisionalmente verdaderos o, si se quiere, verdaderos mientras no se demuestre que son falsos.

Por una parte, las demostraciones de algunos teoremas nuevos son con frecuencia tan largas y complicadas que resulta difícil evaluarlas, quedando la impresión de que la validez de algunos teoremas. Por otra, un elemento importante en este asunto es la participación de las computadoras, que está obligando a los matemáticos a reconsiderar la naturaleza misma de la demostración y, por consiguiente, de la verdad (Horgan, 93)

Algunas demostraciones han sido completadas gracias a la participación de las computadoras (el llamado "teorema de los cuatro colores" es un famoso ejemplo). Estas demostraciones, por la cantidad y complejidad de los cálculos que implican, no pueden ser comprobadas por una persona. Además, algunos investigadores han propuesto una demostración computacional que ofrece sólo la probabilidad (no la garantía) de que un enunciado sea verdadero, propuesta que no gusta a muchos matemáticos.

El debate está planteado. Por una parte, algunos matemáticos sostienen que las demostraciones matemáticas deben seguir siendo como lo han sido tradicionalmente. Por otra, aunque en general nadie aboga por la eliminación de las demostraciones, algunos matemáticos consideran que la validez de ciertas proposiciones puede quedar mejor establecida comparándola con experimentos realizados en computadoras o con fenómenos del mundo real.

En cuanto a enfoques, métodos y técnicas para la educación matemática Morales, Lara e Irby (1998), basados en Fiorentini (1994, 1995) identifican los siguientes:

2.1 Enfoque formalista clásico

Este enfoque queda representado muy especialmente por la obra los *Elementos* de Euclides y la influencia que ejerció. Partiendo de elementos primitivos y de una declaración de definiciones y axiomas se demuestran los teoremas con estricto apego a las leyes de la lógica tradicional.

Este modelo encaja de manera natural con la concepción platónica de la matemática. La enseñanza de la matemática en este enfoque gira alrededor del libro de texto, el profesor es un reproductor en la pizarra de lo que el autor del texto escribió en su libro.

2.2 Enfoque empírico activista

Este enfoque resalta que lo importante de la enseñanza de la matemática no es aprender un contenido específico, sino "aprender a aprender". Este es un enfoque que rompe con la escuela clásica y asigna al estudiante un papel definitivamente activo. Desde el punto de vista de la matemática este enfoque formula que el conocimiento matemático emerge del mundo físico y es extraído por el hombre a través de los sentidos. La didáctica utilizada se basa principalmente en actividades de descubrimiento, desarrollo y reinvención.

La piedra angular de la enseñanza de la matemática utilizando este enfoque se traslada del contenido curricular a actividades dirigidas hacia la resolución de problemas. Por esta razón, estudiar matemática con este enfoque significa que el estudiante debe desarrollar destrezas en actividades que comprenden el uso de material concreto, modelaje y resolución de problemas.

El profesor en este enfoque es un facilitador del aprendizaje.

2.3 Enfoque formalista moderno

Este enfoque surge con el establecimiento del estudio de la matemática moderna, a mediados del presente siglo. Obedece más a un retorno al estudio de la matemática formalista, que consiste en el estudio de los elementos unificantes de la teoría de conjuntos, relaciones, funciones y estructuras algebraicas. El objetivo en este enfoque es definir, proponer y demostrar, mediante el uso de la lógica simbólica, la teoría de conjuntos y el álgebra.

2.4 Enfoque tecnicista

Este enfoque está centrado fundamentalmente en la enseñanza programada, que incluye las máquinas de enseñanza, que recuerdan los trabajos de Skinner. Esta teoría de aprendizaje se circunscribe a tres elementos: estímulo, respuesta y refuerzo. La enseñanza de la matemática con apego a esta tendencia, se caracteriza por el entrenamiento para resolver ejercicios y problemas tipo. La matemática es reducida a un conjunto de técnicas, reglas y algoritmos.

2.5 Enfoque constructivista

Este enfoque propone el cambio del estudio de la matemática práctica, mecanicista y memorística por una práctica pedagógica que, con el auxilio de material concreto, busque construir las estructuras del pensamiento lógico matemático.

Para el constructivismo el conocimiento matemático no se obtiene del mundo físico ni tampoco de las mentes humanas aisladas del contexto social. Este contexto social, este mundo, es el resultado de la acción interactiva y reflexiva del hombre con su ambiente y con las actividades que caracterizan este medio. El constructivismo ve la matemática como una contribución humana constituida por estructuras y relaciones abstractas entre formas reales o posibles.

Para este enfoque lo importante no es el aprendizaje de un contenido en particular, sino más bien, "aprender a aprender" mediante el desarrollo del pensamiento lógico-formal.

2.6 Enfoque socio-etno-cultural

En esta forma de enseñar la matemática la labor del profesor se orienta a resolver los problemas de la comunidad, a rescatar los valores y a elevar el autoestima de los estudiantes. Ambos, profesor y estudiantes, se identifican en conjunto con los elementos de la comunidad. Su objetivo es resolver los problemas de la comunidad creando las técnicas y procedimientos más apropiados.

3. Algunos planteamientos sobre el "para qué" a lo largo del tiempo

Dieudonne (1961) se preguntaba ¿qué finalidad se persigue en las sociedades modernas con la enseñanza de las matemáticas a los niños?. Y se respondía: "Ciertamente, no es la de hacerles conocer una colección de teoremas más o menos ingeniosos sobre las bisectrices de un triángulo o la sucesión de los números primos, de los que no harán después ningún uso (a menos que se conviertan en matemáticos profesionales), sino la de enseñarles a ordenar y a encadenar sus pensamientos con arreglo al método que emplean los matemáticos, y porque se reconoce que este ejercicio desarrolla la claridad del espíritu y el rigor del juicio. El objeto de esta enseñanza debe ser, por tanto, el método matemático, y las materias de enseñanza no serán más que ilustraciones bien elegidas del mismo".

Para Toranzos (1963) los fines de la enseñanza de la matemática son tres: uno formativo, uno instrumental y uno práctico. Considera el fin formativo como enseñanza disciplinadora de la inteligencia, el segundo como medio indispensable para el estudio de otras disciplinas y el tercero se refiere al valor utilitario que la Matemática tiene por sus numerosas aplicaciones en la vida diaria del hombre moderno. En particular este autor considera que la enseñanza de la matemática es una preparación para el estudio de las demás ciencias, el conocimiento de sus métodos de razonamiento es un medio formativo indispensable para el estudio de las disciplinas físico-naturales y para la técnica, agregando, además, la conveniencia de ejercitarse en el razonamiento matemático pues así se prepara la mente para todo otro razonamiento.

Considera, también que otros aspectos de la importancia formativa del estudio de la Matemática, son:

- que contribuye a desarrollar la imaginación
- ejercita el poder de generalización y abstracción
- contribuye a perfeccionar el uso del idioma.

Gabba y Dalmasso (1966) consideran que los objetivos de la enseñanza de la matemática son la información y la formación. La información, indican, está dada por los conocimientos matemáticos que los alumnos adquieren, en tanto que la parte formativa estará verdaderamente cumplida si, a través de esta información recibida, es posible introducir a los alumnos en la moderna concepción de la Matemática; no sólo por ella misma, sino también en la medida en que adquieran capacidad para ordenar y relacionar sus pensamientos con claridad y emitir juicios con exactitud.

Para Zubieta (1972) el estudiante de matemática debe poner en juego lo mejor de sus recursos mentales, su espíritu de observación, su inventiva; todo lo cual funciona mejor bajo la vigilancia de una maestro hábil y competente.

Jiménez (1978) indicaba, en la introducción del "Programa de Matemática de III Ciclo", que el currículum matemático, básicamente, tiene que estar orientado a satisfacer las necesidades de los siguientes cuatro tipos de estudiantes:

- Aquellos que tienen intención de continuar estudios en las Universidades o en cualquier otra institución de Educación Superior, para lo cual necesitan una formación matemática adecuada.
- Aquellos que por sus estudios posteriores requieren de la Matemática en su aspecto instrumental.
- Aquellos que desean estudiar Matemática por el reto que ella les plantea.
- Aquellos que estudian Matemática para resolver los problemas cotidianos.

En el mismo documento este autor escribía lo siguiente: cabe agregar que la enseñanza de la Matemática tiene tres finalidades muy bien definidas: formativa, instrumental y práctica. En lo formativo, la Matemática disciplina la mente y encauza el razonamiento. En el aspecto instrumental, actúa como coadyuvante para el estudio de la Física, la Psicología y de otras disciplinas. En lo práctico, ayuda al hombre a solucionar los problemas que la vida cotidiana le presenta.

Para Mora (1987) el fin más general que se desea conseguir con la enseñanza de la matemática es que cada estudiante adquiera un grado de competencia en matemática acorde con sus posibilidades. Este autor considera que la enseñanza de la matemática puede representar un papel en la formación básica de los estudiantes, si se considera lo siguiente:

- Las matemáticas como medio de comunicación
- Las matemáticas como instrumento
- Apreciar las relaciones entre las matemáticas
- Desarrollar las capacidades básicas de los estudiantes (abstracción, generalización, conjeturar y someter a prueba, rigor de razonamiento, desarrollo de la imaginación y de la intuición, etc.)
- Aprender las matemáticas como un proceso

- Desarrollar hábitos de trabajo (trabajo sistemático, trabajo independiente, trabajo en grupo)

Cobb (1988), citado por Santos (1996), sugiere que una meta importante de la instrucción matemática es proveer las condiciones que ayuden a los estudiantes a desarrollar una estructura más poderosa que la que tienen al inicio del curso.

En el *Programa de Matemática de la Educación Secundaria* (1995), del Ministerio de Educación Pública, se indica que los fines que se espera alcanzar con el mismo son:

- Que aprendan a valorar las matemáticas.
- Que se sientan seguros de su capacidad para hacer matemáticas y confianza en su propio pensamiento matemático.
- Que lleguen a resolver problemas matemáticos.
- Que aprendan a comunicarse mediante la matemática.
- Que aprendan a razonar matemáticamente.
- Que experimenten situaciones abundantes y variadas, relacionadas entre sí, que los lleven a valorar las tareas matemáticas, desarrollar hábitos mentales matemáticos, entender y apreciar el papel que las matemáticas cumplen en los asuntos humanos.
- Que exploren y puedan predecir, e incluso cometer errores y corregirlos de forma que ganen confianza en su propia capacidad de resolver problemas simples y complejos.
- Que puedan leer, escribir y debatir sobre las matemáticas, y que formulen hipótesis, comprobarlas y elaborar argumentos sobre la validez de las hipótesis.
- Que se familiarice con la unidad de las matemáticas.
- Que tengan experiencias variadas con relación a la evolución cultural, histórica y científica de las matemáticas de forma que puedan apreciar el papel que cumplen las matemáticas en el desarrollo de nuestra sociedad y el impacto que tiene en nuestra cultura y en nuestras vidas.
- Que exploren las relaciones existentes entre las matemáticas y las disciplinas con las que interactúan.

Para Gómez y otros (1996) el objetivo de la educación matemática es el desarrollo del potencial individual con miras al cambio social. La enseñanza debe hacerse, agregan estos autores, a través de la discusión, la investigación y el cuestionamiento. Por tanto, apuntan, el aprendizaje es la internalización de construcciones sociales de las matemáticas lograda mediante la solución de problemas de la vida diaria.

4. Un marco de referencia obligatorio

Un profesor de matemática costarricense debe considerar como marco de referencia obligatorio, para entender el *"para qué"* de la enseñanza de la matemática, los fines de la educación costarricense. De acuerdo con estos fines la educación costarricense, por medio del sistema educativo, pretende formar un costarricense que sea amante de su Patria, consciente de sus deberes, de sus derechos y de sus libertades fundamentales, con profundo sentido de responsabilidad y de respeto a la dignidad humana, que esté dispuestos a conciliar sus intereses individuales con los de la comunidad. Este proceso educativo también está encaminado a contribuir al desenvolvimiento pleno de la personalidad humana; estimular el desarrollo de la solidaridad y de la comprensión humanas; y conservar y ampliar la herencia cultural, impartiendo conocimientos sobre la historia del hombre, las grandes obras de la literatura y los conceptos filosóficos fundamentales.

Por otra parte, y en concordancia con lo anterior, tenemos que la educación secundaria tiene como objetivos contribuir a la formación de la personalidad en un medio que favorezca su desarrollo físico, intelectual y moral; afirmando una concepción del mundo y de la vida inspirada en los ideales de la cultura universal y en los principios cristianos.

Pretende, también, desarrollar el pensamiento reflexivo de los estudiantes para analizar los valores éticos, estéticos y sociales, prepararlo para la solución inteligente de los problemas y para impulsar el progreso de la cultura; prepararlo para la vida cívica y el ejercicio responsable de la libertad, procurando el conocimiento básico de las instituciones patrias y de las realidades económicas y sociales de la Nación., guiándolo en la adquisición de una cultura general que incluya los conocimientos y valores necesarios para que el adolescente pueda orientarse y comprender los problemas que le plantee su medio social; y desarrollar las habilidades y aptitudes que le permitan orientarse hacia algún campo de actividades vocacionales o profesionales.

Además, el educador debe considerar los alcances de la Política Educativa vigente, que como ha señalado Doryan (1994), plantea los esfuerzos y acciones educativas para alcanzar un ideal de ser humano que de sentido a la educación. La política educativa vigente propicia, al decir de Doryan (1998), la búsqueda y concreción de un costarricense del siglo XXI, que sea **persona** con vida espiritual digna, libre y justa; **ciudadano** formado para el ejercicio de la democracia; **productor** para sí mismo y para el país; **solidario** para buscar formas de cooperación y concertación entre sectores a partir de un desarrollo sostenible, ecológico y social, **con capacidad para comunicarse con el mundo de manera inteligente**. Los objetivos generales y/o específicos expuestos en el programa de Matemática de cada ciclo, deben encontrar sentido en el marco más general expuesto anteriormente.

5. Conclusiones

Más que una conclusión acerca de cual debe ser el "para qué" de la enseñanza de la matemática en la educación costarricense, deseo resaltar la importancia de que todo profesor de esta disciplina en este nivel, tome conciencia de lo siguiente:

- De que existen diferentes visiones sobre la naturaleza de la matemática y su enseñanza.
- Que la visión propia de cada educador sobre la naturaleza de la matemática y su enseñanza, sea ésta explícita o implícita, tiene importancia para el proceso de enseñanza-aprendizaje que desarrolla con sus estudiantes.
- Que la enseñanza de la matemática en la educación secundaria debe contribuir a formar el costarricense ideal plasmado en los fines de la educación costarricense.

En lo personal pienso que la enseñanza de la matemática debe contribuir a educar al estudiante, esto es, permitir por una parte, desarrollar sus potencialidades y por otra, ayudarle a integrarse de manera constructiva en la sociedad.

Sin negar la importancia del aprendizaje de ciertos contenidos y la adquisición de algunas habilidades operatorias que pueden serle útiles en su vida, pienso que lo más importante es que, mediante el estudio de la matemática, el estudiante desarrolle su imaginación, su creatividad, su razonamiento, su pensamiento riguroso y la habilidad para plantearse y resolver problemas.

Podemos, creo firmemente en ello, lograr hábitos de orden, de precisión y un pensamiento metódico mediante la enseñanza de la matemática.

Mi "para qué" personal sobre la enseñanza de la matemática en la educación secundaria está relacionado con la formación de un ser humano, buen ciudadano, buen padre de familia y responsable. Creo que enseñando matemática podemos contribuir a lograrlo.

Bibliografía

[1] Abarca, Sonia. *El aprendizaje y el conocimiento en el estudiante universitario*. Departamento de Publicaciones del Instituto Tecnológico de Costa Rica, 1990.

[2] Barker, S. *Filosofía de las matemáticas*. Editorial UTHEA. México, 1965.

[3] Castelnuovo, Emma. *Didáctica de la matemática moderna*. Trillas. México, 1963.

[4] Castillo, T.; Espeleta, V. *La Matemática: su enseñanza y aprendizaje*. Antología. Editorial Euned, San José, C.R, s.f.

[5] Castillo, T.; Espeleta, V. *Planeamiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática*. Antología. Editorial Euned. San José, C.R., s.f.

[6] Doryan, Eduardo. *Informe de labores de 1997-98*. Ministerio de Educación Pública, 1998.

[7] Gabba, P.; Dalmasso, J. *Matemática Moderna. Algebra*. Editorial Matemática Nueva. Buenos Aires, 1966.

[8] González, F. *Educación costarricense*. Antología. Editorial Euned, San José, C. R., 1986.

[9] Hitt, Fernando. *Investigaciones en Matemática Educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1996.

[10] Horgan, John. "La muerte de la demostración". *Revista Investigación Científica*, 1997.

[11] Medaura, Julia O. *Una didáctica para un profesor diferente*. Editorial Humanitas. Buenos Aires, 1990.

[12] Ministerio de Educación Pública. *Programa de matemática de III ciclo*. 1979.

[13] Ministerio de Educación Pública. *Programa de matemática Tercer Ciclo*, 1995.

[14] Morales, Leonel et al. "Enfoques, técnicas y métodos en la enseñanza de la matemática: una breve descripción y análisis". *Revista Universidad del Valle de Guatemala*, 1998.

[15] Piaget et al. *La enseñanza de las matemáticas*. Editorial Aguilar. Madrid, 1971.

[16] Polya, George. *Cómo plantear y resolver problemas*. Decimoquinta reimpresión. Trillas. México, 1989.

[17] Santos, Trigo; Luz, Manuel. *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamerica. México, 1996.

[18] Toranzos, F. *Enseñanza de la matemática*. Editorial Kapelusz. Buenos Aires, 1963.

[19] Zubieta, Francisco. *La moderna enseñanza dinámica de las matemáticas*. Editorial Trillas. México, 1975.

IMPRESO EN EL TALLER DE PUBLICACIONES ITCR