CIEMAC

Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora

TEC Tecnológico de Costa Rica

MEMORIAS

II Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora

Cartago, Costa Rica

2001

Instituto Tecnológico de Costa Rica. Escuela de Matemática. Teléfono: (506) 2550 2225

www.tec.ac.cr/congresociemac

PONENCIAS

Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales

Juan Félix Avila Herrera [1]

Resumen

El propósito de este trabajo es mostrar cómo se puede usar Mathematica para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales.

Particularmente en los métodos de Runge–Kutta se presentan algunos resultados interesantes que evidencian que el uso de paquetes de software como Mathematica permiten obtener conclusiones virtualmente inalcanzables cuando simplemente se emplea una calculadora convencional.

1 Notas introductorias

Una ecuación diferencial es una ecuación en la que se busca determinar una función sujeta a una relación entre la función y sus derivadas. Si la función en cuestión es de una sola variable, la ecuación se denomina diferencial ordinaria (EDO). Si por el contrario la función es en varias variables, la ecuación se llama en diferencial en derivadas parciales (EDP). El orden de la ecuación diferencial es orden de la derivada más alta que exhiba la ecuación.

Un ejemplo de EDO de orden uno es por ejemplo $y' = y$. En este problema se busca determinar una función $y = y(t)$ tal que coincida con su derivada. Después de pensarlo un momento, nos damos cuenta que $y = e^t$ cumple característica. Pero, ¿hay más soluciones? Sí. Las funciones $y = 2e^t$, $y = -10e^t$, $\cdots$, $y = ke^t$ con $k \in I\!R$, satisfacen la relación $y' = y$. De esta forma tenemos que para el problema propuesto en realidad se obtiene una familia de funciones y no una única función.

Una función y se dice solución de una ecuación diferencial si una vez que se sustituye en la ecuación junto con sus derivadas, la ecuación se reduce a una identidad. Además, y se dice solución general si posee tantas constantes arbitrarias como el

[1] Escuela de Informática, Universidad Nacional. E-mail: javila@una.ac.cr

orden de la ecuación diferencial. Por ejemplo, $y = ke^t$ es una solución general de $y' = y$. Una función y se dice una solución particular si puede obtenerse de la general escogiendo apropiadamente la constantes arbitrarias. Por ejemplo, $y = \pi e^t$ es una solución particular dado que puede obtenerse de $y = ke^t$ con $k = \pi$. Los problemas de ecuaciones diferenciales normalmente vienen aparejadas con condiciones sobre la función buscada o sobre sus derivadas que permiten hallar o determinar las constantes arbitrarias.

2 Resolución numérica de una EDO

Hay muchos métodos para resolver EDO y se aplican dependiendo de la características especiales que tenga la ecuación. Desafortunadamente existen muchos casos en los que los métodos que tradicionalmente se estudian en los cursos, resultan insuficientes. La ventaja de un abordaje numérico es que normalmente es útil en un rango más variados de casos.

Consideremos el problema

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha.$$

Los métodos numéricos en general se ocupan de brindar una sucesión (w_i) que aproxima $y = y(t)$ para ciertos valores de t. Supongamos que dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, y tomemos $h = (b - a)/n$. Si definimos $t_i = a + ih$, la recurrencia $w = (w_i)$ debe permitir aproximar $y(t_i)$. Por supuesto definimos $w_0 = y(a) = \alpha$.

Con esta recurrencia es posible construir una tabla como la siguiente:

t_i	t_0	t_1	t_2	$\cdots$	t_n
w_i	w_0	w_1	w_2	$\cdots$	w_n

Se tiene entonces que $y(a) = w_0$, $y(a + h) \approx w_1$, $y(a + 2h) \approx w_2$, $\cdots$, $y(a + nh) = w_n$. Usando la tabla anterior es posible hallar un polinomio de Lagrange $P(t)$ dado por

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} L_k(t) \cdot w_k, \text{ con } L_k(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(t - t_i)}{t_k - t_i}$$

De esta forma, para $a \leq t \leq b$, $y(t) \approx P(t)$.

Existen muchos métodos para hallar distintas sucesiones $w = (w_i)$, citemos por ejemplo el método de Euler, el de Taylor, los de Runge-Kutta, los del tipo multipaso de Adams-Bashforth y Adams-Moulton, etc. Los métodos de Runge-Kutta destacan porque se pueden programar con reltativa facilidad y típicamente generan “buenos” resultados.

Aplicando los métodos descritos antes y algunas simplicaciones en Mathematica se obtiene [2]

1. Método del punto medio
$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{hf(t_i, w_i)}{2}\right) \end{aligned}$$

2. (Euler Modificado)
$$\begin{aligned} &w_0 = \alpha \\ &w_{i+1} = w_i + h/2 \cdot [f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i))] \end{aligned}$$

3. (Heun)
$$\begin{aligned} &w_0 = \alpha \\ &w_{i+1} = w_i + \tfrac{h}{4}\left[f(t_i, w_i) + 3f\left(t_i + 2h/3, w_i + 2h/3 \cdot f(t_i, w_i)\right)\right] \end{aligned}$$

4. (Runge-Kutta de orden 4 o RK-4)
$$\begin{aligned} &w_0 = \alpha \\ &k_1 = hf(t_i, w_i) \\ &k_2 = hf\left(t_i + h/2, w_i + k_1/2\right) \\ &k_3 = hf\left(t_i + h/2, w_i + k_2/2\right) \\ &k_4 = hf\left(t_{i+1}, w_i + k_3\right) \\ &w_{i+1} = w_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \end{aligned}$$

A continuación se presenta un programa en Mathematica que implementa cada uno de estos métodos. Consideremos el problema
$$y' = y - t^2, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 2, \quad h = 0.2$$

[2] Puede ver la versión completa en el disco adjunto a estas menorias

```
f[t_, y_] := y - t^2
a = 0; b = 1; alpha = 2; h = 0.2;
n =.; sol = Solve[h == (b - a)/n, n];
n = Take[sol, 1][[1]][[1]][[2]];
Print["Resolviendo y' =",   f[t, y] /.  y[t] -> y, ",
    ", a, "<=", t, "<=" , b, ", y(", a, ") = ", alpha,
    ", con h \ = ", h]
Clear[i]; ti = a + i h;
W = FullSimplify[w + h f[ti + h/2, w + h/2 f[ti, w]]];
W  =  Expand[W] /. {w ->  wi};
* "Metodo del punto medio:"
Print["w_{i+1} = ", Rationalize[W]]
FW[i_, w_] = W /. w_i -> w;
For[i := 0; aux := alpha, i <= n - 1, i++,
     aux = FW[i, aux];
    Print["t_", i + 1, " = ", a + (i + 1) h, ", w_", i + 1, " = ",
    N[aux, 10]]]
Clear[i]; ti = a + i h; ti1 = a + (i + 1)h;
W = FullSimplify[w + h/2( f[ti, w] + f[ti1, w + h f[ti, w]])];
```

```
  W = Expand[W] /. {w -> wi};
* "Metodo modificado de Euler:"
  Print["w_{i+1} = ", Rationalize[W]]
  FW[i_, w_] = W /. wi -> w;
  For[i := 0; aux := alpha, i <= n - 1, i++,
    aux = FW[i, aux];
    Print["t_", i + 1, " = ", a + (i + 1) h, ", w_", i + 1, " = ",
    N[aux, 10]]]
  Clear[i]; ti = a + i h;  ti1 = a + (i + 1)h;
  W = FullSimplify[w + h/4(f[ti, w]+3f[ti + 2h/3, w+2h/3 f[ti, w]])]
  W = Expand[W] /. {w -> wi};
* "Metodo de Heun:"
  Print["w_{i+1} = ", Rationalize[W]]
  FW[i_, w_] = W /. wi -> w;
  For[i := 0; aux := alpha, i <= n - 1, i++,
    aux = FW[i, aux];
    Print["t_", i + 1, " = ", a + (i + 1) h, ", w_", i + 1, " = ",
    N[aux, 10]]]
  Clear[i]; ti = a + i h; ti1 = a + (i + 1)h;
```

```
  k1 = Simplify[h f[ti, w]];
  k2 = Simplify[h f[ti + h/2, w + k1/2]];
  k3 = Simplify[h f[ti + h/2, w + k2/2]];
  k4 = Simplify[h f[ti1, w + k3]];
  W = Simplify[w + (k1 + 2k2 + 2k3 + k4)/6];
  W = Expand[W] /. {w -> wi};
* "Metodo de Runge-Kutta de orden 4:"
  Print["w_{i+1} = ", Rationalize[W]]
  FW[i_, w_] = W /. wi -> w;
  For[i := 0; aux := alpha, i <= n - 1, i++,
    aux = FW[i, aux];
    Print["t_", i + 1, " = ", a + (i + 1) h, ", w_", i + 1, " = ",
    N[aux, 10]]]
* "Valores exactos"
  aux = f[t, y] /. {t -> x, y -> y[x]};
  sol = N[DSolve[{y'[x] == aux, y[a] == alpha}, y[x], x]];
  sol[[1]][[1]][[2]];
```

Veamos con
$$y' = y - t^2, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 2, \quad h = 0.2$$
la sucesión (w_i) que se obtiene en cada caso.

1. Aplicando el método de punto medio obtenemos:

$$w_{i+1} = -\frac{11i^2}{1250} - \frac{i}{125} + \frac{61w_i}{50} - \frac{1}{500}$$

y proporciona la siguiente tabla:

t_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
w_i	2	$\frac{1219}{500}$	$\frac{73889}{25000}$	$\frac{4440729}{1250000}$	$\frac{264309469}{62500000}$	$\frac{15576627609}{3125000000}$

2. El método de Euler modificado arroja la recurrencia

$$w_{i+1} = -\frac{11i^2}{1250} - \frac{i}{125} + \frac{61w_i}{50} - \frac{1}{250}$$

junto con la siguiente tabla:

t_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
w_i	2	$\frac{609}{250}$	$\frac{36889}{12500}$	$\frac{2215729}{625000}$	$\frac{131809469}{31250000}$	$\frac{7764127609}{1562500000}$

3. El método de Heun proporciona la siguiente recurrencia

$$w_{i+1} = -\frac{11i^2}{1250} - \frac{i}{125} + \frac{61w_i}{50} - \frac{1}{375}$$

y la siguiente tabla

t_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
w_i	2	$\frac{914}{375}$	$\frac{18463}{6250}$	$\frac{3328229}{937500}$	$\frac{66019823}{15625000}$	$\frac{11670377609}{2343750000}$

4. Finalmente al aplicar Runge-Kutta de orden 4 obtenemos:
   (a) $k_1 = 0.2w_i - 0.008i^2$
   (b) $k_2 = -0.0088i^2 - 0.08i + 0.22w_i - 0.002$
   (c) $k_3 = -0.00888i^2 - 0.0088i + 0.222w_i - 0.0022$
   (d) $k_4 = -0.009776i^2 - 0.01776i + 0.2444w_i - 0.00844$

   de donde obtenemos
   $$w_{i+1} = -\frac{1107i^2}{125000} - \frac{107i}{12500} + \frac{6107w_i}{5000} - \frac{421}{150000}$$
   En este caso la tabla resultante es

t_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
w_i	2	$\frac{365999}{150000}$	$\frac{2219988893}{750000000}$	$\frac{4449969056517}{1250000000000}$	$\frac{79499308084447957}{18750000000000000}$	$\frac{4687451494717236733399}{937500000000000000000}$

La solución exacta de esta ecuación original es $y = 2 + 2t + t^2$. Usando las tablas anteriores podemos calcular un polinomio de Lagrange. Veamos

1. Punto medio: $P(t) = 2 + 1.99096\,t + 0.995515\,t^2 - 0.00152198\,t^3 - 0.000310567\,t^4 - 0.000122008\,t^5$. En la Fig. 1(a) se muestra la gráfica de la solución exacta y el polinomio de Lagrange en el caso del método del punto medio.

centerwmf12.38cm4.34cmC:/ArtNum/Grafico1.wmf

Figure 1: (a) Punto Medio (b) Euler Modificado

2. Euler modificado:
   $$P(t) = 2 + 1.98192\,t + 0.99103\,t^2 - 0.00304396\,t^3 - 0.000621133\,t^4 - 0.000244017\,t^5$$
   En la Fig. 1(b) se muestra la gráfica de la solución exacta y el polinomio de Lagrange en el caso del método de Euler Modificado.

3. Heun: $P(t) = 2 + 1.98795\,t + 0.99402\,t^2 - 0.0020293\,t^3 - 0.000414089\,t^4 - 0.000162678\,t^5$. En la Fig. 2(a) se muestra la gráfica de la solución exacta y el polinomio de Lagrange en el caso del método de Heun.

centerwmf12.46cm4.08cmC:/ArtNum/Grafico2.wmf

Figure 2: (a) Método de Heun (b) Método RK-4

4. Runge-Kutta de orden 4: $P(t) = 2 + 1.99997\,t + 0.999985\,t^2$ $-5.1311\,10^{-6}\,t^3 - 1.04984\,\times 10^{-6}\,t^4 - 4.17146\,\times 10^{-7}\,t^5$. En la Fig. 2(b) se muestra la gráfica de la solución exacta y el polinomio de Lagrange en el caso del método de Runge–Kutta de orden 4.

El sencillo ejemplo resuelto anteriormente evidencia que el método Runge-Kutta de orden 4 es el que arroja los "mejores" resultados. Sin embargo, es el que demanda más tiempo y esfuerzo.

Una pregunta interesante es determinar si puede obtenerse la recurrencia para RK-4 a partir de las ya obtenidas para los otros tres métodos. Más específicamente, ¿para qué funciones $f = f(t, y)$ es posible construir la recurrencia de RK-4 usando los otros tres métodos?

El lector observador notará que existe cierta relación entre las recurrencias obtenidas por cada uno de los métodos aplicados al ejemplo anterior. Consideremos el caso más general

$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad n \quad \text{dado}$$

Designemos con $W1$ el lado derecho en el método de punto medio, a saber

$$W1 = w_i + hf(t_i + h/2, w_i + h/2 \cdot f(t_i, w_i)),$$

con $W2$ el lado derecho en el método Euler Modificado, a saber

$$W2 = w_i + h/2 \cdot \left[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i))\right],$$

con $W3$ el lado derecho en el método Heun, a saber

$$W3 = w_i + \frac{h}{4}\left[f(t_i, w_i) + 3f\left(t_i + 2h/3, w_i + 2h/3 \cdot f(t_i, w_i)\right)\right]$$

y con $W4$ el lado derecho en el método Runge-Kutta de orden 4, a saber

$$W4 = w_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

La pregunta es ¿Que relación hay entre estos W's?

Consideremos primero el caso sencillo $f(t, y) = Dt + Ey + F$. En este caso es fácil verificar que $W1 = W2 = W3$, además

$$W4 - W1 = \frac{E\,h^3\,(4 + E\,h)\,\left(D + a\,D\,E + F\,E + D\,E\,h\,i + E^2\,w_i\right)}{24}$$

en donde

$$W1 = a\,D\,h + F\,h + \frac{D\,h^2}{2} + \frac{a\,D\,E\,h^2}{2} + \frac{E\,F\,h^2}{2} + D\,h^2\,i + \frac{D\,E\,h^3\,i}{2} + w_i + E\,h\,w_i + \frac{E^2\,h^2\,w_i}{2}$$

Consideremos ahora un caso más complicado,

$$f(t, y) = At^2 + Bty + Cy^2 + Dt + Ey + F,$$

No es difícil (usando Mathematica) darse cuenta de que

$$\frac{W3 - W1}{W2 - W1} = \frac{1}{3}$$

Concluimos de esta forma que en este caso ninguno de los W's coinciden, sin embargo se ha demostrado que para el caso $f(t, y) = At^2 + Bty + Cy^2 + Dt + Ey + F$ se tiene:

$$3W3 - W2 - 2W1 = 0$$

Se propone este resultado como un teorema novedoso. En resumen se puede asegurar que una vez que se ha calculado la recurrencia para el punto medio y para Euler modificado, la fórmula para Heun puede ser deducida a partir de estas, o mas generalmente, una vez hecho el cálculo para dos de estos métodos, el tercero se puede obtener mediante la fórmula propuesta.

Veamos con el ejemplo numérico dado previamente si este resultado se satisface o no. Escojamos arbitrariamente la tercera interación. En este caso:

$$W1 = \frac{4440729}{1250000}, \quad W2 = \frac{2215729}{625000}, \quad W3 = \frac{3328229}{937500}$$

De esta forma

$$3W3 - W2 - 2W1 = 0$$

3 Conclusiones y recomendaciones

El uso de herramientas de software para hacer matemáticas es hoy día un elemento decisivo en la búsqueda de nuevos resultados matemáticos. Paquetes como MATHEMATICA son un verdadero laboratorio en el que se puede investigar. El resultado propuesto (por la cantidad de cálculos tediosos que involucra) no podría haberse obtenido sin MATHEMATICA (al menos por este autor).

Dejo propuesto el reto de determinar una relación como la propuesta para funciones más generales que la presentada en este trabajo. Además sería interesante saber si existirá una relación que permite calcular la recurrencia de Runge-Kutta de orden 4 a partir de los otros 3 métodos.

Bibliografía

[1] **Apostol, Tom**, CALCULUS, Editorial Reverté 5. A. España, 1973

[2] **R. L. Burden, J. D. Faires**, ANÁLISIS NUMÉRICO, Thompson, Méjico, 1998

[3] **Chapra, Steven C.**, MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INGENIERÍA McGraw-Hill.

[4] **Curtís, Gerald**, ANÁLISIS NUMÉRICO Editorial Iberoamérica.

[5] **Demidovich, B. P.**, CÁLCULO NUMÉRICO FUNDAMENTAL Paraninfo, Madrid, 1977

[6] **Nakamura, Shoichiro**, MÉTODOS NUMÉRICOS CON SOFTWARE, Editorial Prentice-Hall, Méjico, 1992.

[7] **Scheid, Francis**, ANÁLISIS NUMÉRICO McGraw-Hill

[8] **Smith, W. Alen** , ANÁLISIS NUMÉRICO. Prentice-Hall Hispanoaméricana. 5. A., Méjico, 1988

[9] **S. Wolfram**, *Mathematica, Third Edition*, Cambridge University Press, USA, 1996.

Bachillerato en Línea

Bach. Alexander Borbón Alpízar[1]

Resumen

Bachillerato en Línea *es una sitio en Internet donde los y las aspirantes a obtener el título de Bachiller en Enseñanza Media pueden ingresar para realizar exámenes y prácticas sobre el examen de bachillerato, las preguntas de estas prácticas son tomadas de exámenes que se aplicaron anteriormente en dicho examen.*

1. Introducción

Costa Rica es un país en donde la educación cumple un objetivo primordial para su crecimiento y por ello se le da mucha importancia, ya se han logrado grandes cosas, éste es uno de los países con menor índice de analfabetismo a nivel mundial (menos de un 5%), tiene exámenes que se aplican en todo su territorio para llevar un control estricto y así lograr un estándar sobre el temario que se debe enseñar y la calidad con que se da (uno de estos exámenes se aplica al finalizar la escuela y otro al terminar la secundaria, éste es el de bachillerato) y muchos estudiantes logran terminar su carrera profesional en una Universidad.

Además, se ha aumentado el interés en la utilización de nueva tecnología, para promover esto, nuestro gobierno está realizando algunos proyectos donde se pretende lograr que en todas las escuelas y colegios se construya un laboratorio de microcomputadoras, se espera que pronto todos nuestros estudiantes tendrán contacto desde temprana edad con computadoras y que estas se utilicen eficientemente en la enseñanza de todas las materias.

En Costa Rica también se está promoviendo el uso de Internet, cada día son más las personas que tiene acceso, ya sea desde sus hogares, lugares de estudios o desde sus trabajos, a esta gran red mundial, esto nos permite pensar que pronto el uso de Internet pasará de ser de algunos pocos a ser de uso habitual entre nuestros habitantes.

1.1. El Examen de Bachillerato

El Examen de Bachillerato se creó para obligar a unificar el temario de secundaria en todos los colegios, además es una herramienta para verificar la calidad de la educación y el buen desempeño de las y los estudiantes.

Este examen representa todo un reto para las alumnas y los alumnos de secundaria que lo deben presentar cada año, siempre se presentan noticias alarmantes sobre el rendimiento académico que se alcanza en esta prueba (especialmente en Matemáticas) y quedan al descubierto todas las limitaciones e inconvenientes que posee, además de los problemas de evaluación que presenta (se dice que es una prueba que evalúa la capacidad memorística y de procedimientos y no evalúa el análisis y la capacidad de raciocinio) [2], [6], [11] y [12].

En los colegios es normal que a los estudiantes se les "entrene" para poder pasar el examen, enseñándoles procedimientos para poder "marcar la respuesta correcta", pero en donde el estudiante no sabe por qué el procedimiento funciona y muchas veces no entiende ni lo que se le está preguntando.

Nosotros, como profesores, debemos tratar de enseñar las bases y los procedimientos básicos para resolver problemas, pero asegurarnos en todo momento que las y los estudiantes entiendan qué se está resolviendo y por qué lo resuelven con dicho procedimiento, a los muchacho se les debe enseñar a razonar y pensar mejor las cosas.

1.2. Internet

[1] Escuela de Matemáticas, ITCR. alexborbon@costarricense.com

Internet comenzó como un proyecto para poder enviar y recibir información entre computadoras, al inicio se pensó en el fin educativo de este proyecto para poder retroalimentar con otros colegas sobre problemas y descubrimientos que se hicieran, por esto Internet empezó en algunas Universidades de los países desarrollados, después de un tiempo se pensó en el gran potencial que podía tener una gran red mundial, así fue como comenzó a crecer uniendo primero varias redes y luego otras hasta que llegó a ser la que ahora conocemos, una red gigantesca a nivel mundial en donde un usuario en Costa Rica puede comunicarse con otro en China y "conversar" en un chat o buscar información sobre algún tema y encontrar trabajos de personas de todo el mundo.

Aunque el objetivo principal de Internet fue el didáctico, ahora se utiliza con diversos fines muy distintos pues lo utilizan para hacer compras, "conversar", enviar y recibir cartas (e-mail), anunciar productos, etc. Como cualquier persona puede escribir en Internet se debe tener mucho cuidado con la información que se obtiene pues muchas veces se puede encontrar información no deseada, incorrecta o alterada.

Aún así, Internet es una poderosísima herramienta que si es bien utilizada y aprovechada al máximo puede ser de gran utilidad para estudiantes, profesoras y profesores, investigadoras e investigadores, etc. que busquen información de utilidad o que quieran estudiar sobre algún tema específico, debemos tratar de rescatar el fin didáctico que fue el propósito primordial de la red y la mejor aplicación que se le puede dar.

2. Bachillerato en Línea

Este proyecto tiene como objetivo principal diseñar e implementar un modelo computarizado en Internet de exámenes de bachillerato con la idea de brindarle al estudiante de secundaria una alternativa de "adiestramiento" para dicha prueba.

Se trata de implementar exámenes automatizados de bachillerato que le permitan al estudiante entrenarse mediante la resolución de simulacros de exámenes, el examen es creado aleatoriamente tomando preguntas de una base de datos conformada por gran cantidad de preguntas, las cuales son tomadas de exámenes de bachillerato anteriores del Ministerio de Educación Pública.

Cada pregunta que esta en la base de datos esta compuesta por cuatro partes: el enunciado correspondiente, una sugerencia para resolver la pregunta, la respuesta correcta y una explicación de cómo llegar a dicha respuesta, esto con el propósito que el estudiante, si lo desea, pueda ver cómo obtener la respuesta correcta. Al finalizar un examen el usuario podrá ver las estadísticas correspondientes y su nota.

Esta aplicación permite la interacción del usuario y se emplean algunas animaciones para su mejor entendimiento, tiene el respaldo del ITCR y se están haciendo gestiones para lograr un aval del Ministerio de Educación.

El proyecto, en su momento, estuvo a cargo de los estudiantes:

Alexander Borbón Alpízar alexborbon@costarricense.com	Adriana González Dobrosky adridobrosky@hotmail.com	Gabriela Mena Rojas gabymena@costarricense.com

El profesor supervisor fue:
MSc. Geovanni Figueroa M.
gfigueroa@itcr.ac.cr

Todos fueron estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora del ITCR, en la actualidad el Bach. Alexander Borbón Alpízar y la Bach. Adriana González Dobrosky son profesores de matemáticas del Instituto Tecnológico de Costa Rica y la Bach. Gabriela Mena Rojas es profesora de matemáticas en el Colegio de Tarrazú.

Alexander Borbón Alpízar es el actual encargado del mantenimiento y de la revisión del sitio

2.1. ¿A quién va dirigido?

Bachillerato en Línea va dirigido inicialmente a estudiantes de secundaria que se estén preparando para realizar el examen de bachillerato en matemáticas. Otros posibles usuarios de la herramienta son los profesores de secundaria que deban preparar a sus estudiantes para dicho examen. No obstante la aplicación está abierta para el público en general.

2.2. Objetivos de la aplicación.

2.2.1. Objetivo general

- ✓ Ofrecer al estudiante la oportunidad de autoevaluarse en un sitio en Internet para la prueba de bachillerato del Ministerio de Educación.

2.2.2 Objetivos específicos

- ✓ Ofrecer una herramienta computacional para la enseñanza de la matemática a nivel de secundaria.
- ✓ Utilizar la tecnología de Internet en los procesos educativos.
- ✓ Brindar tanto al estudiante como a su profesor una posibilidad de evaluar los conocimientos, previo al examen de bachillerato.

2.3 Ventajas de *Bachillerato en Línea*

Bachillerato en Línea no es solo un sitio donde se pueden hacer exámenes de bachillerato viejos y éste le da la nota obtenida, en la base de datos no solo se encuentran las preguntas, sino que cada pregunta cuenta con una sugerencia que se le da al estudiante en caso de no saber como empezar a resolver un ejercicio, y se le brinda además una posible respuesta para cada pregunta (recordemos que en matemáticas los procedimientos no son únicos). Así si al estudiante no le dio la respuesta correcta y cree que lo hizo bien, puede observar la respuesta que se le presenta para compararla y ver en qué se falló.

Además el programa cuenta con algunas animaciones o "applets" donde se realiza una interacción con el estudiante, se le puede pedir que experimente moviendo algún punto de la figura y observando qué sucede con el resto, o de igual forma, se le pide que realice alguna verificación de una respuesta dada.

El estudiante puede realizar la cantidad de exámenes que el desee, además si gusta, puede construir una práctica con la cantidad de preguntas por tema que considere necesarias, así puede reforzar los temas donde crea que pueda tener problemas.

Además, al ser un programa realizado para Internet, se da una cobertura mundial, cualquier persona pueda hacer uso de él, tan solo necesita una computadora con acceso a Internet.

2.3 ¿Cómo usar *Bachillerato en Línea*?

Para acceder a esta herramienta usted requiere una computadora con conexión a Internet e ingresar (en forma gratuita) a la dirección:

www.itcr.ac.cr/revistamate/bachillerato

Primero se le presenta un saludo de bienvenida de parte del Instituto Tecnológico y de la Escuela de Matemáticas, se le da la fecha de la última actualización del sitio y se le dice el número de preguntas con que cuenta la base de datos en ese momento.

Si es la primera vez que visita el sitio debe registrarse en la opción nuevo usuario que se presenta en el menú del lado izquierdo, allí deberá escribir sus datos personales, el nombre y la clave es la que seguirá usando cada vez que quiera acceder al sitio.

Si ya esta registrado antes entonces debe elegir la opción usuario existente en el menú, aquí escribe el nombre y la clave que digitó cuando se registró.

En la pantalla que sigue se le brinda un nuevo saludo y se le da información de cuántas veces ha ingresado al sitio y cuándo fue la última vez. Al final se encuentra un link para acceder a las opciones, debe hacer clic en este link.

En las opciones puede elegir entre hacer un examen clásico de bachillerato (aunque un examen clásico tiene 60 preguntas, nosotros solo mostramos 40 pues consideramos que es muy cansado pasar mucho tiempo en frente de un monito resolviendo preguntas), o una práctica con el número de preguntas por tema que decida.

Si se escoge el examen clásico, se debe responder cada pregunta marcando en el circulito que aparece a la par de cada posible respuesta, al terminar de resolver el examen se hace clic en el botón de revisar. Si se tiene alguna duda con una pregunta se puede marcar el cuadrito que está a la par de la pregunta, éste nos recordará las preguntas donde tuvimos dudas.

Si lo que quiere escoger es realizar una práctica, debe escoger la cantidad de preguntas que quiere de cada tema, este número no puede exceder el máximo que se da para cada tema, la computadora construye la práctica, una diferencia de gran importancia que tiene la práctica con respecto del examen es que para cada pregunta se presenta una sugerencia, si no sabe como resolver la pregunta, la sugerencia le puede dar una idea para comenzar o recordarle alguna definición que se haya olvidado. Cuando termine de marcar todas las respuestas que considere correctas, haga clic en el botón de revisar.

Cuando se revisa la práctica o el examen se presenta un estudio por pregunta, por temas y en general del examen. Primero se presenta pregunta a pregunta la respuesta que el estudiante marcó, cuál era la correcta, en cuáles se tuvo duda y se da la opción de ver una posible solución a cada pregunta. Luego se presenta un estudio por temas, donde se da la cantidad de preguntas que se hicieron de cada tema y el porcentaje que el estudiante contestó correctamente, éste estudio le permite al estudiante saber en qué temas está fallando y debe ponerle mayor atención. Por último se le da el total de preguntas que se le hicieron, las que tuvo buenas y la calificación obtenida en el examen.

Al final se da la opción de realizar otro examen.

Las otras opciones que aparecen en el menú son por si el usuario quiere saber información sobre el programa, se le presenta ayuda sobre cómo usar **Bachillerato en Línea** y se le da la opción de enviarnos comentarios o sugerencias.

3. Conclusión

Internet es una poderosa herramienta que, si se utiliza de forma adecuada, puede ser muy útil para los intereses de la educación, allí se puede encontrar información sobre cualquier tema, hay sitios especializados en la recopilación de datos, otros funcionan como tutores para la enseñanza de algunas materias y algunas sirven para el "entrenamiento" del estudiante hacia algún fin específico (Bachillerato en línea entre estos).

Se debe buscar la manera de incorporar la nueva tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje pues puede agregar elementos nuevos e innovadores y así lograr que mejore la misma, sin embargo no debemos caer en el pensamiento ó la creencia que todo se debe hacer con lo último en la tecnología, pues si algo se hace bien sin ayuda de ella ó si un profesor no se siente bien usándola, entonces lo mejor es prescindir de ella.

Bachillerato en línea es un sitio que puede ser utilizado por los colegios del país para que sus alumnos y alumnas estudien y se preparen para el examen, en el sitio pueden evaluar sus conocimientos y ver los temas en que están mal preparados y ponerle mayor énfasis a ellos en las prácticas.

El sitio se encuentra aún en construcción, en este momento se le da mantenimiento, se le está aumentando la base de datos y se le revisan algunos detalles para afinarlo más y así pueda ser de utilidad para una gran cantidad de jóvenes que lo necesitan.

Le agradecemos a las personas que ingresan al sitio y lo prueban, a los que no lo conocen, los instamos a ingresar, utilizarlo y que nos den sus comentarios, de esta forma estaremos haciéndole constantes mejoras y esto nos alienta a seguir adelante con nuestro trabajo, esperamos que el sitio le sirva a muchos estudiantes para superar su examen de bachillerato y continuar con sus estudios superiores sin contratiempos.

Para mayor información, puede comunicarse a la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago al teléfono (506) 550-2225

4. Bibliografía

[1] Alvaro, R; Gamba, S. (1987). "*La aplicación del software educativo*", *Informática educativa*, 2(1): 12-13

[2] Barahona, Hazel. "*Materia problema*", La Nación, San José, 5 de Junio de 1999.

[3] Becerril, Francisco. "*Java a su alcance*", Mc Graw – Hill; México: 1998

[4] Bobadilla, J; Alcocer, A. "*Creación de aplicaciones Web en Windows NT Active Server Pages*", Alfaomege; México: 1999

[5] Bork, A. (1987)."*Aprendizaje interactivo*" , Informática educativa, 2(1): 5-9.

[6] Calvo, N. (1997). "*Bajo promedio en las pruebas de bachillerato*", Al Día, San José, miércoles 12 de noviembre.

[7] Dwyer, T. (1995). "*Estrategias heurísticas para enriquecer la educación mediante el uso del computador*", *Informática educativa*, 3(2): 129-139

[8] Galvis, P.A. (1988). "*Ambientes de enseñanza-aprendizaje enriquecidos con computadora*". Informática educativa, 1(2): 117-139

[9] Franke, M. (1996), "*Visual Basic 4.0: Manual de Aprendizaje*", Alfaomega grupo editor, México.

[10] Lemay, L; Perkins, C.. "*Aprendiendo Java 1.1 en 21 días*". Prentice-Hall, Hispanoamérica S.A. Segunda Edición; México, 1998.

[11] Solano, M. (1997). "*Matemática salió en rojo*", La nación, San José, Costa Rica, martes 25 de noviembre.

[12] Solano, M. (1997). "*Bajo rendimiento en pruebas*", La nación, San José, Costa Rica, jueves 27 de noviembre.

[13] Tiznado, Marco. "*El camino fácil a Access 7.0*". McGraw-Hill, Colombia, 1996.

[14] Perry, Greg. "*Aprendiendo Visual Basic en 5.0 en 24 horas*". Prentice-Hall; México, 1997.

Las Calculadoras y el Pensamiento Deductivo

Norma Noguera, Ph. D.

California State University, Long Beach
Long Beach, California 90840
nnoguera@csulb.edu

Las Calculadoras y el Pensamiento Deductivo

Introducción

Este creciente fracaso que los estudiantes de la escuela media y de secundaria están experimentando en los cursos de matemática, así como el impresionante desarrollo tecnológico de los últimos años han promovido un elevado interés tanto de la sociedad así como de la comunidad educativa en general acerca de la importancia de integrar la tecnología y la enseñanza de la matemática, en los primeros años de la escuela secundaria.

Para lograr un cambio en el currículo de la enseñanza de la matemática es necesaria la creacion de ambientes de aprendizaje que incluyan el uso tecnologías tales como computadoras con el adecuado software y calculadoras con capacidades mayores que las de construir graficos. Ademas es importante considerar un cambio radical en la preparación de los futuros profesores de matemática para que reciban la preparación adecuada para poder implementar en una forma apropiada el uso de estas tecnologías en sus clases con sus futuros estudiantes. Debemos recordar que investigaciones al respecto confirman que los profesores tienden a enseñar en la misma forma en que aprendieron. Otro factor importante es el desarrollo e implementacion de cursos de entrenamiento que incluyan la integración de la tecnología y la matemática para los profesores en servicio De esta manera estos profesores contarian con un medio de actualizar su conocimiento de la materia, y esto tal vez los ayudaria a cambiar sus actitudes hacia la utilizacion de tecnología en el aula.

Objetivo:

El objetivo este estudio es presentar una descripción qualitativa de los resultados obtenidos en una investigación que se realizó con un grupo de estudiantes de 10 año de secundaria (15/16 años). En este estudio se usó la calculadora TI-92 como una herramienta para facilitar el aprendizaje del álgebra.

El objetivo principal de la investigación era observar los (cambios si existían) en el pensamiento lógico deductivo de los estudiantes, así como observar los cambios en sus actitudes y su disposición hacia la matemática cuando usaban la calculadora TI-92 como herramienta para facilitar el aprendizaje.

Poblacion

Se contó con una población de 28 estudiantes matriculados en dos cursos de algebra, que iban a empezar el 10 año y que se encontraban participando en un programa académico de verano en una universidad en el sur de los Estados Unidos. Este programa esta diseñado para ayudar a estos estudiantes a prepararse mejor académicamente para poder ser admitidos en diferentes universidades en los Estados Unidos. Los estudiantes provenían de zonas rurales, eran de escasos recursos económicos y sus padres contaban con escasa educación (ninguno de ellos había terminado la escuela secundaria).

De éstos 28 estudiantes se escogieron seis tomando en cuenta los resultados obtenidos en un examen diagnóstico de actitud hacia la matemática, que se les aplicó a los 28 estudiantes (Ver apendice 1). Los estudiantes escogidos de esta manera fueron mujeres con muy poca experiencia en el uso de cualquir tipo de calculadoras.

Resultados

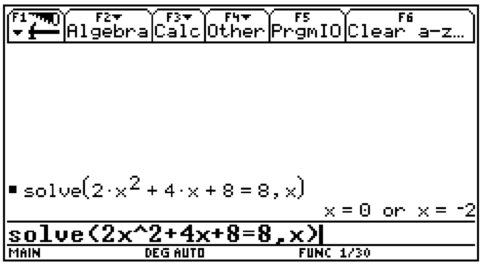
Todos los lunes y los miércoles durante seis semanas desde las 5:30 p.m. hasta las 8:30 p.m. los estudiantes se reunieron con el profesor investigador el cual usó las primeras sesiones para enseñarlos a usar la calculadora y para reforzar y profundizar los conceptos adquiridos en la clase regular de Algebra. Al mismo tiempo era importante motivar a los estudiantes a ser creativos a la hora de encontrar las soluciones a los problemas. Ademas se les pedia que escribieran los procesos que habian seguido a la hora de resolver el problema.

Durante la primera semana los estudiantes mostraron una actitud muy negativa la cual. se mantuvo hasta la mitad de la segunda semana. Ellos escuchaban las explicaciones del profesor investigador acerca de cómo usar la calculadora, pero no mostraban ningún entusiasmo, interés ni deseo de comunicarse entre ellos ni con el profesor investigador. Se veían inseguros, la calculadora los intimidaba un poco y tenían temor de hacer preguntas. Sin embargo siempre se presentaron a las sesiones y ninguno manifestó deseo de salirse del grupo, a pesar de que ellos sabían que su participación era voluntaria. El profesor investigador realizo muchos intentos durante la primera semana para tratar de motivar a los estudiantes sin lograrlo, sin embargo el miércoles de la segunda semana uno de ellos se atrevió por primera vez a hacer una pregunta, a partir de aquel momento la situación cambió considerablemente, los otros estudiantes empezaron a hacer preguntas y todos empezaron a trabajar como un solo grupo. Se hacían preguntas entre ellos y cada uno aportaba algo a la hora de encontrar las soluciones. Comparaban las respuestas y hacían exploraciones para verificar sus resultados. Ellos mismos construían ejemplos parecidos para facilitar el aprendizaje. El usar la calculadora les permitía hacer los cálculos y los gráficos en minutos evitando así que se sintieran cansados y frustrados cuando cometían un error y tenían que volver a empezar.

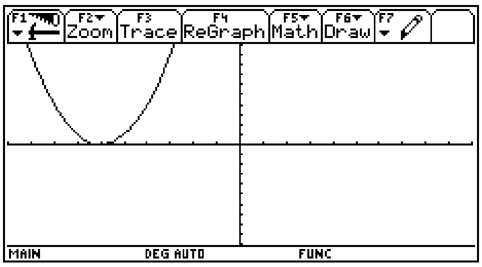
Los siguientes son algunos de los ejemplos que los estudiantes resolvieron:

1) Resuelva la siguiente ecuación $3x + 6 = 12$. Que sucede con el valor “x” si el coeficiente de x es:
   a) Sustituido por su inverso
   b) Dividido por 2
   c) Multiplicado por 3

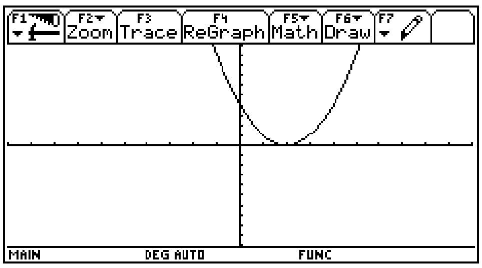
2) Resuelva la ecuación $2x^2 – 4x + 3 = 0$.



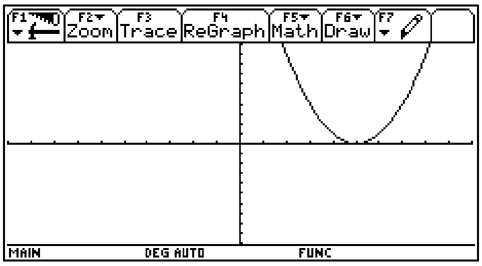
3) Construya el gráfico de
   a) $Y_1 = (x + 6)^2$



   b) $Y_3 = (x - 2)^2$



c) $Y_1 = (x-5)^2$

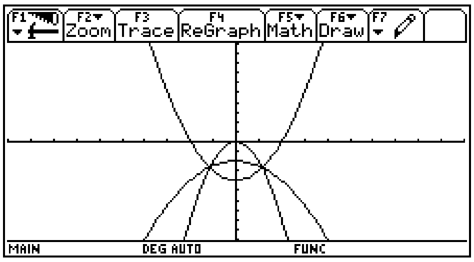


4) Asocie cada función con su gráfico.

a) $f(x) = x^2 - 4$

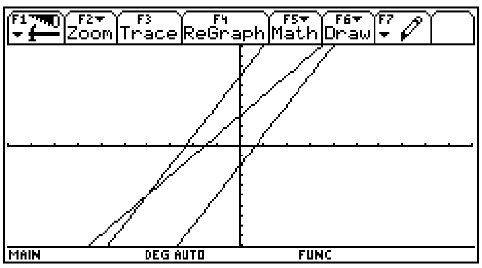
b) $f(x) = -2x^2$

c) $f(x) = (-\frac{1}{2})x^2 - 2$



5) Asocie cada función con su gráfico.

1. $y = 3x - 2$
2. $y = 2x + 3$
3. $y = 3x + 7$



6) Encuentre todos los valores reales de x que satisfacen

$$(2x^2 + 8x + 5)^{(x^2 - 9x + 20)} = 1.$$

Conclusión

La primera semana fue difícil para los estudiantes ya que además de aprender a usar la calculadora tenían que vencer su temor hacia la matemática. Ellos no se mostraban interesados en aprender pero sin embargo no renunciaron a ser parte de la investigación. Cuando se les hacían preguntas respondían diciendo que no sabían. Esta semana fue frustrante y bastante difícil para todos. A mediados de la segunda semana los estudiantes empezaron a cambiar su actitud y empezaron a comunicarse entre ellos. Se hacían preguntas y expresaban lo que no entendían. Al final de las seis semanas fue notorio el cambio que los estudiantes experimentaron especialmente en su forma de razonar al resolver un problema, así como en sus actitudes hacia la matemática. Su confianza y determinación a la hora de resolver un problema fueron evidentes. Usaban diferentes estrategias a la hora de resolver los problemas y su capacidad de deducción fue en aumento. Al final de las seis semanas los estudiantes hicieron una presentación acerca de lo que habían aprendido con la calculadora a toda la clase junto con los profesores directores del programa. Ellos se mostraron muy seguros y demostraron su conocimiento en una forma profesional. Al final de la presentación le manifestaron a las personas presentes que nunca habían soñado con hacer una presentación de matemática al frente de la clase.

APENDICE # 1

Actitudes Acerca del Aprendizaje del Algebra

Sexo

( ) Femenino ( ) Masculino Nombre: ______________________

Edad

( ) 12-14 años ( ) 15-17 años ( )Mas de 17 años

1. La matematica me hace sentir enojado.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

2. Usualmente me siento feliz cuando resuelvo problemas en matematicas.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

3. Yo uso razonamiento logico cuando resuelvo problemas en matematica.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

4. Me siento decepcionado cuando no puedo resolver un problema. Me siento perdido en un mundo de palabras y numeros.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

5. Evito tomar cursos de matematicas porque no soy muy bueno con los numeros .

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

6. Creo que la clase de matematica es muy interesante. .

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

7. Mi mente se pone en blanco y no puedo pensar claramente cuando trato de resolver problemas en matematica.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

8. Me siento seguro de mi mismo cuando resuelvo problemas en matematica.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

9. Me dan ganas de salir corriendo cuando tengo que resolver un problema en matematica.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

10. Cuando oigo la palabra matematica siento que no me gusta.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

11. Las matematicas me dan miedo.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

12. Pienso que las matematicas son divertidas.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

13. Me encanta todo lo que tiene que ver con numeros.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

14. Me atemoriza tener que resolver un problema matematico.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

15. Generalmente me siento muy calmado cuando tengo que resolver un problema en matematica.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

16. Me siento muy bien en la clase de matematica.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

17. Los examenes de matematica siempre son dificiles.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

18. Siempre trato de resolver problemas usando mi conocimiento matematico aunque este fuera del aula.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

19. Tratar de resolver un problema en la clase de matematica me pone muy nervioso.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

20. Siempre me ha gustado la clase de matematica.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

21. Prefiero hacer cualquier otra cosa que tomar una clase de matematica.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

22. La matematica siempre ha sido facil para mi.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

23. Las clases de matematica no me gustan.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

24. Me siento capaz de resolver cualquier problema que se presente en mi clase de matematica .

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

25. Siento que el tiempo pasa muy despacio en mi clase de matematica.

Totalmente de acuerdo	de acuerdo	no opino	en desacuerdo	totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

APENDICE # 2

Algunos ejemplos de las preguntas que se le hicieron a los estudiantes durante las entrevistas

1. Como resolvio el problema.
2. Uso La TI-92 para resolver el problema?
3. Le ayudo el usar la TI-92?
4. Se siente bien usando la TI-92?
5. Es dificil usar la TI-92 para resolver el problema?
6. Como cree que es mas facil resolver el problema con la TI-92 o sin ella?
7. Podrias explicar que beneficios hay si se usa la TI-92?
8. Podrias construir otros ejemplos imilares usando la TI-92?
9. Si tuvieras que tomar la decision entre usar o no la TI-92 la usarias?
10. Piensas que es un poco dificil el aprender a usar la TI-92?
11. Que es lo que mas te agrada de la TI-92?
12. Que es lo que mas dificil te parece de usar en la TI-92?

APENDICE # 3

Ejemplos de algunos problemas resueltos por los estudiantes durante las entrevistas

1. Si el reciproco de x + 1 is x - 1, entonces

   x = ____________________

2. Un comerciante pago $30 por un articulo. El desea marcar el articulo de manera que pueda ofrecer un descuento del 10% en el precio marcado y poder ganar un 20% sobre el costo. Cual es el precio que debe ponerle al articulo?

3. Grafique la funcion $f(x) = (1/2)^x$ para valores entre –3 and 3 inclusive.

4. Trabaje con variaciones de las funciones $y = x^2$ y explique que pasa cuando $y = x^2 + 5$; $y = 5x^2$, $y = x^2 - 5$. Compare los graficos

5. Resuelva $75 = 35 + .20x$.

6. La formula, F = 1.8 C+ 32 es usada para convertir grados Celsius a grados Fahrenheit d. Resuelva la formula para C.

7. Resuelva la ecuacion $3x + 6 = 12$.
   - Que pasa con el valor de "x" value si el coeficiente de x es reemplazado con su opuesto?
   - Que pasa con el valor de "x" si el coeficiente de x es multiplicado por 2?
   - Que pasa con el valor de "x" si el coeficiente de x es dividido por 2?
   - Que pasa con el valor de "x" si el coeficiente de x es dividido por 3?

8. Grafique $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$. Encuentre el vertice de la parabola y los puntos de interseccion con el eje x.

9. Grafique $f(x) = -4(x + 5)^2 - 2$. Encuentre el vertice de la parabola y los puntos de interseccion con el eje x.

- Establezca las semejanzas y las diferencias entre las dos parabolas? Compare los graficos y las ecuaciones. Describa si observa algun patron entre ellas.

10. Resuelva $2x^2 -4x - 3 = 0$.
11.
12. A poblacion de 20,000 esta creciendo al 5% cada ano. En cuantos anos la poblacion sera de 53,000?
13. Encuentre la ecuation de la linea que pasa por (3, -2) con pendiente 7.
14. Resuelva $y = mx + b$, para b
15. Resuelva $x^2 + 5x + 3 = 0$
16. Resuelva $x^2 + 1 = 0$
17. Factorize $2x^4 - 12x^3 + 118x^2$
18. Factorize las siguientes expresiones:
    - $6x^2 – 3 x – 3$
    - $16x^4 – b^4$

Referencias

Demana, F. & Waits, B. K. (1990). The role of technology in teaching mathematics. Mathematics Teacher, 82(7), 546-550.

Carter, H. H. (1995). A visual approach to understanding the function concept using graphic calculators (doctoral dissertation, Georgia State University, 1995). Dissertation Abstract International, 56 3869A.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). Professional Standards for Teaching Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

SOLUCION INTERACTIVA DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN MATHEMATICA 4.1

***Alvaro Salas Salas*[*]- *Gonzalo Escobar Lugo*[*]**

Resumen. El propósito de este trabajo consiste en mostrar de qué manera la programación en Mathematica 4.1™ nos permite resolver ecuaciones diferenciales de la forma $f(x, y, y', y'') = 0$ de manera interactiva por medio de botones. Estos botones operan sobre una ecuación diferencial dada y la transforman por medio de ciertas reglas, de manera que el proceso de solución se observa paso a paso. Se ha puesto especial interés en las ecuaciones exactas de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ y en ecuaciones de este tipo que admiten factor integrante. Con estos botones se pretende que el estudiante, antes que realizar cálculos, conceptúe los métodos usados en la solución de las ecuaciones diferenciales descritas.

I.MARCO TEORICO.

Se llama ecuación diferencial a una ecuación que involucra una variable dependiente y sus derivadas, con respecto a una o más variables independientes. Cuando en la ecuación aparecen las derivadas de una función con respecto a una sola variable, se dice que es una ecuación diferencial ordinaria. (EDO). El orden de una EDO es igual a la derivada de más alto orden que aparece en la ecuación. Una EDO de orden n tiene la forma

---

[*] Universidad de Caldas-Manizales-Colombia. Email : matesta@cumanday.ucaldas.edu.co

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

Se llama *solución* de (1) a toda función $y = f(x)$ definida en algún intervalo I, tal que $F(x, f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)) \equiv 0$ para $x \in I$.

Representan interés particular aquellas EDO que son solubles con respecto a la derivada de más alto orden. Estas EDO tienen la forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

1.1. *Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.*

Las EDO de primer orden del tipo (2) son de la forma

$$y' = f(x, y) \tag{3}$$

Sea $y = \varphi(x)$ una solución de (3) para $\alpha \le x \le \beta$. Entonces $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$. Si en la ecuación (3) $f(x, y) \equiv 0$, entonces cualquier función constante $y = c$ es solución de la ecuación, así que reviste interés el caso en que $f(x, y) \not\equiv 0$.

Las EDO de primer orden se clasifican en dos : lineales y no lineales. Una EDO (3) es *lineal* si ella se puede escribir en la forma $y' + f(x)y = g(x)$. Las demás se llamarán *no lineales*.

Frecuentemente es conveniente escribir la ecuación (3) en la forma

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{4}$$

Siempre es posible hacer esto poniendo $M(x, y) = -f(x, y)$ y $N(x, y) = 1$.

En otras ocasiones se escribe la ecuación (3) en la forma equivalente

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{5}$$

llamada ecuación en diferenciales totales.

---

[*] Universidad Antonio Nariño-Santafé de Bogotá-Colombia

Recíprocamente, si en la ecuación (4) o (5) se tiene que $N(x,y) \not\equiv 0$, entonces ésta se puede escribir en la forma (3) con $f(x,y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$.

En uno u otro caso se recurre a la representación más conveniente.

Se presentan casos especiales en que la ecuación (3) (o la ecuación (5)) se puede resolver en forma cerrada (por cuadraturas).

1.1.1. ***Ecuaciones separables***. La ecuación (3) es una ecuación en variables separables si $f(x,y)$ se puede escribir en la forma $f(x,y) = g(x)h(y)$, En este caso, (3) equivale a $\dfrac{dy}{dx} = g(x)h(y)$, o bien, $\dfrac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$. En esta ecuación las variables aparecen separadas, lo cual permite integrar ambos lados de la misma para obtener $\displaystyle\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx + C$.

De igual manera, la ecuación (5) es una ecuación en variables separables si es posible escribir M y N en la forma $M(x,y) = g_1(x)h_1(y)$ y $N(x,y) = g_2(x)h_2(y)$. Si este es el caso, la ecuación (5) se escribe en la forma $\dfrac{h_2(y)}{h_1(y)}dy = -\dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}dx$, en la cual las variables aparecen separadas, lo cual permite integrar ambos miembros y obtener la solución en cuadraturas.

1.1.2. ***Ecuaciones exactas***. Supongamos que la ecuación $\Psi(x,y) = c$ define implícitamente una función diferenciable $y = \varphi(x)$ en algún intervalo. Si derivamos ambos lados de la ecuación $\Psi(x,y) = c$ con respecto a x resulta $\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\Psi}{\partial y}y' = 0$, que se puede escribir en la forma (5) con $M(x,y) = \dfrac{\partial\Psi}{\partial x}$ y $N(x,y) = \dfrac{\partial\Psi}{\partial y}$, de manera que la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tiene por solución la función definida por la ecuación $\Psi(x,y) = c$.

Recíprocamente, supongamos que se da la ecuación diferencial (5). Si existe una función $\Psi = \Psi(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x, y) \tag{6}$$

de modo que la ecuación $\Psi(x, y) = c$ defina implícitamente una función diferenciable $y = \varphi(x)$ en algún intervalo, entonces

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} =$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\Psi(x, \varphi(x)) = \frac{d}{dx}c \equiv 0$$

En este caso, se dice que la ecuación (5) es una *ecuación diferencial exacta*. El siguiente teorema nos proporciona un criterio de exactitud.

Teorema 1. Sean las funciones M , N , $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ continuas en la región rectangular $R : \alpha < x < \beta,\ \ \gamma < y < \delta$. Entonces la ecuación (5) ,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es exacta en R si, y sólo si,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{7}$$

Si la ecuación (5) es exacta, entonces es posible obtener su solución en cuadraturas en la forma $\Psi(x, y) = c$. En efecto, de (6) se sigue que $\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = M(x, y)$, luego si se integra esta ecuación con respecto a x se obtiene :

$$\Psi(x, y) = \int M(x, y)dx + h(y) \tag{8}$$

La función h es una función arbitraria de y que hace las veces de la constante arbitraria. Además, siempre es posible escoger h de modo que $\dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x,y)$. En efecto,

Derivando ambos lados de (8) con respecto a y resulta :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + h'(y) = \int \frac{\partial M}{\partial y}dx + h'(y) \qquad (9)$$

Pero, de (6), $\dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = N(x,y)$, luego si se sustituye esta expresión en (9), entonces al despejar $h'(y)$ nos queda:

$$h'(y) = N(x,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}dx \qquad (10)$$

Para determinar $h(y)$ de (10) es esencial que, independientemente de su apariencia, el miembro del lado derecho de la ecuación (10) sea sólo función de y, para lo cual basta demostrar que su derivada con respecto a x es idénticamente igual a cero. En efecto, de acuerdo a la ecuación (7),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}dx \right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \equiv 0 .$$

De esta manera, para obtener $h(y)$ se integra la expresión del lado derecho de (10) con respecto a y (sin sumar la constante arbitraria de integración). Al conocer $h(y)$, de la ecuación (10) se obtiene la primera integral de la ecuación (5) en la forma

$$\Psi(x,y) \equiv \int M(x,y)dx + h(y) = c ,$$

siendo c una constante arbitraria.

1.1.3. ***Factores integrantes***.

Cuando la ecuación (5) no es exacta, algunas veces es posible obtener una función $\mu = \mu(x,y)$ tal que si se multiplican ambos lados de la ecuación (5) por esta función, entonces se obtiene una ecuación exacta. Tal función se llama *factor integrante* de la ecuación. La condición de exactitud equivale a encontrar al menos una función $\mu = \mu(x, y)$ que satisfaga la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales :

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu\, M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu\, N).$$

Sin embargo, esta ecuación puede resultar tanto o más difícil de resolver que la ecuación (5). Existen casos especiales que permiten encontrar un factor integrante, los cuales se describen a continuación :

I. La expresión $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ depende solamente de x, digamos, es igual a $f(x)$. Un factor integrante es $\mu = \mu(x) = e^{\int f(x)dx}$. Este es el caso de la ecuación lineal $y' + f(x)y = g(x)$, para la cual $M(x, y) = f(x)y - g(x)$ y $N(x, y) \equiv 1$. Al multiplicar ambos lados de esta ecuación por $\mu = \mu(x) = e^{\int f(x)dx}$ se obtiene una ecuación exacta.

II. La expresión $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$ depende solamente de y, digamos, es igual a $h(y)$. Un factor integrante es $\mu = \mu(y) = e^{\int f(y)dy}$.

III. La expresión $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{xM - yN} \equiv \omega(\xi)$ es una función del producto $\xi = xy$ o de la suma $\xi = x + y$. Un factor integrante es $\mu = \mu(x, y) = e^{\int \omega(\xi)d\xi}$.

IV. Las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas y del mismo grado, es decir, existe n tal que $M(tx, ty) = t^n M(x, y)$ y $N(tx, ty) = t^n N(x, y)$. Un factor integrante es $\mu = \mu(x, y) = \dfrac{1}{xM + yN}$, siempre y cuando $xM + yN \not\equiv 0$.

Cabe anotar que al hacer la sustitución $y = ux$, siendo $u = u(x)$, se obtiene una ecuación en variables separables.

V. Las funciones M y N satisfacen las ecuaciones de Cauchy –Riemann en cierta región del plano xy, de modo que

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Un factor integrante es $\mu = \mu(x, y) = \dfrac{1}{M^2 + N^2}$.

VI. Las funciones M y N se pueden representar en la forma $M = yM_1(\xi)$ y $N = xN_1(\xi)$, en donde $\xi = xy$. En este caso, un factor integrante es $\mu = \mu(x, y) = \dfrac{1}{xM - yN}$, siempre y cuando $xM - yN \not\equiv 0$.

VII. La expresión $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}$ puede representarse en la forma $M\,Y(y) - N\,X(x)$. Un factor integrante se puede buscar en la forma $\mu = \mu(x, y) = g(x)h(y)$. En este caso, se puede tomar $g(x) = \exp(-\int X(x)dx)$ y $h(y) = \exp(-\int Y(y)dy)$.

1.2. ***Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden***.

Estas ecuaciones son de la forma $f(x, y, y', y'') = 0$. Consideraremos dos tipos especiales de estas ecuaciones, las cuales se pueden resolver por métodos de primer orden.

a. Falta la variable dependiente. Si y no se encuentra explícitamente presente, nuestra ecuación podrá escribirse

$$f(x, y', y'') = 0 \tag{11}$$

En este caso, se presenta una nueva variable dependiente $p = p(x)$, escribiendo

$$y' = p \text{ y } y'' = \frac{dp}{dx} \tag{12}$$

Esta sustitución transforma (11) en la ecuación de primer orden

$$f(x, p, p') = 0 \qquad (13)$$

Si se puede encontrar una solución para (13), se puede reemplazar p en esa solución por y' y tratar de resolverla. Este procedimiento permite resolver dos ecuaciones de primer orden en sucesión, en lugar de la ecuación de segundo orden (11).

b.Falta la variable independiente. Si x no se encuentra explícitamente presente, la ecuación de segundo orden podrá escribirse como

$$f(y, y', y'') = 0 \qquad (14)$$

En este caso se presenta la nueva variable dependiente $p = p(y)$ en la misma forma; pero, esta vez, se expresa y'' en términos de una derivada con respecto a y :

$$y' = p \quad \text{y} \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = pp' \qquad (15)$$

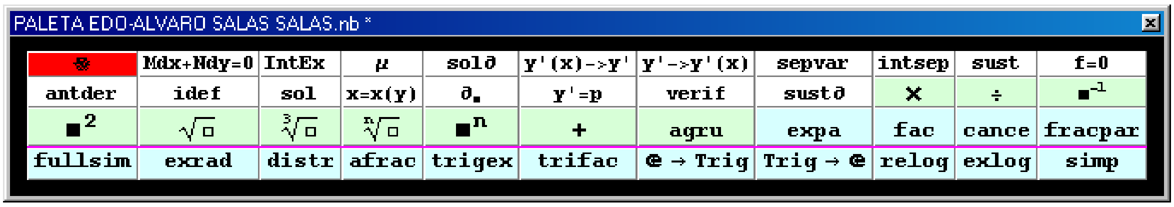
Esto nos permite escribir (14) en la forma

$$f(y, p, p\,p') = 0 \qquad (16)$$

y, a partir de este punto, se procede como antes, resolviendo dos ecuaciones de primer orden en sucesión.

II. SOLUCION INTERACTIVA DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN MATHEMATICA.

Para resolver ecuaciones diferenciales en Mathematica se puede elaborar una paleta de botones, los cuales realizan transformaciones específicas sobre una EDO dada. Cada botón es, en esencia, un programa. Algunos de estos programas están basados en los métodos expuestos en el Marco Teórico. Todos los botones se han organizado en una paleta, la cual se muestra a continuación :



Para poder realizar las aplicaciones, primero que todo se debe pinchar (una sola vez en una sesión) el botón Ù , el cual carga los programas. Antes de empezar a trabajar con la paleta, primero debe escribirse la ecuación diferencial que se desea resolver o transformar. Veamos algunos ejemplos de ecuaciones y la manera como se pueden introducir en Mathematica 4.1 para que el programa las interprete correctamente.

1. $y''+k^2y=0$. Suponiendo que x es la variable independiente, esta ecuación se puede introducir en Mathematica en cualquiera de las formas `y''[x]+k^2*y[x]==0`, $y''+k^2y==0$, Derivative[2][y][x]+k^2y[x]==0. Es importante anotar que para las ecuaciones se usa el signo == y no el signo =. Si se usa el signo = se generan errores de sintaxis. Si accidentalmente se escribe algo como $y'=2y+x$, entonces se genera un problema. Para corregirlo, se escribe en Mathematica $y':=$ y luego se pulsa Intro o también Shift+Enter.

2. $(x+y)dx+(3x-y)dy=0$. En Mathematica se escribe en la forma

```
(x+y)Dt[x]+(3 x-y)Dt[y]==0.
```

3. $y'+f(x)y=g(x)$. En Mathematica :

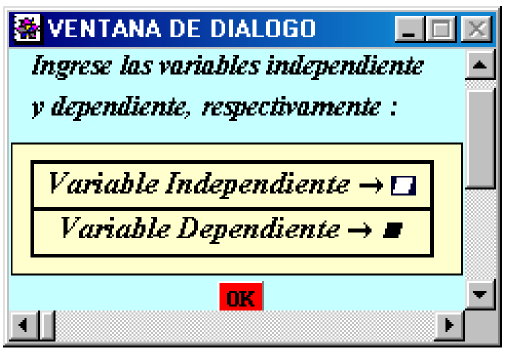
`y'+f[x]y==g[x]` o también `y'[x]+f[x]y[x]==g[x].`

Además del botón Ù , en la paleta aparecen botones de diferente color : blanco, azul y verde. Los botones blancos y los verdes se utilizan de la siguiente manera : una vez se ha escrito la respectiva ecuación en Mathematica, el usuario debe ubicarse sobre cualquier parte de ella , de modo que el cursor del mouse no aparezca en una celda diferente de la celda en que aparece la ecuación en cuestión . Enseguida se pincha el respectivo botón *una* *sola vez*. Aparecerá una ventana de diálogo (representada en un cuaderno emergente) . Los datos pedidos se deben llenar en las respectivas casillas. Una vez se han llenado los datos, se debe hacer click en el botón **Aceptar** o en el botón **OK** del cuaderno emergente, según sea el caso.

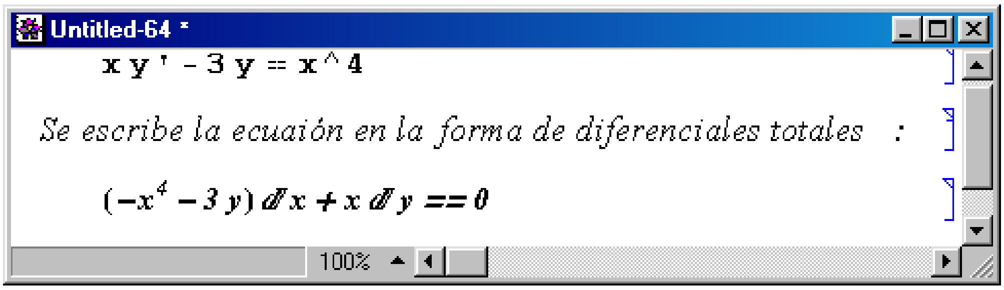
Para hacer uso de un botón azul, primero se selecciona y sombrea con el mouse una parte de la ecuación en cuestión (la parte que nos interesa transformar). A continuación se pincha el botón azul de interés. Se observará el efecto del botón sobre la expresión en letra de color rojo.

Enseguida se describe la función que cada botón desempeña dentro de la paleta.

B1. **Mdx+Ndy=0** . Transforma una ecuación lineal de primer orden a la forma de diferenciales (5). La ecuación puede estar escrita en cualquier de las formas $f(x,y,y')=0$, $f(x,y(x),y'(x))=0$. A manera de ejemplo, transformemos la ecuación $x\dfrac{dy}{dx}-3y=x^4$ en una ecuación en diferenciales totales. Primero, escribimos la ecuación en Mathematica en la forma `x y'-3 y==x^4`. Después de esto, pinchamos el botón **Mdx+Ndy=0**. Aparecerá la siguiente ventana de diálogo (cuaderno emergente) :



En nuestro caso, x es la variable independiente y y es la variable dependiente. Después de llenar las respectivas casillas y pinchar el botón **OK** Mathematica 4.1 nos proporciona lo siguiente :

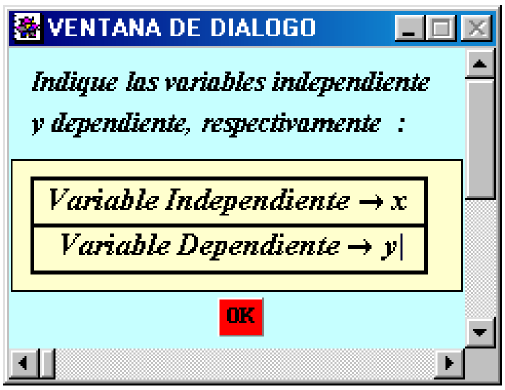


Inmediatamente aparece el resultado, Mathematica lo sombrea (es decir, el botón se programa de manera que la selección se mueva al resultado que proporciona el botón que se acaba de ejecutar).

B2. **IntEx**. Este botón se aplica a ecuaciones de la forma (5), es decir, a ecuaciones en diferenciales totales. Si la ecuación es exacta, la integra como tal. El programa implementado en este botón verifica la condición (7) , la cual en caso de cumplirse, aplica las fórmulas (8), (9) y (10) para integrar la ecuación. A manera de ejemplo, consideremos la ecuación exacta $(y^2+6xy+2x^2)dx+(4y^2+2xy+3x^2)dy=0$. Inicialmente se introduce esta ecuación en Mathematica en la forma

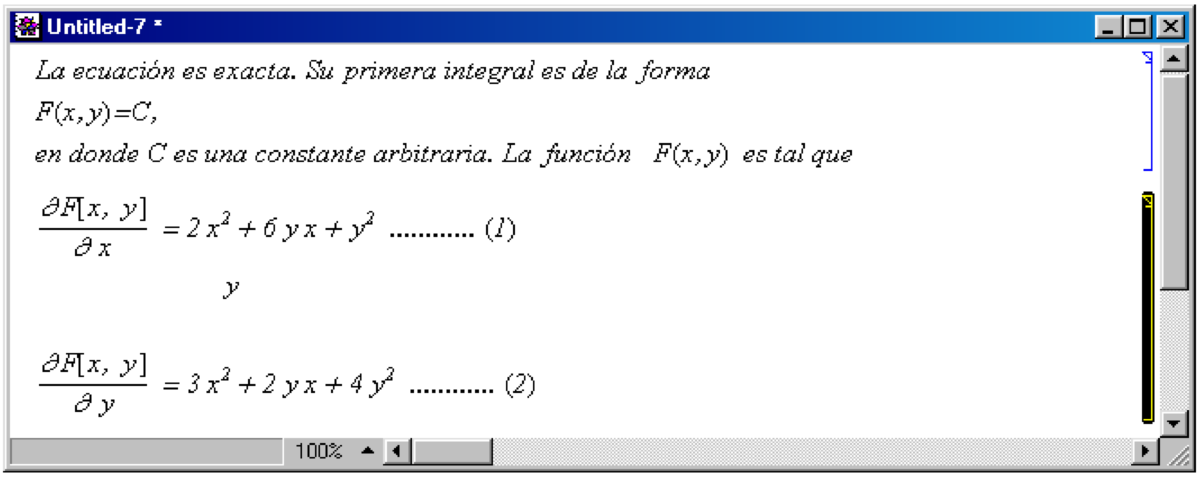
```
(y^2+6 x y+2 x^2)*Dt[x]+(4 y^2+2 x y+3 x^2)*Dt[y]==0
```

Al pinchar el botón **IntEx** aparece la ventana de diálogo que nos pregunta acerca de las variables independiente y dependiente, las cuales en nuestro caso son x e y, respectivamente. Llenamos las casillas correspondientes, como se aprecia a continuación :

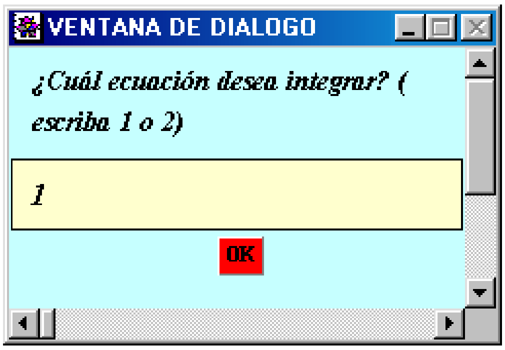


Al hacer click en el botón 

aparece la siguiente información :

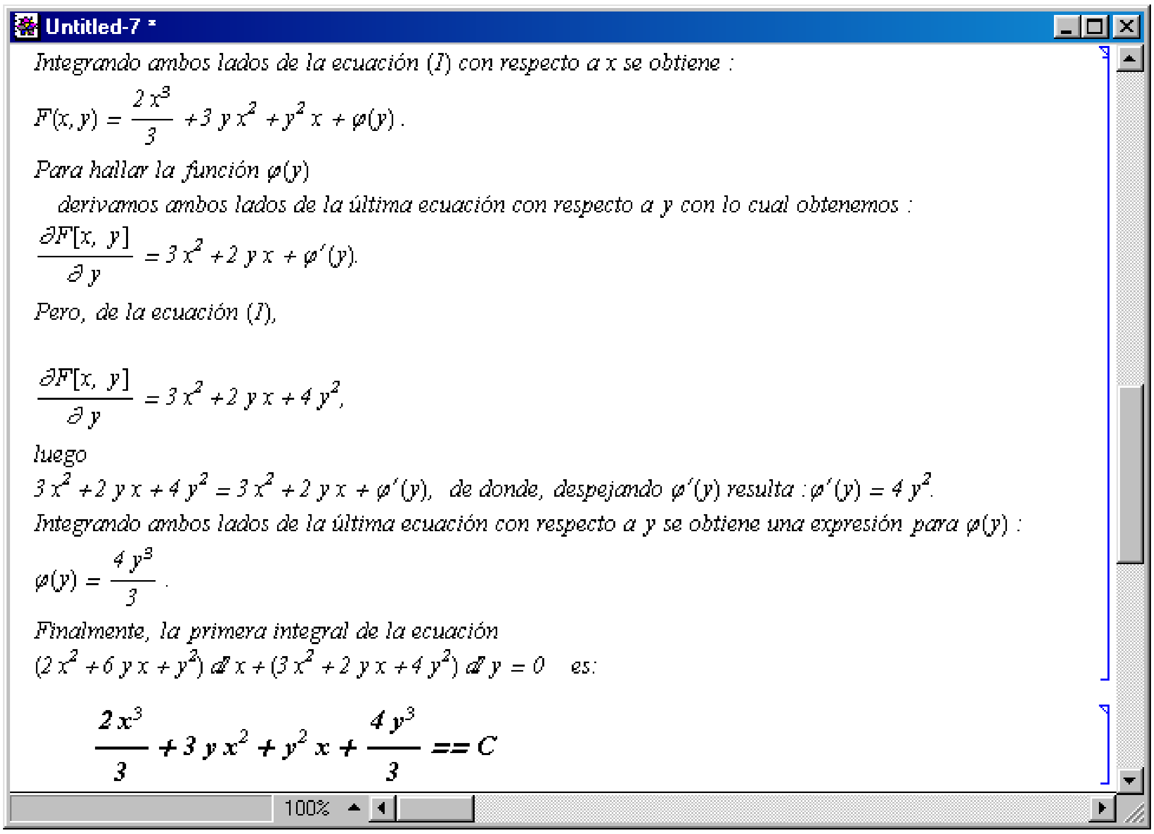


A continuación el programa indaga acerca de cuál de las ecuaciones (1) o (2) se ha de integrar. Por lo general, se integra aquella que sea más sencilla en forma. En este caso, podemos ser indiferentes a la hora de escoger, ya que ambas ecuaciones tienen el mismo grado de complejidad :



Al hacer click en el botón 

Mathematica nos proporciona la siguiente información :



Untitled-7 *

Integrando ambos lados de la ecuación (I) con respecto a x se obtiene :

$F(x, y) = \frac{2x^3}{3} + 3\,y\,x^2 + y^2\,x + \varphi(y)$.

Para hallar la función $\varphi(y)$

derivamos ambos lados de la última ecuación con respecto a y con lo cual obtenemos :

$\frac{\partial F[x,\ y]}{\partial y} = 3\,x^2 + 2\,y\,x + \varphi'(y).$

Pero, de la ecuación (I),

$\frac{\partial F[x,\ y]}{\partial y} = 3\,x^2 + 2\,y\,x + 4\,y^2,$

luego

$3\,x^2 + 2\,y\,x + 4\,y^2 = 3\,x^2 + 2\,y\,x + \varphi'(y)$, *de donde, despejando* $\varphi'(y)$ *resulta :* $\varphi'(y) = 4\,y^2$.

Integrando ambos lados de la última ecuación con respecto a y se obtiene una expresión para $\varphi(y)$ *:*

$\varphi(y) = \frac{4\,y^3}{3}$.

Finalmente, la primera integral de la ecuación

$(2\,x^2 + 6\,y\,x + y^2)\,d\,x + (3\,x^2 + 2\,y\,x + 4\,y^2)\,d\,y = 0$ *es:*

$$\frac{2\,x^3}{3} + 3\,y\,x^2 + y^2\,x + \frac{4\,y^3}{3} == C$$

100%

B3. **m** . Este botón intenta hallar un factor integrante para una ecuación dada en la forma (5). El botón incluye un programa que analiza el cumplimiento de uno de los casos I- V de la sección 1.1.3. En caso de encontrar un factor integrante, Mathematica escribe la ecuación exacta obtenida al multiplicar ambos lados de la ecuación original por el factor integrante hallado. Para integrar la ecuación resultante, se recurre al botón B2.

B4. `sol¶` . Resuelve directamente una ecuación diferencial dada, no necesariamente de primero o segundo orden. Este botón utiliza un comando de Mathematica llamado `DSolve` (en Inglés: “Differential Solve”).

B5. `y'` [redacted]. Este botón se usa para pasar una ecuación de la forma $f(x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots) = 0$ a la forma $f(x, y, y', y'', \cdots) = 0$. Por ejemplo, el botón convierte la ecuación `y'[x]==y''[x]+x` en la ecuación `y'==y''+x`.

B6. **y'->y'** . Este botón se usa para pasar una ecuación de la forma $f(x, y, y', y'', \cdots) = 0$ a la forma $f(x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots) = 0$. Por ejemplo, este botón convierte la ecuación `y'==y''+x` en la ecuación `y'[x]==y''[x]+x`.

B7. **sepvar**. Separa las variables en una ecuación que lo permita.

B8. **intsep**. Se usa para integrar una ecuación en la cual las variables aparezcan separadas.

B9. **sust** . Realiza una sustitución algebraica en una ecuación.

B10. **f=0**. Transpone todos los términos de una ecuación a la izquierda.

B11. **antder**. Integra ambos lados de una ecuación con respecto a una misma variable. Es de utilidad, por ejemplo, para integrar ecuaciones de la forma $y'(x) = f(x)$. El usuario debe sumar la constante de integración manualmente.

B12. **idef**. Integra ambos lados de una ecuación con respecto a cierta variable en un intervalo (a, b) .

B13. **sol**. Resuelve una ecuación con respecto a una variable. Este botón es de utilidad en los casos en que se tiene una solución $y = y(x)$ definida implícitamente por una ecuación de la forma $\Psi(x, y) = c$ o de la forma $\Psi(x, y, c) = 0$ siendo c una constante. Al aplicar el botón sobre la ecuación $\Psi(x, y) = c$ se le pide que despeje la variable y .

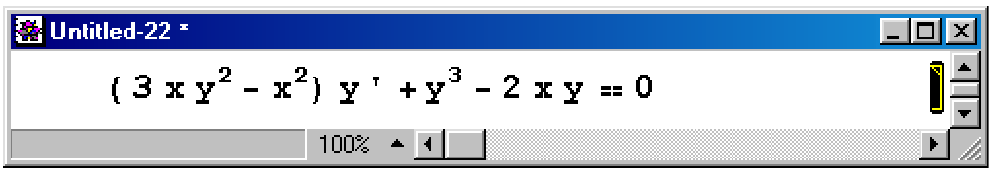
B14. **x=x** . Se emplea en el caso en que es conveniente intercambiar los papeles de las variables independiente y dependiente. Por ejemplo, consideremos la ecuación $(\ln y + x)y' = 1$. Aquí buscamos una función $y = y(x)$ que satisfaga la ecuación. Esta ecuación no es resuelta por Mathematica 4.1. Sin embargo, si consideramos que $x = x(y)$, entonces $y' = \frac{1}{x'}$ y al aplicar el botón **x=x** sobre la ecuación (considerando a x como la variable independiente), éste la transforma en la ecuación $x + \ln y - x' = 0$, la cual es lineal.

B15. **¶,** . Se utiliza para derivar ambos lados de una ecuación con respecto a una misma variable. Si nos dan una ecuación de la forma $\Psi(x,y) = c$ o de la forma $\Psi(x,y,c) = 0$ siendo c una constante, y nos piden hallar la ecuación diferencial que esta asociada a esta familia de curvas, entonces intentamos despejar la constante c por medio del botón **sol** (el botón B13) y a continuación derivar ambos lados de la ecuación obtenida con respecto a x para obtener la ecuación diferencial respectiva.

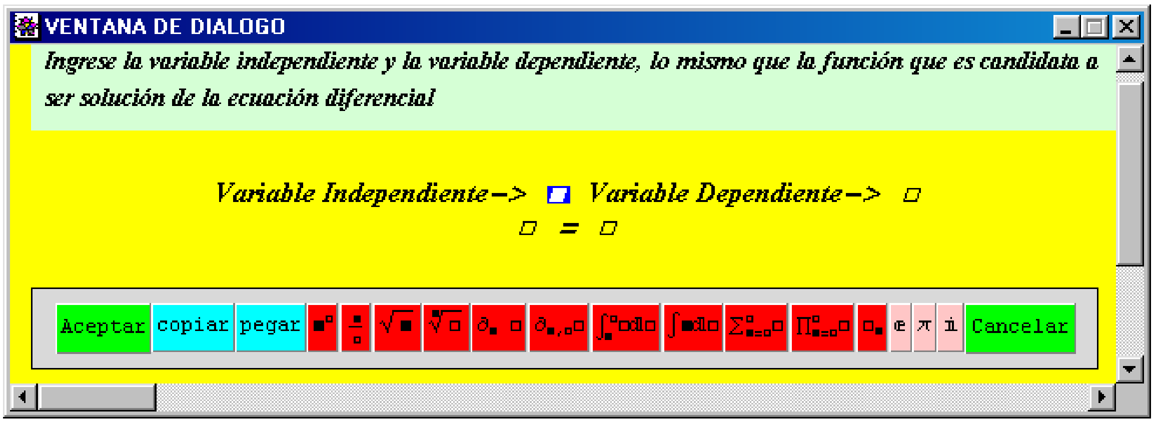
B16. **y'=p**. Se recurre a este botón cuando se tiene una ecuación de la forma $f(x,y,y'') = 0$ o de la forma $f(y,y',y'') = 0$. El botón hace la sustitución $y' = p$ para reducir la ecuación a una de primer orden, como se describió en la sección 1.2.

B17. **verif**. Este botón intenta verificar si una función $y = y(x)$ definida explícitamente por una ecuación de la forma $y = f(x)$ o implícitamente por una ecuación de la forma $\Psi(x,y) = 0$ es o no solución de una ecuación diferencial dada, no necesariamente de primero o de segundo orden. A manera de ejemplo, veamos cómo verificar que la función $y = y(x)$ definida por la ecuación $y^3 x - x^2 y = C$ satisface la ecuación diferencial $(3xy^2 - x^2)y' + y^3 - 2xy = 0$.

Introducimos en Mathematica la ecuación :

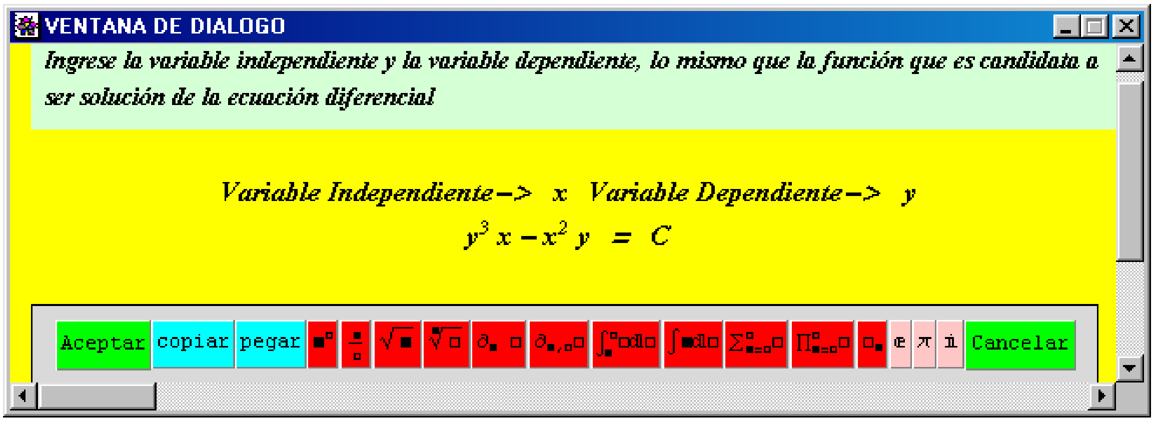


Acto seguido, se pincha el botón **verif**. Aparecerá un cuaderno emergente solicitando la información necesaria, como se muestra a continuación :

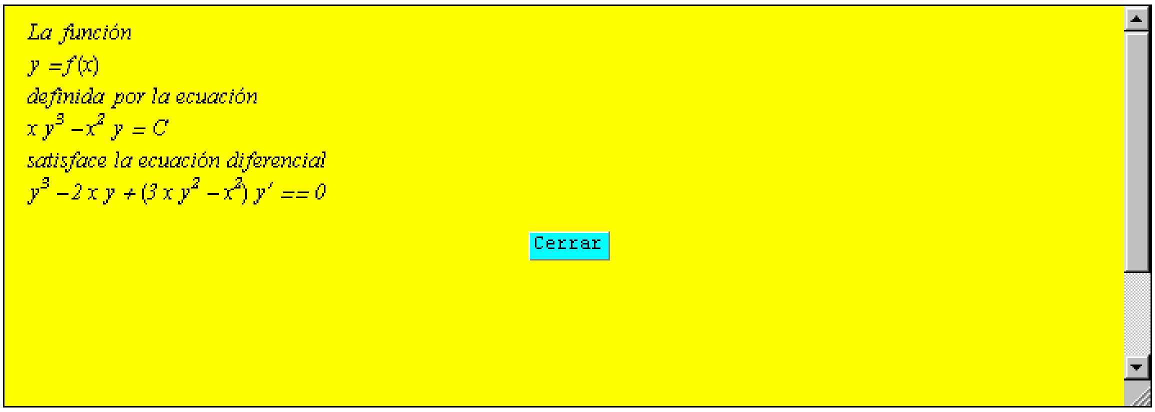


El cuaderno emergente (ventana de diálogo) nos solicita la variable independiente, la dependiente y la ecuación que define implícita o explícitamente la solución. En la parte inferior aparecen unos botones. El botón **Aceptar** se pincha una vez se considera que los datos introducidos son correctos. Si el usuario se equivoca o considera que no es conveniente realizar la verificación, entonces se debe pinchar el botón **Cancelar** .El botón **Copiar** se usa en el caso en que se quiera copiar una expresión desde el cuaderno en el cual se ha digitado la ecuación o desde otro cuaderno. Para esto se selecciona la expresión con el mouse. Luego se pincha el botón **Copiar** y la expresión respectiva se pega en el cuaderno emergente por medio del botón **Pegar**. Los demás botones son herramientas para editar expresiones matemáticas dentro del cuaderno emergente.

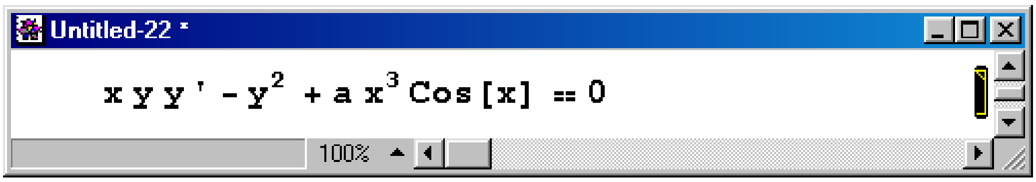
Se llenan las casillas como se muestra a continuación:



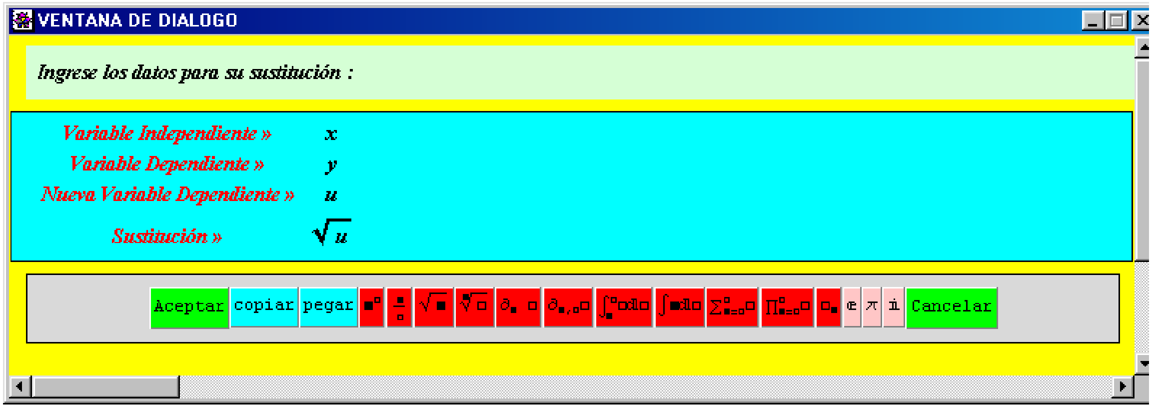
Al pinchar el botón **Aceptar** nos aparecerá el siguiente cuaderno emergente, el cual nos dice si se satisface o no la ecuación :



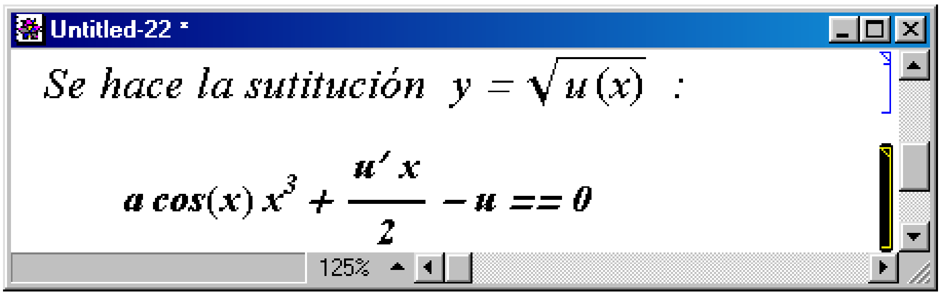
B18. **sust¶**. Este botón realiza una sustitución de la forma $y = \varphi(u, x)$ en una ecuación diferencial de la forma (1) . Se supone que $u = u(x)$. A manera de ejemplo, consideremos la ecuación $xyy' - y^2 + ax^3 \cos x = 0$. Hagamos la sustitución $u = y^2$, de modo que $y = \sqrt{u}$. Introducimos la ecuación :



Al pinchar el botón **sust¶** nos aparece el cuaderno emergente respectivo solicitando los datos necesarios para la sustitución. Se llenan las casillas como se muestra a continuación :



Al pinchar el botón **Aceptar** , Mathematica nos proporciona el siguiente resultado :



De esta manera, la ecuación original (la cual es no lineal) se convierte en la ecuación lineal

$$ax^3 \cos x + \frac{x}{2}u' = 0 \, .$$

B19. ′ → Este botón multiplica ambos lados de una ecuación (no necesariamente diferencial) por un número o expresión dada.

B20. ′ -1 →Toma el recíproco multiplicativo en ambos lados de una ecuación.

B21. $,^{2}$ → Eleva al cuadrado ambos lados de una ecuación.

B22. $\sqrt{f}$ →Extrae raíz cuadrada en ambos lados de una ecuación.

B23. $\sqrt[3]{f}$ → Extrae raíz cúbica en ambos lados de una ecuación.

B24. $\sqrt[n]{f}$ →Extrae raíz n-ésima en ambos lados de una ecuación.

B25. $,^{n}$ → Eleva amos lados de una ecuación a la n-ésima potencia.

B26. + →Suma un mismo número o expresión en ambos lados de una ecuación.

B27. , →Divide ambos lados de una ecuación por un mismo número o expresión.

B28. agru →Organiza en forma de polinomio ambos lados de una ecuación con respecto a una o más variables.

Finalmente, y como se anotó anteriormente, los botones azules se usan para aplicar transformaciones algebraicas sobre cierta parte de una expresión involucrada en una ecuación o sobre cierta parte de una expresión. A continuación se da una breve descripción de la función de los mismos :

B29. **expa** → Expandir
B30. **fac** → Factorizar.
B31. **cance** → Cancelar factores comunes en una fracción.
B32. **fracpar** → Convertir una fracción en suma de fracciones parciales.
B33. **fullsim** → Simplificación total.
B34. **exrad** → Simplificar radicales.
B35. **distr** → Aplicar la ley distributiva del producto sobre la suma.
B36. **afrac** → Convertir una expresión en una fracción.
B37. **trigex** → Expandir expresiones trigonométricas.

B38. `trifac` → Factorizar expresiones trigonométricas.
B39. `ã ® Trig` → Pasar de la forma exponencial a la forma trigonométrica.
B40. `Trig ® ã` → Pasar de la forma trigonométrica a la forma exponencial.
B41. `relog` → Agrupar logaritmos .
B42. `exlog` → Expandir logaritmos.
B43. `simp` → Simplificar.

CONCLUSIONES

Con este trabajo se pretende dar un enfoque no tradicional en lo referente al manejo y solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se espera que los programas implementados sirvan de refuerzo a los cursos teóricos sobre ecuaciones diferenciales. Un aspecto que se puede destacar es la interactividad con la máquina. Los programas implementados son flexibles, interactivos y dan lugar al desarrollo de la creatividad en el usuario. También permiten, antes que realizar cálculos engorrosos, conceptuar los métodos de solución de EDO e investigar cierta clase de ecuaciones diferenciales. Los aspectos que tienen que ver con la programación en Mathematica de los botones no se incluyeron por cuestiones de espacio. Cualquier duda a este respecto se puede consultar en la siguiente dirección : matesta@cumanday.ucaldas.edu.co.

BIBLIOGRAFÍA

- Wolfram, S. *The Mathematica Book* . Cambridge Univ Press,1996.
- Maeder, R. *Programming in Mathematica.* Addison-Wesley, 1997.
- Gray, J. *Mastering Mathematica* . Academic Press, 1994.
- Kamke E., *Differentialgleichungen- Lösungsmethoden und lösungen*. Leipzig, 1959.
- Boyce E William-DiPrima C. Richard. *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Tercera edición, Editorial Limusa, 1978.
- Simmons F. *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, Editorial McGrawHill, 1977.
- Stepánov V.V. Curso de Ecuaciones Diferenciales., Moscú, 1950 (en ruso).

EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES CON SOFTWARE INFORMÁTICO

Nydia Dal Bianco - Rosana Botta Gioda - Nora Castro -Silvia Martínez
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UNLPam
Uruguay 151- (6300) Santa Rosa La Pampa - Argentina
dalbianco@exactas.unlpam.edu.ar smartinez@exactas.unlpam.edu.ar

RESUMEN

El presente trabajo está enmarcado dentro de un proyecto de aplicación de las técnicas de una Ingeniería Didáctica (M. Artigue) en la enseñanza de la Matemática, a fin de facilitar el aprendizaje de temas específicos de la asignatura, contextualizando saberes y procedimientos.
Es una experiencia realizada con un grupo de alumnos de la cátedra Matemática de primer año de carreras de Ciencias Naturales, (Profesorado y Licenciatura en Ciencias Biológicas, Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente) y del Profesorado en Química que se dicta en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa- Argentina.
El objetivo de esta propuesta fue generar una mayor participación en las clases prácticas, promover el aprendizaje y mayor interés en el tema funciones, en particular las exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, utilizando medios tecnológicos, específicamente la computadora y los software Mathematica y Derive, instalados en el gabinete de Computación de nuestra casa de estudios.
Disponiendo los alumnos de los apuntes con las sentencias y comandos necesarios de ambos software, analizaron las funciones desarrolladas previamente en las clases teóricas; representando, relacionando y operando con los ejercicios incluídos en el trabajo práctico del tema, visualizaron las características de cada una y resolvieron situaciones problemáticas integradoras.
Concluimos que la experiencia realizada resultó positiva y actuó como un agente motivador en otros alumnos que permanecían indiferentes a la aprehensión del tema propuesto.

INTRODUCCIÓN

Frecuentemente a los alumnos de este tipo de carreras poco vinculadas con las Ciencias Exactas no les resulta atrayente el aprendizaje de la Matemática, como así mismo no perciben la amplia variedad de conceptos matemáticos que deben aprender para ser utilizados en su futuro desempeño profesional. Por este motivo rediseñamos actividades como parte de una nueva metodología de enseñanza, e incorporamos el uso de la tecnología informática como herramienta de aprendizaje.
Pretendemos dar un ***significado*** al aprendizaje de la Matemática, como así también dar ***sentido*** a la misma, transformando el concepto que nuestros estudiantes tienen sobre la Matemática como una ciencia y un aprendizaje árido, abstracto, irreal, solo identificable con cálculos y operaciones tediosas.
La Matemática debe convertirse en algo atractivo, que proporcione recursos de razonamiento y comprensión para posibilitar la solución a diversas situaciones problemáticas.
Con la computadora y los software disponibles, los estudiantes pueden sin tener mayores dificultades comprender y aprender las funciones, resolver problemas de aplicación en distintos campos científicos que requieran resoluciones largas y complicadas y representarlas adecuadamente.

OBJETIVOS

Determinar si se producen diferencias en cuanto al interés y participación por parte de los alumnos en el aprendizaje del tema Funciones, al proponer un método de trabajo no tradicional.

Aportar las técnicas que integren por un lado la aprehensión de los estudiantes al concepto matemático puro y por otro la necesidad de que este concepto se incorpore a los futuros profesionales de una manera sólida.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Motivar a los estudiantes en el aprendizaje de Funciones.
- Facilitar a los alumnos el aprendizaje de propiedades y características de las funciones.
- Orientar al alumno en la utilización de Softwares adecuados, que faciliten la graficación y resolución de distintas situaciones problemáticas.
- Comparar gráficos de funciones con iguales parámetros obtenidos con distintos software.
- Analizar funciones en un dominio significativo.
- Realizar un análisis crítico de las representaciones proporcionadas por la computadora.

METODOLOGÍA

Los alumnos que cursan Matemática en su primer año de estudios y por las exigencias de los respectivos planes deben asistir a un número de veinticinco horas semanales como mínimo de clase, según la carrera, lo que le limita el tiempo disponible para el estudio. En particular en la asignatura Matemática notamos que la gran mayoría asiste a las clases de trabajos prácticos sin haber analizado el teórico correspondiente.
El trabajo en esta etapa de *Experimentación*, tercera fase de la Ingeniería Didáctica según Michèle Artigue, se realizó con el apoyo del marco teórico y la utilización de las herramientas informáticas disponibles.
Para llevar a cabo esta propuesta se elaboró este material, que incentive y motive a los estudiantes en la comprensión, asimilación y manejo del concepto de funciones.
Para el desarrollo de las actividades de esta etapa hemos considerado que:
El aprendizaje requiere la participación activa; el interés es el motor del aprendizaje y el trabajo cooperativo estimula el desempeño personal.

Funciones exponenciales:

Problema inicial:
El crecimiento de un cultivo de bacterias es tal que a cada hora se duplica el número de las mismas. En estas condiciones si había 1000 bacterias al iniciar el experimento, el número habrá aumentado a 2000 después de una hora, 4000 después de dos horas y así sucesivamente.

Podemos registrar este experimento en la siguiente tabla:

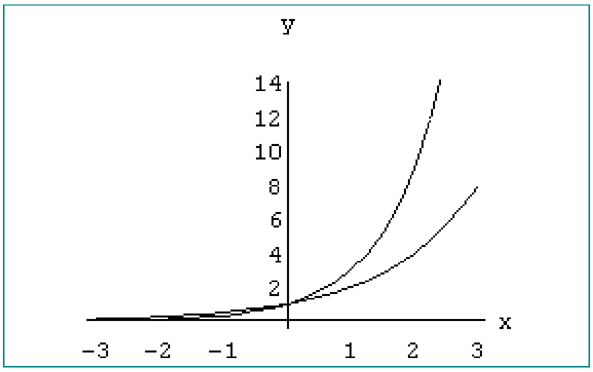
t	0	1	2	3	4
f(t)	1000	2000	4000	8000	16000

donde *t* es el tiempo en horas y *f(t)* es el número de bacterias presente en el cultivo en el tiempo *t*.
Expresamos el número de bacterias *f(t)* 1000, 2000, 4000, 8000 y 16000 de la siguiente forma:
$1000 \cdot 2^0$, $1000 \cdot 2^1$, $1000 \cdot 2^2$, $1000 \cdot 2^3$ y $1000 \cdot 2^4$.
Tenemos entonces que $f(t) = 1000 \cdot 2^t$ y a este tipo de funciones se les llama ***funciones exponenciales.***
Por ejemplo $f(10) = 1000 \cdot 2^{10}$ nos indica el número de bacterias existentes en el cultivo después de 10 horas de experimento.
En general expresamos una función exponencial como: $f(x) = ba^x$ con dominio en el conjunto de los números reales donde $b \neq 0$, y $a>0$; consideramos siempre $a \neq 1$ pues si $a=1$ resulta la función constante *f(x)=b.*

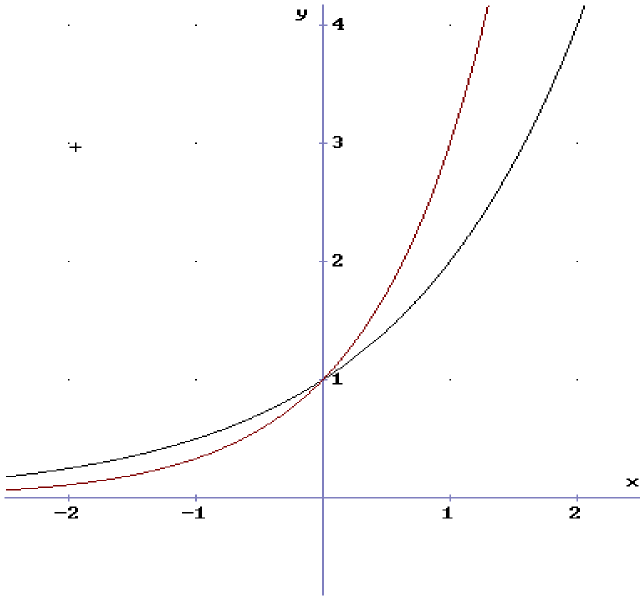
1) Sea *a>1* y *b*=1. Para representar geométricamente las propiedades de la función exponencial, vamos a construir los gráficos de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3^x$

En este trabajo no presentamos las tablas dadas por el **Mathematica**, realizadas por los alumnos, debido a su extensión.
Con las siguientes instrucciones, **Mathematica** evalúa las funciones generadas por **Table**, y representa las gráficas correspondientes.

```
Plot[Evaluate[Table[n^x, {n, 2, 3}]], {x,-3,3}, AxesLabel->{x,y}]
```



Para lograr gráficos más adecuados utilizaron el comando **Show** que modifica las siguientes opciones de Plot **Axes Origin, AspectRatio, PlotRange, AxesLabel** etc.



Utilizando el programa **Derive** se realizaron las mismas gráficas: $y = 2^x$ e $y = 3^x$

2) Consideramos las funciones exponenciales con *0*<*a*<1 y *b*=1.

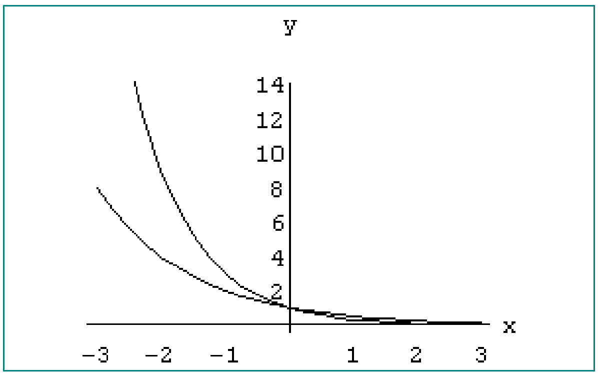
Definimos $h(x) = (1/2)^x$ y $l(x) = (1/3)^x$, y construimos gráficos para cada una.

AA=Plot[1/2^x, {x, -3, 3}, AxesLabel -> {x,y}];

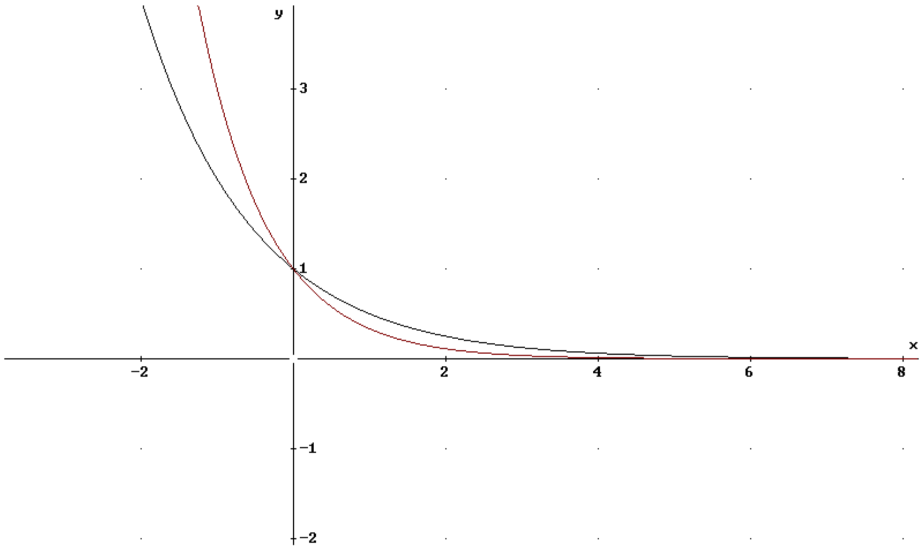
BB=Plot[1/3^x, {x, -3, 3}, AxesLabel -> {x,y}];

Usaremos nuevamente el comando **Show** para representar simultáneamente las dos funciones, previamente designadas con AA y BB, con el siguiente formato:

CC=Show[AA, BB]



Con **Derive**:



Después de realizar en la práctica una amplia variedad de ejercicios, utilizando ambos software se discute y se llega a las siguientes observaciones:

1) Cualquiera sea la base siempre no nulas, la función toma el valor 1 para x=0; es decir todos los gráficos pasan por el punto (0, 1).

2) La función exponencial es siempre positiva para todos los valores de x es decir el gráfico se halla por encima del eje de abscisas y no existe ningún valor de x para el cual la función se anula, siendo este eje asíntota horizontal de la función.

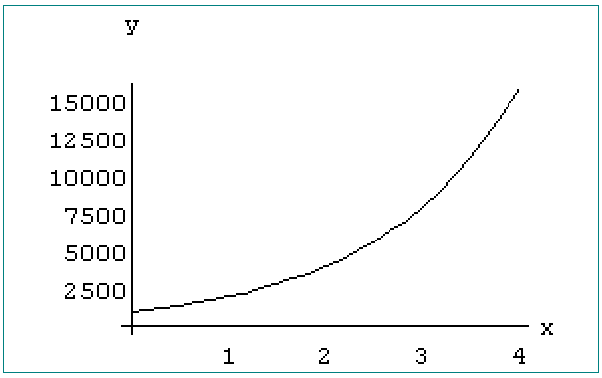
3) Si a>1 la función exponencial es creciente, es decir, las ordenadas aumentan al crecer las abscisas y en el caso 0<a<1 la función es decreciente, siendo en ambos casos cóncava hacia arriba.

4) Son funciones biyectivas, siendo el dominio el conjunto de los números reales y el codominio el conjunto de los números reales positivos.

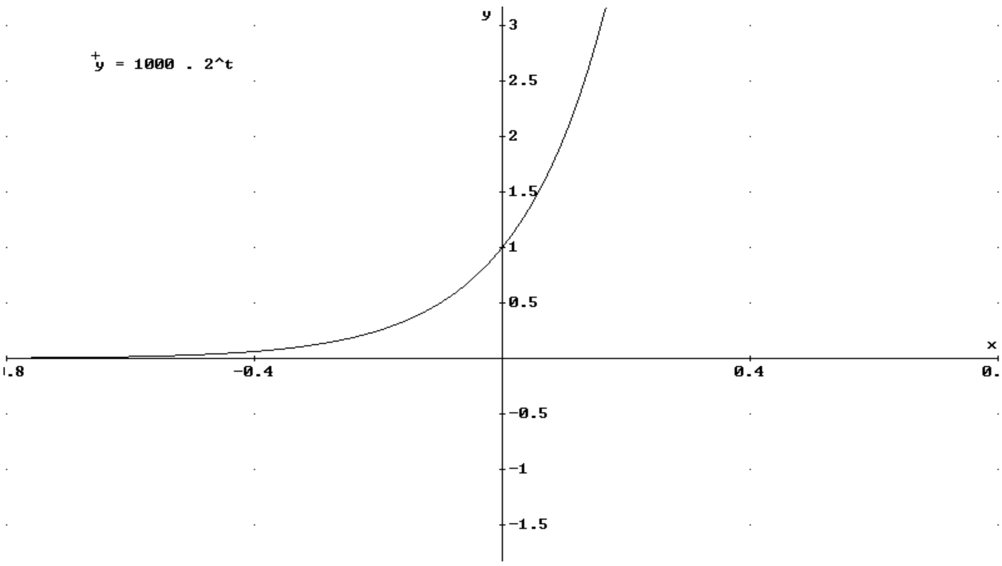
Volviendo al problema inicial

Representamos el caso en que $b \neq 1$; por ejemplo el cultivo de bacterias presentado al inicio del tema cuya función exponencial correspondiente $f(t) = 1000 \cdot 2^t$

```
Plo[1000*2^t, {t, 0, 4}, AxesLabel -> {x,y}]
```



Aplicando **Derive**:



Observamos que $f(0) = 1000$ lo que indica que inicialmente hay 1000 bacterias en el experimento, es decir la gráfica pasa por el punto (0, 1000).

Particularmente importante es la función exponencial $f(x) = e^x$ que se lee ***exponencial de x***, y se designa también como ***exp(x)***.
Mathematica y **Derive** la definen como una función elemental con la denominación **Exp[x], EXP(x),** respectivamente.

<u>Funciones Logarítmicas</u>:

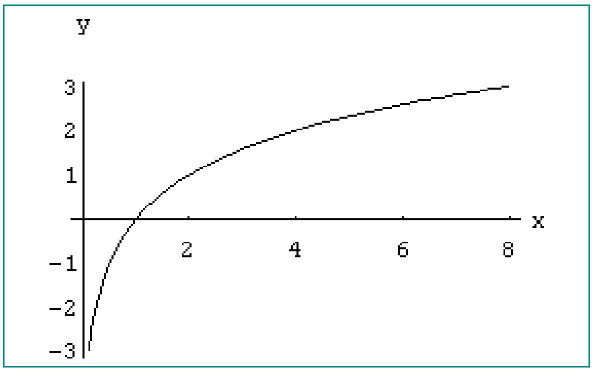
Como hemos visto las funciones exponenciales son funciones biyectivas, por lo tanto tienen inversa f^{-1}.
La inversa de una función exponencial de base *a* se llama ***función logarítmica de base a*** , se representa por $\log_a x$, y se lee **"logaritmo de x en base a".**

Definición: $y = \log_a x$ si y sólo si $x = a^y$, $a>0$, $a \neq 1$.

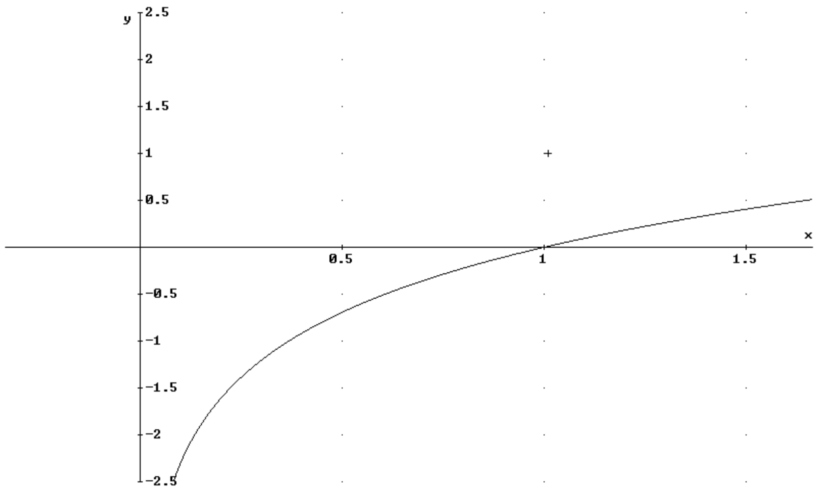
Mathematica define esta función como una función elemental usando: **Log[b,z]** para indicar el logaritmo en base b del número z.
Derive la define en forma muy similar, utilizando mayúscula y paréntesis, **LOG(b, z).**

Graficamos en **Mathematica** la función logaritmo de x en base 2.

```
Plot[Log[2,x], {x, 1/8, 8}, AxesLabel -> {x,y}]
```



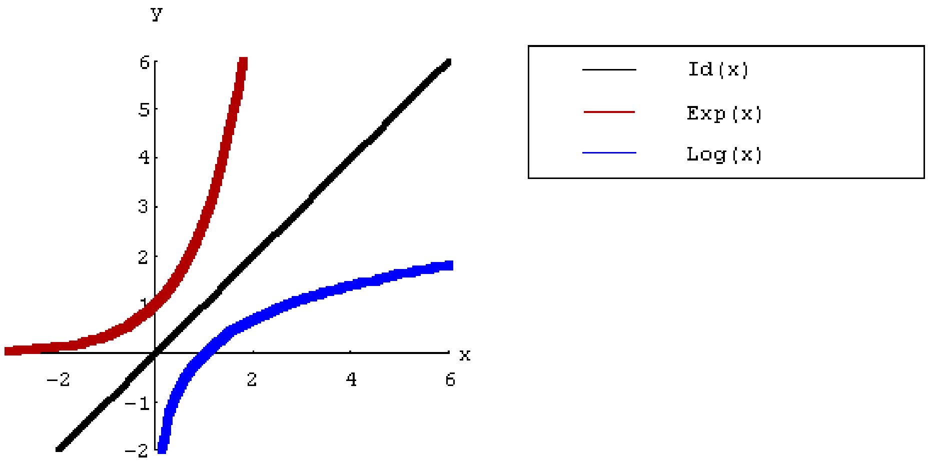
Con **Derive**:



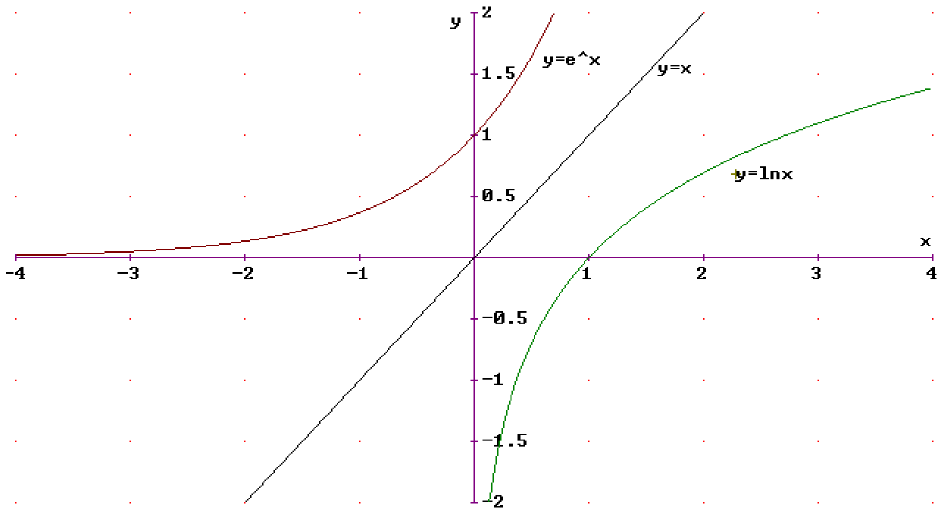
La función logarítmica de base *e* se la denomina en **Mathematica** función **logaritmo neperiano**, y se representa: **Log[x]**, comúnmente llamado **logaritmo natural de x;** la notación que aparece en muchos textos **ln x**, no es aceptada por **Mathematica**.
En **Derive** se define **LN(x)**

En **Mathematica**, graficamos las funciones identidad, exponencial y logarítmica de base *e*., introducimos el paquete **Legend** que permite colocar leyendas a cada una de las funciones representadas. También usaremos la opción **PlotStyle** que permite modificar el grosor, color y el aspecto de cada gráfica.

```
Needs["Graphics`Legend`"]
Plot[{x, Exp[x], Log[x]}, {x,-3,6}, PlotRange->{{-3,6}, {-2,6}},AxesLabel->{x,y},
PlotStyle>{{Thickness[0.01]},{Thickness[0.02], RGBColor[0.7,0,0]},{Thickness[0.02],
RGBColor[0,0,1]}},LegendPosition->{1.1,0.2}, LegendSize->{1.5,0.5},AspectRatio->Automatic,
LegendSpacing->0.1, LegendShadow->{0,0},PlotLegend->{"Id(x)", "Exp(x)", "Log(x)"}]
```



El mismo gráfico se realizó con **Derive**

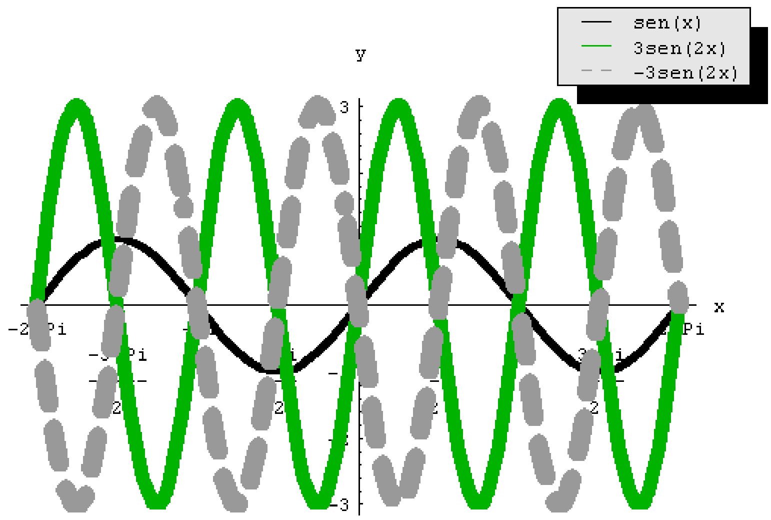


Resumiendo las funciones exponencial y logarítmica de iguales bases son inversas y sus gráficos son simétricos con respecto a *f(x) = x.*

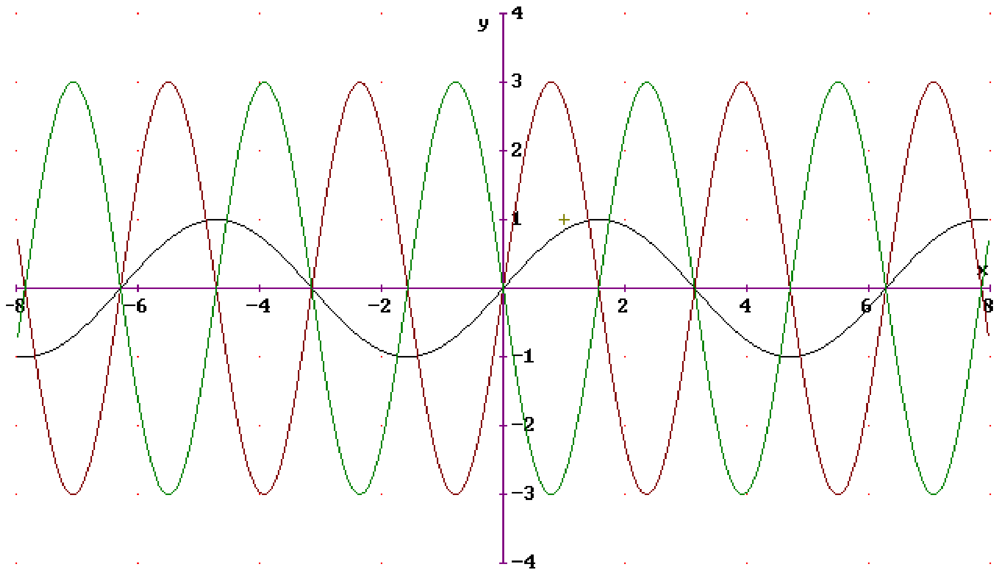
<u>Funciones trigonométricas</u>

Luego de la introducción teórica, estudiamos la gráfica de *f(x) = A sen(Bx + C),* (seleccionada por su menor complejidad y de fácil manejo), variando los parámetros intervinientes en distintos casos por ejemplo:
Consideramos tres valores distintos para la amplitud : *A* = 1, 3 y -3 ; y mantenemos el valor de *B = 2,* con *C = 0*

Con **Mathematica**



Aplicando **Derive**



Luego de una puesta en común, formulamos las siguientes observaciones:

Al superponer las gráficas de las funciones en los mismos ejes y con la misma escala, destacamos que el período de las de amplitud 3 es: $2\pi / 2 = \pi$.
Al cambiar la amplitud en cada función varía el máximo y el mínimo que toma la onda sinusoidal por ejemplo señalamos los valores Máximos: $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},3\right)$ y Mínimos: $\left(\frac{\pi}{2},-1\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},-3\right)$ y así sucesivamente con los múltiplos de $\pi / 2$. Por lo tanto vemos que se pueden obtener fácilmente los

gráficos de funciones de amplitudes distintas de uno multiplicando la ordenada de la función de amplitud uno por el nuevo valor que se le asigna a la misma.

Ejercicio: Analizar el caso: $A = 1$, $B = 1$ y $C \neq 0$, en particular $C = \pm\pi / 2$. Presentar conclusiones.

<u>Actividad integradora:</u>

En este trabajo presentamos la solución de uno de los problemas propuestos, realizada con **Mathematica** y proponiendo a los alumnos la solución del mismo utilizando el software **Derive**.

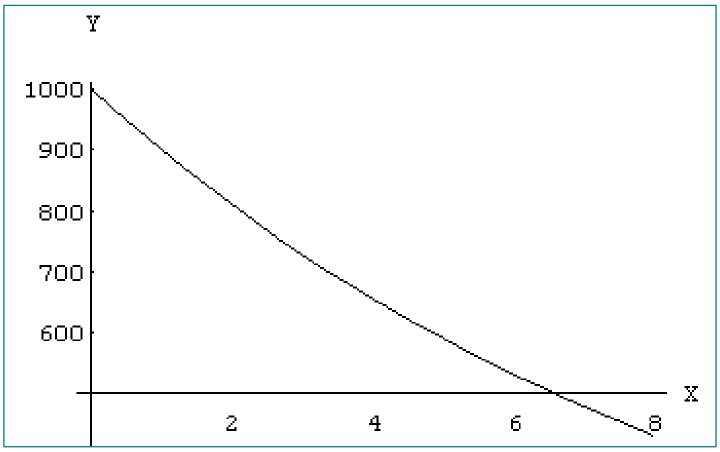
<u>Población de truchas.</u> En un estanque grande se introducen mil truchas de un año de edad. Se espera que el número N(t) de las que viven todavía después de t años sea $N(t) = 1000.\ 0.9^t$.

a) Tabular y graficar N(t) para $0 \leq t \leq 8$
b) Estimar cuando habrá 500 truchas vivas
c) ¿Qué población de truchas viven entre 2 y 4 años?
a) Tabulamos y graficamos la función N(t) con las siguientes sentencias:

```
Table[1000*0.9^t, {t,0,8}]
```

Construye la siguiente lista:

```
{1000, 900., 810., 729., 656.1, 590.49, 531.441, 478.297, 430.467}
Plot[1000*0.9^t, {t, 0, 8}, AxesLabel->{X,Y}]
```



b) Igualando la función N(t) al valor dado de 500 truchas obtenemos una ecuación exponencial de variable t que resolvemos en Mathematica usando el comando **NSolve**

```
NSolve[1000*0.9^t==500, t]
```

Que al ejecutarlo resuelve numéricamente la ecuación planteada:

```
{{t -> 6.57881}}
```

El valor obtenido también lo podemos estimar a partir de los gráficos anteriores.

c) Calculamos N(2) y N(4) usando nuevamente el comando Solve

```
Solve[1000*0.9^2==N, N]
```

```
{{N -> 810.}}
```

```
Solve[1000*0.9^4==N, N]
```

```
{{N -> 656.1}}
```

Entonces la población de truchas entre 2 y 4 años disminuye de 810 a 656, como se observa en la tabla.

Consumo de agua. Un depósito suministra agua a una comunidad. Durante los meses de verano el consumo *C(t)* de agua en pies^3/día, es :

$$C(t) = 2000 \operatorname{sen} \frac{\pi}{90} t + 4000$$

en la cual t es el tiempo en días y $t = 0$ corresponde al inicio del verano.

a) Trazar la gráfica de C para $0 \leq t \leq 90$.

b) ¿Cuándo es máximo el consumo de agua?.

CONCLUSIONES

Los docentes que elaboramos esta propuesta, que resultó positiva, consideramos que conlleva una serie de ajustes originados por distintos factores y que es viable implementarla con un mayor número de alumnos y otros temas de la asignatura.

Los recursos informáticos utilizados como herramienta ayudaron al enriquecimiento del campo perceptual y de las operaciones mentales involucradas en los procesos de construcción, estructuración y análisis de contenidos.

Esta experiencia permitió observar una buena disposición para el trabajo y el aprendizaje por parte de los alumnos a diferencia de una clase convencional, en la cual "aprendían" con una actitud exclusivamente receptiva.

BIBLIOGRAFÍA

1. **Artigue, M. Douady, R. Moreno, L. Gómez, P.** *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica. Colombia. 1998.
2. **Azcárate, C. Deulofeu, J.** *Funciones y Gráficas.* Editorial Síntesis. España. 1990
3. **Azinián, H.** R*esolución de Problemas Matemáticos. Visualización y manipulación con computadora.* Ediciones Novedades Educativas. Argentina. 1997.
4. **Brousseau, Guy**. *Fondaments et méthodes fe la didactique. Recherches en didactique des mathématiques 7.2.* Versión en español publicada por F.a. M.A.F. Universidad Nacional de Córdoba. 1987..
5. **Chevallard, I; Bosch, M.; Gascon J**. *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* ICE-HORSORI. Universidad de Barcelona. 1997.
6. **Larson, R; Hostetler, R; Edwards, B.** *Calculo y Geometría Analítica.* Quinta Edición. McGraw-Hill. España 1995.
7. **Leithold, L.** *El Cálculo con Geometría Analítica.* Sexta Edición. México.1992
8. **Stewart, J.** *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas.* Tercera Edición International Thomson Editores S.A. México. 1998.
9. **Swokowski, E.** *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* Grupo Editorial Iberoamericana. México. 1996.

EL EXTRAÑO ALGORITMO DEL PROFESOR TOTO

José Luis Aguado, Laura Rébora, María E. Velázquez[•]

RESUMEN

Nuestra propuesta contribuye a la construcción de un espacio donde confluyen conocimientos adquiridos y conceptos que orienten el uso de herramientas informáticas como elemento didáctico en el proceso enseñanza-aprendizaje. Todo esto sin perder de vista que en tal proceso, es de vital importancia no dejar de lado la creatividad, la reflexión y la destreza para arribar a conclusiones claras y precisas.
Problemas del campo de la matemática discreta, motivan fuertemente al estudiante a utilizar la computadora como un ayudante necesario, despiertan aptitudes y actitudes que hacen que el método de resolución no se someta al software sino que por el contrario lo influya y determine.
La disponibilidad de computadoras en las aulas o herramientas alernativas ofrece un escenario con muchas posibilidades para el planteo y resolución de problemas al estilo de la metodología de Polya, introduciendolos a través de una situación descripta en términos del lenguaje familiar.
Aquí, el caso se presenta por medio de una historia que induce al alumno a explorar propiedades de funciones y de congruencias usando fuertemente la computadora aunque dentro del relato parece enfatizarse (algo cómicamente) su prescindencia.

INTRODUCCIÓN

Congruencia módulo n y biyectividad son temas de un primer curso de Álgebra para la carrera de Matemática, Física e Ingeniería en Sistemas de nuestra Facultad de Ciencias Exactas.

Asegurados estos conocimientos previos, la disponibilidad de un software matemático con las funciones Mod y List, y la cantidad de terminales necesarias, el docente elige presentar un caso sobre el que el alumno podrá identificar el problema y desarrollar una serie de habilidades y nociones algebraicas elementales.

DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

Primera Etapa: Formulación del Problema

Comenzamos nuestra experiencia relatando a los alumnos la siguiente historia:

"*Personajes: Profesor de matemática Toto y su discípulo Tito.*

Lugar: Oficina del alumno Tito, cerca del mediodía.

[•] Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina.

larebora@arnet.com.ar

El alumno Tito se encuentra muy concentrado realizando cálculos. En ese momento entra el profesor Toto. Se produce el siguiente diálogo:

- **Profesor Toto**: Alumno Tito, es hora del almuerzo.
- **Alumno Tito**: Lamento no acompañarlo profesor. Vea esta lista de números, yo se que son cubos de números enteros de no más de tres cifras, pero como no traje mi calculadora para extraer su raíz cúbica, estoy desarrollando el algoritmo tradicional a mano.
- **Profesor Toto**: ¡Ajá! Veo que el primero es el número 75.686.967, que tiene como raíz cúbica a 423 y como usted ve, yo tampoco tengo calculadora.
- **Alumno Tito**: ¡Gracias! Uno menos. Pero tengo tantos números que estas casualidades no me ayudan del todo.
- **Profesor Toto** (herido en su amor propio): ¡Alumno, esto no es una casualidad!. Usted me puede decir el cubo de cualquier número entero de hasta tres cifras y yo rápidamente, sin calculadora le diré cuál es su raíz cúbica. Vamos a comer y durante el almuerzo le revelaré el secreto.

Mientras profesor y alumno se alejan hacia el comedor sólo pudimos escuchar frases sueltas de las que registramos "propiedades de funciones...", "congruencias...", ...".

En esta primera etapa el estudiante interpretará el significado de la historia. El docente lo guiará para que verbalice su tarea, la cual será explicar el algoritmo rápido del Profesor Toto, planteando formalmente el problema en lenguaje matemático:

Si x y M son números naturales y sabemos que:

- $x^3 = M$
- $x \leq 999$

debemos investigar si existen propiedades aritméticas que hagan posible determinar el valor de x conociendo M utilizando biyectividad y congruencia (sin sacar la raíz).
Además los alumnos perciben que la característica principal del algoritmo del Profesor Toto es la rapidez de respuesta considerando que no se empleó ningún instrumento.

Segunda Etapa: Investigación

Se registró que el 34% de los alumnos comenzó calculando cubos de números distintos de dos y tres cifras en forma desordenada para descubrir regularidades en la relación entre números y sus cubos.

Mientras el 42% de los estudiantes efectuó tabla de cubos con el utilitario Mathematica definiendo la función:

t[n_] := Table[{i,i^3},{i,0,n}]; t

Por ejemplo, TableForm[t[10]] da como resultado:

TableForm[t[10]]

0	**0**
1	**1**
2	**8**
3	**27**
4	**64**
5	**125**
6	**216**
7	**343**
8	**512**
9	**729**

Tabla I

Se observó que:

a) en la primera serie de 0 a 9 las últimas cifras de los cubos son todas distintas

y

b) que las últimas cifras de los cubos se repiten en un patrón de 10 en 10 a partir de la primera serie es decir

Propiedad 1

La última cifra de A^3 coincide con la última cifra del cubo de la última cifra de A

A partir de estas respuestas parciales el docente induce el uso de conocimientos previos para que expresen sus resultados en lenguaje matemático adquirido haciendo hincapié en cuestiones como:

a) ¿Qué significa *todos distintos?,*

b) ¿Qué significa *la última cifra* en el lenguaje de congruencias*?*

Las respuestas se presentan así:

a) Elevar *al cubo lo*s números de 0 a 9 y tomar *módulo 10* es una función inyectiva.

b) Sabemos que si $x \equiv y \ \mathbf{mod} 10$ entonces $x^3 \equiv y^3 \ \mathbf{mod} 10$ de manera que si x es un número cualquiera su última cifra es su clase módulo 10, y si, digamos c, es esta última cifra podemos escribir

$$x = 10b + c \equiv c \ \mathbf{mod} 10 \ \textit{de lo que se deduce:} \ x^3 \equiv c^3 \ \mathbf{mod} 10.$$

Ahora supongamos a que x es un número de no más de tres cifras, digamos

$$x = 100\,a + 10\,b + c$$

y conocemos x^3, entonces conocemos c.

¿Cómo conocer a y b?

El 27% del total de alumnos que realizaron la tabla del 0 a n, manifestaron que habían observado que los cubos de los números entre 10 y 19 se mantenían mayores que el cubo de 10 y menores que el cubo de 20 y así entre 20 y 30, etc..

Ante la demanda del docente por una explicación de este hecho, el 10% logró establecer el siguiente resultado:

desde que la funciones x^3 *y* $\sqrt[3]{x}$ *son monótonas crecientes se cumple la siguiente propiedad,*

Propiedad 2.

Dado un natural x, se verifica

$$a_n 10^n \leq x \leq 10^n (a_n + 1) \quad \textit{si y solamente si} \quad (a_n 10^n)^3 \leq x^3 \leq \left(10^n (a_n + 1)\right)^3$$

Tercera Etapa: Deducciones

En este momento estamos en condiciones de afirmar que el número 75.686.967, el primero en la lista de Tito, por ser mayor que 10^6 proviene de elevar al cubo un número de tres cifras:

$$x = a100 + b10 + c$$

Por la propiedad 1. debe ser c=3 pues $3^3 \equiv 7\,\mathbf{mod}\,10$ (ver tabla I)

Por la propiedad 2. es posible eliminar las últimas seis cifras y comprobar sólo que:

$$4^3 = 64 \leq 75 \leq 125 = 5^3$$

luego a=4 (ver tabla I). De manera que:

$$x = 4 \times 100 + b10 + 3$$

Por el momento, se conocen la primera y la última cifra de la raíz cúbica del cubo dado con lo cual si el número original era de dos cifras (dividiendo el número dado por 1000) el problema está resuelto y con algunas modificaciones el algoritmo del Profesor Toto puede ser objeto de estudio en cursos de la escuela media.

Pero en nuestro caso el número original es de tres cifras, entonces falta determinar la cifra *b*.

Ahora bien, dentro del marco de los conocimientos previos que delimitan el enunciado del problema el alumno está fuertemente orientado a utilizar argumentos relacionados a conceptos de congruencia.

Inicialmente el 18% de los alumnos comenzó a estudiar el problema, siempre usando el Programa Mathematica, con la función Expand:

Expand[(100^a+10b+c)^3]

$1000000\, a^3 + 300000\, a^2 b + 30000\, a\, b^2 + 1000\, b^3$

$30000\, c\, a^2 + 6000\, a\, b\, c + 300\, c\, b^2 + 300\, a\, c^2 + 30\, b\, c^2 + c^3$

En particular los dos últimos sumandos: $30bc^2 + c^3$, en los que figura un dato c y la incógnita b, son los que determinan las dos últimas cifras del cubo (sin ser perturbadas por otras cantidades que están multiplicadas por 100, 1000, etc.). Efectuaron varias tablas para distintos valores de c y b. Por ejemplo, para c=2

Table [30*b*4,{b,0,9}]

{0, 120, 240,360, 420, 600, 720, 840, 960, 1080}

No se distinguen los siguientes pares de valores de b: 0 del 5, 1 del 6, 2 del 7, 3 del 8, ni 4 del 9.

En los casos en que c= 5, también surgen valores que no permiten deducir en forma inmediata el valor de b como se observa en la siguiente tabla:

Table [30*b*25,{b,0,9}]
{0, 750,1500,2250,3000, 3750, 4500, 5250, 6000, 6750}

Los mismos alumnos reconocieron que este camino era inconducente a los efectos de la implementación veloz.

Un alumno propone proceder por analogía, en vista de que elevar al cubo y calcular módulo 10 es una función inyectiva, buscar un número n mayor que 10 que tenga la misma propiedad, es decir, que elevar al cubo y tomar módulo n sea una función inyectiva para los números de 0 a n.
Por ejemplo, para calcular los cubos módulo 11:

TableForm[Mod[t[10],11]

0	**0**
1	**1**
2	**8**
3	**5**
4	**9**
5	**4**
6	**7**
7	**2**
8	**6**
9	**3**
10	**10**

Tabla II

Observemos que: $10^3 \equiv (-1)^3 = -1 \equiv 10 \ \mathbf{mod} 11$

Así, se concluye:

Elevar al cubo y tomar módulo 11 los números del conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} es una inyección.

Pero necesitamos calcular la clase modulo 11 de números de varias cifras. Recordemos el criterio de divisibilidad por 11.

Sabemos que

$$10 \equiv -1 \quad \mathbf{mod}\ 11$$

por lo tanto

$$10^n \equiv (-1)^n \quad \mathbf{mod}\ 11$$

Luego:

$$x \equiv 100 \times a + 10b + c \equiv a - b + c \quad \mathbf{mod} 11$$

Así como los valores de *a* y *c* son conocidos, en el caso del número $x^3 = 75.686.967$ podemos hallar *b* con una cuenta simple:

$$x^3 \equiv 7\text{-}6\text{+}9\text{-}6\text{+}8\text{-}6\text{+}5\text{-}7 \equiv 4 \ \mathbf{mod}\ 11$$

Mirando la tabla II vemos que a 4 corresponde 5, es decir $x \equiv 5 \ \mathbf{mod}\ 11$.

Así que $a - b + c \equiv 7 - b \equiv 5 \mathbf{mod} 11$ *de donde* $-b \equiv -2 \ \mathbf{mod} 11$ y *resulta b=2.*

CONCLUSIONES

El grupo fue notablemente motivado por el relato y los porcentajes de participación en etapas iniciales se registraron a niveles que superaron ampliamente el 35 %. En el transcurso de la clase se produce la validación e institucionalización del conocimiento y finalmente la síntesis del trabajo realizado se expresa en pruebas reiteradas del algoritmo.

En definitiva utilizando los elementos teóricos que creímos escuchar en la conversación del Profesor Toto y su alumno, hemos arribado a un pequeño algoritmo, muy propio para "una prueba de magia" con el que podremos impresionar nuestras amistades, pues solo requiere que memoricemos las tablas I y II y resolvamos una ecuación muy simple.

Crecimos oportuno bautizar dicho algoritmo en honor al Profesor Toto con su propio nombre.

BIBLIOGRAFÍA

Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascon, J., *Estudiar Matemática*. *El eslabón perdido entre la Enseñanza y el Aprendizaje*. Horsori. Barcelona. 1997.

Gavrilov, G. P., Saposhenko, A. A. *Problemas de Matemática Discreta*. Editorial MIR, 1980.

Grimaldi, Ralph P. *Matemáticas, discreta y combinatoria*. Addison-Wesley Iberoamericana. 1989.

Liu, C. L., *Elementos de Matemáticas Discretas.* McGrow-Hill .1995.

Niven, Ivan. *Matemática de las Opciones o cómo contar sin contar*. Red Olímpica 1995.

Ross, Kenneth, A., Wright Charles R.B. *Matemáticas Discretas*, Prentice Hall Hispanoamericana, 1990.

Polya, G., *Mathematical discovery*, Wiley: New York, 1968.

Polya G., *Métodos matemáticos de la ciencia*, Colección la tortuga de Aquiles: Madrid, 1994,

INGRESANTES A LA UNIVERSIDAD Y LOS ERRORES EN GEOMETRÍA ELEMENTAL

Rechimont, Estela E. - Ferreyra, Nora C. - Pedro, Inés C.
Dieser, Ma. Paula - Scarímbolo, Ma. Daniela

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de La Pampa

Como docentes de los primeros años del Profesorado y Licenciatura en Matemática, trabajando en el área Geometría, hemos observado errores comunes y repetidos en los alumnos y, considerando que muchos de ellos han cursado los niveles educativos anteriores con una predisposición natural hacia la matemática, estos errores básicos ponen de manifiesto la existencia de una problemática en torno a la adquisición de algunas capacidades. A raíz de estas sucesivas observaciones trataremos de distinguir, y poner de manifiesto en dicha distinción, algunos de los errores que se incorporan en los procesos de enseñanza- aprendizaje, en el sistema educativo o tal vez antes, y que observamos se han mantenido hasta el comienzo de la enseñanza universitaria.
Nuestros objetivos son:

- Determinar cuáles son algunos de los errores en temas de Geometría Elemental, que han permanecido en el tiempo, a través de varios años de escolaridad y se manifiestan aún en los umbrales de la educación universitaria.
- Analizar si la temática que incluye los conceptos detectados con errores está incluida en los currículums escolares vigentes y con qué profundidad está previsto su tratamiento en las instituciones educativas.

INGRESANTES A LA UNIVERSIDAD Y LOS ERRORES EN GEOMETRÍA ELEMENTAL

Introducción

Con algunas reformas curriculares se favoreció, por diversos motivos, la enseñanza de las "matemáticas modernas"; dejando de ocupar la Geometría un lugar de privilegio. En la selección de contenidos prioritarios, la mayoría de los docentes se abocó al tratamiento de otras áreas de la matemática, cayendo paulatinamente en el extremo, en muchos casos, de abandonar cualquier tipo de experiencia visual y constructiva en torno a la Geometría.

Como docentes de los primeros años del Profesorado y Licenciatura en Matemática, trabajando en el área Geometría, hemos observado errores comunes y repetidos en los alumnos y, considerando que muchos de ellos han cursado los niveles educativos anteriores con una predisposición natural hacia la matemática, estos errores básicos ponen de manifiesto la existencia de una problemática en torno a la adquisición de algunas capacidades. Dada la permanencia de estos errores en alumnos del ciclo universitario, podría pensarse que los mismos no fueron detectados por el docente de ciclos anteriores o no fueron asumidos como tales por el propio alumno. De una u otra forma pareciera que no pudieron ser tratados para su posterior remediación o su tratamiento no tuvo éxito.

A raíz de estas sucesivas observaciones nos preguntamos en qué instancia de la relación docente-alumno-saber comienza el problema de la incorporación errónea del concepto en cuestión que, en algunos casos, es "arrastrado" a lo largo de varios años del proceso educativo. Esto es, trataremos de distinguir, y poner de manifiesto en dicha distinción, algunos de los errores que se incorporan en los procesos de enseñanza- aprendizaje, en el sistema educativo o tal vez antes, y que observamos se han mantenido hasta el comienzo de la enseñanza universitaria.

Objetivo

Los objetivos que nos hemos planteado en este trabajo pueden explicitarse de la siguiente manera:

- Determinar cuáles son algunos de los errores en temas de Geometría Elemental, que han permanecido en el tiempo, a través de varios años de escolaridad y se manifiestan aún en los umbrales de la educación universitaria.
- Analizar si la temática que incluye los conceptos detectados con errores está incluida en los currículums escolares vigentes y con qué profundidad está previsto su tratamiento en las instituciones educativas.

Marco Teórico

Los obstáculos epistemológicos

El concepto de obstáculo epistemológico fue formulado por Gastón Bachelard, filósofo y epistemólogo, quien en 1938 escribió "*La formación del espíritu científico",* para considerar que es "en términos de obstáculos como debe plantearse el problema del conocimiento científico".

Los especialistas en didáctica llevan este concepto a la matemática y es Brousseau quien comienza a tratar los obstáculos epistemológicos en esta ciencia, viendo en ellos el medio para cambiar el rol del error en la enseñanza.

Según Brousseau *"El error y el fracaso no tienen el papel simplificado que a veces se les quiere asignar. El error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, sus logros, pero que ahora, se revela falso, o simplemente inadecuado. Los errores de este tipo no son erráticos o imprevisibles, sino que constituyen obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido".*

Las concepciones anteriores, los modelos implícitos existentes en el cerebro del alumno, determinan obstáculos frente a adquisiciones posteriores y se manifiestan en forma de errores. Una de las características de estos obstáculos es que oponen resistencia a ser modificados y aún luego de ser conscientemente rechazados siguen manifestándose.

El aprendizaje es concebido como superación de obstáculos.

Brousseau considera que existe continuidad en la adquisición de los conocimientos, tanto a lo largo de la historia de la ciencia como en el desarrollo de los aprendizajes escolares. En este marco, los obstáculos surgidos frente a un saber particular y su posterior superación dentro del sistema escolar pueden buscarse en la historia y evolución de ese concepto.

La manifestación de errores revela una comprensión incompleta de determinados conceptos, esto es, obstáculos no superados.

Los obstáculos didácticos

Los obstáculos didácticos son aquellos surgidos y detectados en la práctica pedagógica, en el interior de las situaciones didácticas.

Se pueden clasificar según su origen en tres clases diferentes, a saber:

- De origen ontogenético: se consideran en esta clase a los obstáculos debidos a las limitaciones de las capacidades cognitivas del alumno en determinado momento de su desarrollo intelectual. Se incluyen aquí, por ejemplo, restricciones neurofisiológicas, entre otras.
- De origen didáctico: son aquellos derivados de las elecciones didácticas llevadas a cabo durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. Podemos señalar que estos obstáculos dependen del proceso de transposición didáctica y están fuertemente ligados al contrato didáctico. Existen muchas otras variables a las cuales está supeditado el obstáculo, pero dado que en las situaciones de aula intervienen individuos y factores diferentes e independientes es difícil hacer una clasificación estricta de las diversas interacciones en el momento de generarse el error.
- De origen epistemológico: Son aquellos ligados al origen del concepto en cuestión y que en su momento permitieron construirlo. Se pueden clasificar en inevitables y evitables según el trabajo didáctico que pretende llevar adelante el docente

La Encuesta

En función de los errores comunes y repetidos observados en los alumnos de los primeros años del Ciclo Universitario de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa, en la cual desempeñamos funciones docentes, elaboramos un conjunto de consignas que fue entregado a los mismos a efectos de analizar la producción correspondiente a lo solicitado.

En la búsqueda de una herramienta que nos brindara información acerca de la realidad de los alumnos ingresantes a nuestra Facultad, se analizaron distintas alternativas. El número de alumnos nos permitía realizar un análisis de toda la población, centrándonos en un tratamiento de tipo cualitativo del problema.

La posibilidad de analizar el comportamiento individual frente a determinadas consignas implicaba mayor cantidad de tiempo y la inutilización de la prueba frente al inevitable comentario de los ya examinados. Es por ese motivo que se definió la realización de una prueba escrita.

Para la redacción del examen se tuvieron en cuenta no sólo las experiencias personales de docentes de esta Institución sino también trabajos que sobre algunos conceptos han realizado investigadores con alumnos de EGB.

Detectamos que lo que prevalecía eran los errores en cuanto a:

- utilización en algunos problemas del concepto de altura
- confusión entre área y perímetro
- uso de elementos de geometría en construcciones elementales
- dificultades para interpretar y reconocer movimientos en el plano
- elementos notables de un triángulo (no diferencian entre mediatriz, mediana, altura y bisectriz)
- unidades de medida
- aplicación de teorema de Pitágoras en cualquier tipo de triángulo
- conceptos de recta, semirrecta, segmento, plano.

De todos los mencionados, se centró la atención en los concepto de altura de un triángulo y de un cuadrilátero, área de un triángulo y desigualdad triangular (previendo que en el último de los temas surgirían dificultades en la construcción de la figura).

Por lo anterior surgen las tres consignas (de la prueba) que pretendemos pongan de manifiesto los errores en cuanto a:

- Alturas en figuras elementales dada la posición de la misma
- Cálculo de áreas
- Construcción elemental

Consideraremos particularmente los errores persistentes, es decir aquellos que muestren algún tipo de repetición y se manifiesten aún en relación a otros conceptos.

De las encuestas entregadas a alumnos de las carreras Profesorado en Matemática, Prof. En Computación, Lic. En Matemática, Lic. En Física, Ing. en Recursos Naturales y Medio Ambiente, Lic. y Prof. en Ciencias Biológicas y Profesorado en Química, se recogieron para su análisis 83.

La mayoría de ellos accedió con buena disposición a responder a las consignas del trabajo.

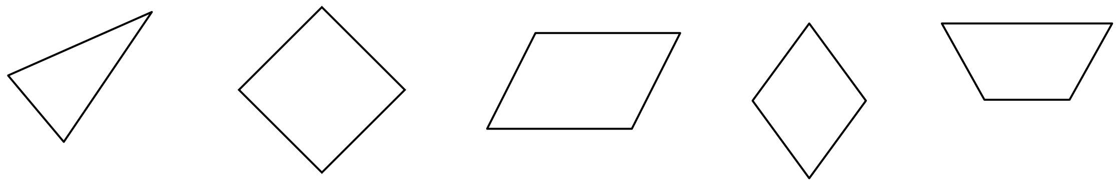
La prueba fue tomada por los profesores de las distintas asignaturas de primer año y sin la presencia permanente de los investigadores.

El modelo de encuesta que se entregó es el siguiente:

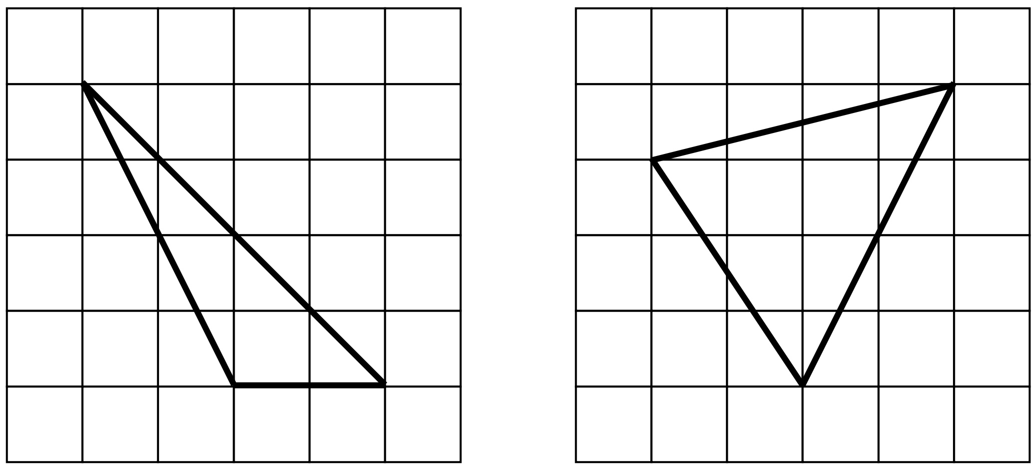
Encuesta

Por favor resuelva en esta hoja. Realice todas las observaciones que considere necesarias.

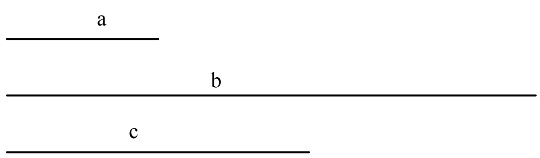
1) Trace las alturas a cada una de las siguientes figuras:



2) Calcule de dos maneras diferentes el área de cada triángulo (Puede utilizar regla para efectuar las mediciones)



3) Construya, si es posible, un triángulo que tenga a los siguientes segmentos como lados:



Respuestas obtenidas

Pese a la dificultad de traducir la información recogida en valores numéricos, se han elaborado cuadros (ver anexos) que resumen los resultados tratando de describir todos los casos detectados.

Dejaremos de lado cualquier tipo de análisis acerca de la interpretación de consignas o dificultades en el manejo del vocabulario no específico, lo cual podría conducirnos a observaciones muy ricas pero no previstas en este trabajo.

Análisis de las respuesta de los alumnos a las cuestiones planteadas

En el ejercicio 1 es notoria la concepción de altura vertical, este obstáculo de tipo "cultural" ha sido detectado en niños en otras investigaciones, pero no tenemos referencias de su análisis en niveles superiores. Este error se hace más evidente en los casos de trazado de alturas en rombo y cuadrado (73,49% y 55,48% respectivamente), es muy llamativo que casi la mitad de los alumnos ni siquiera intentaron resolver la situación para el cuadrado y en el caso del rombo, si bien hubo mayor cantidad de respuestas, todas ellas son erróneas.

En algunos casos se observó la confusión, en algunas figuras, de alturas con diagonales, independientemente de la noción de verticalidad, como se ve en los casos del paralelogramo y del trapecio.

En situaciones aisladas, aferrándose a sus conocimientos en torno al cuadrado, trazaron alturas paralelas a los lados de la figura.

Pareciera que es familiar el trazado en triángulos, ya que es la única figura que, en algunos casos escapa del error de la verticalidad. Es más, podríamos suponer que se limita este conocimiento a triángulos acutángulos (ó bien isósceles).

En la consigna se sugería la existencia de más de una altura, sin embargo, salvo algunos alumnos, para algunas figuras, no intentaron trazar más de una. Aún más, en el triángulo isósceles sólo se trazó la altura correspondiente al lado no congruente.

En el ejercicio 2 se evidencia una muy buena memoria para recordar la fórmula del área del triángulo, escriben la fórmula pero no pueden efectuar el cálculo al no poder trazar la altura. Esto denota una falencia en la fundamentación teórica del concepto, lo que imposibilita la transferencia a la práctica, más aún viendo que en ocasiones, en el ejercicio anterior trazaron alturas independientemente de otros cálculos o procedimientos posteriores.

Es evidente que se asocia el concepto área a una fórmula y no se le asigna el significado de medida de una superficie, dado que sólo en un caso aislado se aprovechó la existencia de la cuadrícula para efectuar el cálculo solicitado y finalmente se resolvió de manera errónea.
En la mayoría de los casos analizados se evidencia una falta de coherencia entre la determinación de la altura del triángulo en el primer ejercicio y el trazado de la misma para el cálculo del área. Pareciera que la cuadrícula impuesta en el ejercicio dificultara el reconocimiento de la altura, interpretando que este cuadriculado implica la existencia de otros procedimientos no tan explícitos. Este tipo de reacciones o respuestas frente a consignas no estándares tienen su justificación en pautas impuestas generalmente desde el contrato didáctico.
Podemos distinguir entre los errores detectados en el dominio de la definición, como sería el referido a altura del triángulo en el ejercicio 1, y los errores referidos a la aplicación del concepto, como en el ejercicio 2.
El ejercicio 3 sólo fue resuelto correctamente, justificando su respuesta, por el 3,6% de los alumnos, mientras que el 26,5% resolvió bien pero sin justificar. El 22,9% intentó una resolución a partir de la construcción del triángulo, sin embargo es notable el alto porcentaje (31,3%) que ni siquiera intentó una construcción para aproximarse a una respuesta.
Luego del análisis de las pruebas propuestas a alumnos ingresantes en las carreras Profesorado en Matemática, Prof. en Computación, Lic. en Matemática, Lic. en Física, Ing. en Recursos Naturales y Medio Ambiente, Lic. y Prof. en Ciencias Biológicas y Profesorado en Química, de la UNLPam., podemos concluir que en los conceptos “altura de triángulos y de cuadriláteros”, “área de triángulos” y “desigualdad triangular” se detectan errores no superados por la mayoría de estos alumnos.
Si bien la metodología de trabajo de tipo cualitativa no permite su generalización, podríamos suponer que en el contexto de la Pcia. de La Pampa, en la actualidad, se obtendrían resultados similares en la mayoría de los alumnos ingresantes a la universidad.

Análisis de los diseños curriculares vigentes

El Sistema Educativo en la República Argentina está organizado en dos grandes estructuras: la Educación General Básica y la Educación Polimodal. La primera es obligatoria y abarca diez años de escolaridad, desde el nivel inicial (5años) hasta el noveno año. La Educación Polimodal no es obligatoria y comprende tres años que habilitan para el ingreso a la Universidad.

En el marco de la Ley Federal de Educación, la Educación General Básica se halla organizada en tres ciclos de tres años cada uno.

Con el fin de realizar un seguimiento del desarrollo de los temas en cuestión dentro de los distintos tramos del Sistema Educativo Pampeano, analizamos los diseños curriculares correspondientes a los tres niveles de la Educación General Básica de la Provincia de La Pampa.

Primer Ciclo

El Primer Ciclo comprende los tres primeros años de la EGB. Según el Diseño Curricular EGB1, versión preliminar (y definitiva) 1.998 del Ministerio de Cultura y Educación de la Provincia de La Pampa, la estructura curricular de este primer ciclo contempla el área Matemática con un total de ocho horas cátedras semanales.

Dentro de las Expectativas de Logro para el primer ciclo, vinculadas a nuestro proyecto de investigación, señalamos:

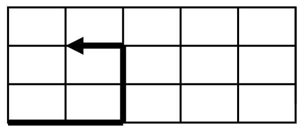
- Desarrollar habilidades de cálculo exacto y aproximado, medida y representación geométrica, y de estrategias personales de resolución de problemas que impliquen el uso de la intuición, la creatividad y los razonamientos analógico e inductivo.
- Usar el lenguaje oral, gráfico y escrito para expresar conceptos y explicar procedimientos matemáticos, desde una actitud reflexiva sobre las producciones propias y ajenas.

Uno de los Criterios de Acreditación de este ciclo que podemos mencionar es:

- Identificarán, describirán y construirán figuras y cuerpos, reconociendo y nombrando sus partes (lados, vértices, aristas, etc.)

En el documento analizado, los contenidos para el primer ciclo se encuentran organizados en tres ejes que contienen los bloques originales de los Contenidos Básicos Comunes fijados por normativa a nivel nacional. El eje 2, "Espacio y medida", corresponde a los bloques "Nociones geométricas" y "Mediciones", incorporando los correspondientes del bloque "Lenguaje gráfico y algebraico".

Dentro de los contenidos del eje "Espacio y medida", podemos mencionar:

1er Año	2do Año	3er Año
- Uso de la regla para el trazado de rectas. - Figuras: forma cuadrada, rectangular, triangular, circular.	- Posiciones de rectas: horizontales, verticales, inclinadas. - Figuras: cuadrado, rectángulo, círculo, triángulo. Elementos: vértices y lados. - Dibujo de figuras usando regla.	- Descripción, interpretación y elaboración de recorridos utilizando códigos. Ejemplos: 2→ 2↑ 1←  - Relación de paralelismo y perpendicularidad. - Posiciones entre rectas paralelas, perpendiculares y oblicuas. - Investigación de relaciones entre los lados de triángulos y de cuadriláteros: medida, paralelismo y perpendicularidad. - Comunicación o interpreta-ción de características que permitan identificar o representar gráfica-mente una figura dada. Dibujo y reproducción de figuras usando regla y escuadra.

Si bien los contenidos están claramente especificados, el tratamiento que de ellos puede hacerse es muy variado, y de hecho debe serlo, según el desarrollo psicológico y cognitivo de los alumnos. Buscamos apoyo en las Orientaciones Didácticas explicitadas al final del capítulo correspondiente al área Matemática. De esta lectura surgen algunas observaciones:

La reflexión sobre la enseñanza de la Geometría en la Escuela nos lleva a delimitar una serie de problemas que se pueden resumir como:

[...]

- *Cómo compatibilizar el carácter variable, aproximado, de los resultados logrados a través del cálculo. Por ejemplo, los valores obtenidos para el área de un triángulo contando cuadritos, con el valor obtenido aplicando la fórmula, a partir de medidas dadas de base y altura. ...*

Dado que en la grilla de contenidos no figuran explícitamente los conceptos de área, altura ni base de un triángulo, es probable que el tratamiento que se da a los mismos dependa del docente.

- En cuanto al trazado de rectas y la comunicación de sus características, nos surge la inquietud de saber si de alguna manera se incluyen las rectas oblicuas o se privilegian las direcciones vertical y horizontal.

Además, dentro de las Orientaciones Didácticas encontramos:

"Las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad y oblicuidad de rectas direccionan el espacio posibilitando la ubicación y orientación en él y dar información al respecto ("... paralelo a la calle principal…", "... perpendicular al lago…", "... sale oblicuo a…").

Esta reflexión indica que existe preocupación respecto de las direcciones lineales las cuales deberán ser permanentemente consideradas para una correcta ubicación en el plano y en el espacio.

Como estas nociones están consideradas en los tres años de este ciclo, el docente, tal como se propone en estas Orientaciones, "…*deberá elaborar, proponer y conducir situaciones para diagnosticar los conocimientos previos de los alumnos en relación al conocimiento a enseñar, una secuencia de situaciones para que los alumnos construyan, reutilicen y se familiaricen con los conocimientos a enseñar, y tareas de control de los aprendizajes."*

También se señala que "…*Es fundamental que el docente pueda interpretar los errores de los alumnos, y que proponga tareas de remediación de esos errores en función de los orígenes de los mismos."*

Esto implicaría una sugerencia al docente para que realice en cada año, y previo al tratamiento de las nociones que se quieren abordar, un diagnóstico acerca de los saberes previos de los alumnos para profundizar o no sobre tales conceptos y detectar los errores si es que los hubiera para su posterior remediación.

Segundo Ciclo

El Segundo Ciclo comprende el cuarto, quinto y sexto años de la EGB. Según el Diseño Curricular EGB2, versión preliminar (y definitiva) 1.999 del Ministerio de Cultura y Educación de la Provincia de La Pampa, la estructura curricular de este segundo ciclo contempla el área Matemática con un total de seis horas cátedras semanales.

Dentro de las Expectativas de Logro para el segundo ciclo, vinculadas a nuestro proyecto de investigación, señalamos:

- Reconocerán, identificarán, nombrarán, clasificarán, describirán y construirán figuras y cuerpos, reconociendo propiedades y la existencia de simetrías, utilizando, en forma correcta, los útiles de geometría.
- A través de las mediciones con distintos instrumentos reconocerán la inexactitud de las mismas, determinando el posible grado de error, tratando de construir y utilizar instrumentos adecuados al elemento a medir, permitiendo, a partir de las generalizaciones la construcción de las fórmulas de perímetro y área de las figuras geométricas.
-

Uno de los Criterios de Acreditación de este ciclo que podemos mencionar es:

- Utilizar los instrumentos de geometría con propiedad para la construcción de figuras.
- Construir y utilizar fórmulas de perímetro y área de figuras geométricas para resolver problemas con diferentes estrategias.

Dentro de los contenidos del eje "Mediciones y Nociones Geométricas", podemos mencionar:

4to Año	5to Año	6to Año
- Rectas paralelas y perpendiculares.	- Área. Comparación de áreas.	

Trazado de rectas paralelas y perpendiculares a través del uso de la escuadra.	- Cálculo de área de figuras simples utilizando cubrimiento con cuadrículas. - Clasificación, reproducción, descripción y representación de triángulos. - Clasificación, reproducción, descripción y representación de cuadriláteros. Polígonos. Reconocimiento de las figuras y sus elementos.	- Deducción y utilización de fórmulas para cálculos de áreas de figuras simples. - Resolución de situaciones problemáticas que impliquen el cálculo de áreas a partir de la descomposición en polígonos simples de figuras de distintas formas. - Trazado de las alturas de un triángulo. - Construcción de triángulos y cuadriláteros con regla y compás.

Luego de analizar la grilla de contenidos, nos preguntamos cuál es el tratamiento que se hace del cálculo de área utilizando cubrimiento con cuadrículas. La resolución de estas situaciones, ¿tiene el objetivo de deducir la fórmula o de construir el sentido del concepto de área?. Pareciera que el concepto de área necesariamente implica la existencia y la utilización de una fórmula.

Dentro de las Orientaciones Didácticas, se sugiere la utilización del método de las lentejas, el cual se describe como *"…una actividad simple que permite, por medio del cubrimiento, calcular superficies irregulares, partiendo de la lenteja como unidad de medida…"* ¿Por qué se propone esta actividad solamente para figuras irregulares?, ¿se presenta en el aula para otras figuras? ¿Se explicita en algún momento, la idea de aproximación al verdadero valor del área, que subyace a este trabajo? Esta situación podría convertirse en un obstáculo para la incorporación del concepto de área. ¿Se comparan los resultados obtenidos mediante los diferentes procedimientos (fórmulas o cubrimientos)?.

En cuanto al trazado de las alturas de un triángulo, ¿cuál es la definición de altura que se presenta en este ciclo?, ¿las actividades propuestas incluyen triángulos en distintas posiciones?, ¿se trazan "las" alturas o se privilegia una en particular?

Tercer Ciclo

El Tercer Ciclo comprende el séptimo, octavo y noveno años de la EGB. Según el Diseño Curricular EGB3, versión preliminar (y definitiva) 1.997 del Ministerio de Cultura y Educación de la Provincia de La Pampa, la estructura curricular de este tercer ciclo contempla el área Matemática con un total de cinco horas cátedras semanales.

Dentro de las Expectativas de Logro para el tercer ciclo, vinculadas a nuestro proyecto de investigación, señalamos:

- Reconocerán y aprenderán a usar para la resolución de problemas, las propiedades de las formas bidimensionales y tridimensionales, y aplicar los conceptos de medida, ubicación, transformación en el estudio del espacio.

Uno de los Criterios de Acreditación de este ciclo es:

- Identificar, nombrar, clasificar, relacionar, describir, descomponer, recomponer, reproducir y construir figuras y cuerpos, aplicando sus propiedades y utilizando adecuadamente los instrumentos de geometría.
- Construir y utilizar fórmulas de área y volumen de figuras y cuerpos geométricos para resolver problemas con diferentes estrategias.

Dentro de los contenidos del eje "Nociones Geométricas y Mediciones", podemos mencionar:

7mo Año	8vo Año	9no Año
- Construcción de fórmulas para el cálculo y uso de perímetros y áreas de figuras planas empleando variados recursos. Construcción de figuras planas utilizando los instrumentos de geometría. - Relación perímetro y área.		- Resolución de problemas aplicando las fórmulas de áreas de distintas figuras planas.

En las Orientaciones Didácticas contempladas en los materiales curriculares para el Tercer Ciclo se considera que *"... Las relaciones entre perímetro y área, entre área y volumen deberán abordarse desde el marco gráfico (geométrico y funcional) y numérico (el énfasis sobre cada aspecto en particular se dará de acuerdo al año)."*
Se pone de manifiesto que el uso del TANGRAM, antiguo puzzle chino, sería conveniente para trabajar relaciones entre perímetro y área.
Por otro lado, respecto de la "construcción de fórmulas para el cálculo de áreas y perímetros", nos surge el interrogante acerca de cuáles son los procedimientos puestos en juego en esa construcción.
Como en este ciclo no se introducen los conceptos paralelismo y perpendicularidad de rectas o alturas y área de triángulos, pues ya fueron trabajados en los ciclos anteriores, nos interesaría saber qué uso se hace de ellos en otros problemas geométricos presentados. Nos preguntamos si estos conocimientos ya adquiridos sirven como base para la construcción de otros conceptos, o bien si el docente los retoma, en algún momento, para asegurarse de que estén bien incorporados.

Conclusión

Luego del análisis de las pruebas propuestas a alumnos ingresantes en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa, podemos concluir que en los conceptos "altura de triángulos y de cuadriláteros", "área de triángulos" y "desigualdad triangular" se detectan errores no superados por la mayoría de estos alumnos.
Del análisis de los documentos curriculares, podemos afirmar que los temas detectados con errores en el nivel universitario, están considerados para su desarrollo en alguno de los ciclos de la Educación General Básica.
Si bien nos quedan interrogantes respecto del tratamiento real de los mismos podemos suponer que se efectúa algún tipo de consideración, con lo cual los errores dependerían de la discontinuidad en el desarrollo de los conceptos ó de una adquisición errónea y no detectada, para una posible remediación posterior.

INGRESANTES A LA UNIVERSIDAD Y LOS ERRORES EN GEOMETRÍA ELEMENTAL

Rechimont, Estela E.- Ferreyra, Nora C.- Pedro, Inés C.-
Dieser, Paula - Scarímbolo, Ma. Daniela

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de La Pampa
Rechimont@exactas.unlpam.edu.ar
Francis@cpenet.com.ar

Dirección Postal:
Rechimont Estela
Padre Buodo 604
(6300) Santa Rosa
La Pampa
TE: 02954-455486

Estrategias didácticas para desarrollar procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática asistidos por computadora

M.B.A. Luis Gerardo Meza Cascante[1]
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Resumen: para desarrollar procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática asistidos por computadora debemos encauzar los esfuerzos, realizar las actividades y utilizar los recursos de manera apropiada para asegurar el logro de los objetivos educativos propuestos. Para lograrlo debemos conocer y aplicar las estrategias didácticas apropiadas, mismas que se describen en este trabajo.

En un trabajo anterior, en coautoría con Garita y Villalobos (1997), planteamos que en los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática asistidos por computadora, se deben considerar los siguientes principios:

- El uso de la computadora en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática debe enmarcarse en un planeamiento educativo.
- La computadora debe incorporarse en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática sólo cuando sea más eficaz o más eficiente que otros medios.
- La incorporación de la computadora en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática permite aumentar la eficacia o la eficiencia de algunas estrategias que el docente utilizaba antes de incorporar la computadora.
- El empleo de la computadora en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática permite diseñar algunas estrategias didácticas que no es posible desarrollar con otros medios.

De acuerdo con lo anterior debemos concluir que las computadoras tendrán un impacto positivo en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, solamente si tenemos la capacidad de utilizarlas apropiadamente.

El equipo y el software más sofisticado pueden resultar ineficaces si no determinamos correctamente como aprovecharlos en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Por el contrario, un equipo o un programa computacional modesto, utilizado apropiadamente, puede resultar de gran utilidad.

En un lenguaje cargado de ironía podemos decir que la computadora no tendrá, por si misma, ningún impacto positivo en la enseñanza de la matemática ni siquiera estando encendida.

Consideremos, por tanto, que la computadora no es un aparato mágico que resuelve milagrosamente los problemas asociados con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Lo que logremos con su empleo en el campo educativo dependerá directamente de lo que hagamos, pero principalmente, de lo que hagan nuestros estudiantes, con ellas.

Relacionada directamente con esta temática y como complemento de los principios indicados anteriormente, surge la cuestión de las **estrategias didácticas** que puede emplear el docente cuando decide apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática con computadoras o calculadoras.

En este trabajo presentamos algunas de tales estrategias, sin la pretensión de exhaustividad en este importante tema.

Como el término estrategia significa el arte de dirigir los esfuerzos con miras a la obtención de un fin, asegurando su debida coordinación, entenderemos por estrategias didácticas la forma en que el docente encauza los esfuerzos, realiza las actividades y utiliza los

---

[1] Ex Director Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico. Profesor en la carrera “Enseñanza de la

recursos para lograr los objetivos educativos propuestos.

Estrategia uno: explorar para verificar

En la estrategia de **verificación** el docente planifica procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática en los que permite a las y los estudiantes, con apoyo de la computadora y del software apropiado, verificar que determinados resultados matemáticos (teoremas) son válidos.

Se emplea esta estrategia, entre otras, en las actividades denominadas de "exploración guiada".

Los actos educativos en los que se utiliza este tipo de estrategia didáctica requieren, por parte de los estudiantes, capacidad para seguir instrucciones y de observación.

Un ejemplo de este caso consiste en pedir a los estudiantes (en forma oral o escrita) que, con apoyo del programa Geometer's Sketchpad, construyan un triángulo arbitrario y tracen las tres medianas, para que verifiquen que las medianas concurren.

Los estudiantes pueden realizar la construcción solicitada y "manipular" la figura obtenida "arrastrando" alguno de los vértices, verificando que lo propuesto por el profesor es verdadero en una cantidad abundante de casos.

En este tipo de procesos es importante que los estudiantes anoten sus observaciones y que las compartan posteriormente con sus compañeros. Se recomienda realizar primero trabajos en pequeños grupos para favorecer el intercambio de experiencias y luego realizar una sesión general (plenarios) en la cual los estudiantes presenten sus observaciones. De esta manera el profesor puede realizar un proceso de evaluación formativa, que le permita determinar el grado de logro de los estudiantes.

---

matemática asistida por computadora" impartida en esa unidad académica.

Con este tipo de estrategias el estudiante puede acceder a muchos conceptos matemáticos, dentro de un ambiente de aprendizaje caracterizado por la observación, la conjetura, el error como fuente de aprendizaje, la búsqueda de la precisión y la comunicación de resultados.

Estrategia dos: explorar para descubrir

Existen argumentos para apoyar el desarrollo de procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática por “descubrimiento”.

Sin duda alguna, uno de los méritos principales de la computadora como recurso didáctico en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática es que favorece y potencia la planificación de procesos de aprendizaje por “descubrimiento”.

En los actos educativos que se desarrollan con la estrategia de exploración para descubrir el profesor actúa como facilitador, y es quien, en general, planifica el proceso. La pretensión principal en este tipo de sesiones de aprendizaje es que el estudiante llegue a sus propias conclusiones; no se le guía a ciertos resultados de manera directa, se espera que interactuando con la computadora, y mediante la exploración, la observación cuidadosa y el intercambio de ideas con sus compañeros, “descubra” los resultados.

El profesor es quien, generalmente, aporta las situaciones problema con las que el estudiante, en forma individual o grupal, trabaja. No debemos dejar de resaltar la importancia de esta tarea del educador y las dificultades que conlleva.

Advertimos también que en este tipo de procesos el profesor tiene que estar preparado para lo inesperado. Puede suceder que los estudiantes, aun cuando han trabajado correctamente en casi todo el proceso, lleguen a conclusiones incorrectas o a conclusiones correctas pero de menor importancia que las que el profesor esperaba. O tal vez descubran hechos más relevantes.

La sutileza y el buen tino con los que el docente logra que el estudiante (o un grupo de estudiantes), que ha llegado a conclusiones inadecuadas, continúe con su trabajo en búsqueda de otras conclusiones (o que descubra que las alcanzadas anteriormente son incorrectas), son dos elementos que deben adornar al profesor que desarrolla este tipo de procesos, y no exageramos cuando afirmamos que estas características del educador son factores críticos de éxito.

En esta sección nos interesa resaltar el hecho de que un proceso en el que se utiliza la estrategia de verificación puede ser convertido, algunas veces, en uno en el que se utiliza la estrategia de descubrimiento.

Como ejemplo consideremos el enunciado del siguiente problema, que constituye una modificación de uno similar presentado por Radford (1994):

> Un triángulo ABC inscrito en un círculo de centro O. La tangente en el punto C interseca a la prolongación del lado AB en el punto P. Sea CM la bisectriz del ángulo ACB. Tal línea corta el lado AB en el punto D. Verifique que el triángulo PCD es isósceles.

Presentado con esta redacción constituye un problema para desarrollar un proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática según la estrategia de verificación.

Con una modificación en su enunciado, el problema puede ser presentado a los estudiantes de la siguiente manera:

> Trazar un círculo cualquiera. Sea O su centro. Inscribir un triángulo cualquiera en ese círculo. Sea ABC dicho triángulo. Trazar la tangente al círculo en el punto C. Sea P el punto de intersección de esa tangente y de la recta que pasa por A y B. Trazar la bisectriz del ángulo ACB. Sea D la intersección del bisectriz y del segmento AB. ¿Qué puede decirse del triángulo PCD?
> Volver a comenzar con otro círculo y otro triángulo ABC. ¿Qué propiedad parece tener el triángulo PCD. Enunciar una conjetura.

Como indica Radford (1994), ante un enunciado como el anterior el alumno está invitado a tomar posesión de la situación. El estudiante pasa de una situación de observador a una etapa de actor.

Si en los actos educativos utilizan la estrategia de verificación es importante la evaluación formativa, en los que emplean la estrategia de descubrimiento es imprescindible.

El profesor puede hacer uso de varios recursos y procedimientos para realizar la evaluación formativa. Por ejemplo, puede recurrir a las exposiciones individuales o grupales, con una sesión plenaria de presentación de resultados, o puede optar por los informes escritos.

Somos partidarios de la opinión de que, en todo caso, siempre es importante la discusión de las conclusiones con la participación de todo el grupo (plenarios), con el fin de corregir los errores que se pueden haber colado.

Con procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática desarrollados con esta estrategia, el estudiante puede acceder a muchos conceptos matemáticos, dentro de un ambiente de aprendizaje caracterizado por la observación, la conjetura, el error como fuente de aprendizaje, la búsqueda de la precisión, el trabajo en equipo y la comunicación de resultados.

En esta estrategia incluimos también los procesos de "exploración abierta", en los cuales no existe un conjunto especial de propiedades que se espera que los estudiantes descubran como resultado de la lección. En estos casos se les plantea un problema o una pregunta generadora a los estudiantes y se les permite interactuar con la computadora, con el fin de que puedan "descubrir" cosas. Las instrucciones en este tipo de procesos deben ser mínimas.

El profesor debe crear un ambiente que permita que los estudiantes puedan expresar sus descubrimientos con sus propias palabras, con mucha libertad, y que favorezca, además, el desarrollo de un proceso de evaluación formativa.

Estrategia tres: jugarle la vuelta al software

Algunos de los programas de computadora que puede utilizar el profesor de matemática con fines educativos permiten "hacer cosas matemáticas" de manera sencilla y directa.

Por ejemplo, con el programa Geometer's Sketchpad es sencillo y directo construir el punto medio de un segmento, trazar el rayo bisector de un ángulo, construir rectas paralelas o perpendiculares, etc. Con el programa Derive es posible factorizar un polinomio, simplificar una expresión, obtener una derivada, etc., de manera sencilla y directa.

Un estudiante puede, incluso sin comprender ninguno de estos conceptos, trazar en instantes puntos medios, rayos bisectores, rectas paralelas, factorizar polinomios, derivar funciones, etc.

La estrategia de "jugarle la vuelta al software" propone precisamente aprovechar esta circunstancia para lograr que el estudiante "conceptualice", es decir, adquiera conceptos.

La cosa va más o menos así. Se le solicita al estudiante que, utilizando un programa computacional en particular, realice una actividad específica como construir el punto medio de un segmento con Geometer's Sketchpad, por ejemplo, acción que puede repetir varias veces con casos diferentes. O factorizar cierto tipo de polinomios utilizando el programa Derive.

Posteriormente se le pide que, "manipulando" con el programa si es necesario se explique, y luego le explique al resto del grupo, que "cosa" es lo que construyó (u obtuvo) con la computadora. Es decir, que caracterice lo construido (o los resultados obtenidos).

De esta manera el estudiante puede acceder a muchos conceptos matemáticos, dentro de un ambiente de aprendizaje caracterizado por la observación, la conjetura, el error como fuente de aprendizaje, la búsqueda de la precisión y la comunicación de resultados.

Aun cuando esta estrategia puede considerarse como un caso especial de la anterior, es interesante por ella misma. Con la estrategia de "jugarle la vuelta al software" se pretende principalmente que el estudiante descubra conceptos, mientras que con la de descubrimiento se espera que establezca resultados.

Es importante hacer notar que este tipo de estrategia está muy limitada por las características de los programas que los estudiantes pueden utilizar.

Estrategia cuatro: la pizarra electrónica

En este caso el docente utiliza la computadora, con el software apropiado, para "presentar" conceptos o resultados matemáticos como lo haría en una pizarra tradicional pero contando con las facilidades que ofrece la tecnología.

Aprovechando las facilidades de animación, la variedad de colores, los variados tamaños de letras, etc., y la posibilidad de combinar textos, gráficos, sonidos y cálculos puede presentar ideas matemáticas con mayor eficacia que con otros recursos más tradicionales.

Estos actos educativos suelen desarrollarse con el método "expositivo asistido por computadora", combinado algunas veces con el método interrogativo.

Por ejemplo, un docente que debe presentar el tema de integrales indefinidas y que selecciona el enfoque de “aproximar el área bajo una curva” como estrategia didáctica, puede valerse de algún programa de computadora para presentar las ideas, de una manera mucho más efectiva que con solo el apoyo de la tiza y la pizarra.

Esta estrategia requiere, sobre todo cuando se trabaja con grupos numerosos, de algún dispositivo que permita proyectar la imagen del monitor de manera que sea accesible a todo el grupo.

Estrategia cinco: ejercitación y práctica

Este caso corresponde al uso de la computadora de modo que los estudiantes puedan practicar y ejercitarse en destrezas operativas matemáticas, según sus propias necesidades.

Utilizando programas especialmente diseñados (software específico) o programas de propósito más general como Mathematica, MathCad, Derive o Geometer’s Sketchpad, entre otros, el estudiante puede realizar prácticas, sin necesidad de contar con la supervisión permanente del profesor.

En actos educativos orientados con esta estrategia, como indica Sancho (1996), podemos atender, con propósitos remediales, a estudiantes que presenten necesidades específicas al estudiar un tema.

Estrategia seis: el libro electrónico

La estrategia del “libro electrónico” consiste en utilizar algún programa computacional para generar textos y gráficos, cuya lectura la haga el estudiante en la misma computadora.

Si con el apoyo de la computadora el estudiante no tiene acceso a algo diferente a lo que ofrece un libro común, no tiene sentido utilizar la computadora. No se trata simplemente de sustituir al libro, éste tiene ciertas ventajas que no tiene la computadora: es más "portable", se puede "rayar", podemos utilizarlo sin equipo adicional, podemos utilizarlo en variedad de ambientes, etc.

Cuando el profesor utilice la estrategia del "libro electrónico" debe procurar que esto le permita al estudiante contar con "facilidades" para el aprendizaje que superen las que ofrece un libro tradicional. Por ejemplo, el estudiante debe poder cambiar parámetros en algunas de las expresiones para "ver" que efecto producen estos cambios, o debe poder accesar mediante hipertextos partes complementarias de información según sus necesidades particulares, etc.

La estrategia del "libro electrónico" es una de las que debe ser utilizada con mayor cuidado por el profesor de matemática.

Estrategia siete: de herramienta

En este tipo de estrategia la computadora aparece como una herramienta a disposición del estudiante, que puede utilizar para realizar los cálculos o los gráficos que necesite en la solución de un problema.

El profesor propone un problema cuya solución requiere, dependiendo tal vez de la forma de abordarlo, del apoyo de la computadora. La computadora puede jugar en estos casos papeles muy diferentes. Por ejemplo, podría ser utilizada por los estudiantes para procesar textos, graficar información, realizar un cálculo matemático particular, hacer una simulación, etc.

Por tanto, el empleo de la computadora para apoyar la solución del problema es una decisión más que deben tomar los estudiantes al intentar resolverlo.

Estrategia ocho: para la simulación de fenómenos

La estrategia de simulación de eventos consiste en utilizar la computadora para representar fenómenos de la realidad. Un enfoque similar ha tenido gran aceptación y resultados muy prometedores en el campo de la toma de decisiones.

Se elabora un modelo de simulación computacional que se comporte de la misma manera que se esperaría se comporte un sistema real. El estudiante puede realizar diferentes "corridas" o "experimentos" en la computadora con el fin de obtener conclusiones sobre las características del fenómeno en estudio.

Para el caso particular de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, he simulado en el programa Geometer's Sketchpad el comportamiento de un paracaídas, el desagüe de un tanque cónico invertido y el movimiento de un resorte vibrante, entre otros.

La simulación ofrece una serie de ventajas importantes:

- el modelo de la computadora ofrece un laboratorio experimental
- el estudiante puede estudiar fenómenos sin peligro, a bajo costo, o que de otra manera podría ser imposible.

Galvis (1991) señala que la simulación en computadora tiene efectos importantes para motivar a los estudiantes. También, indica, favorece el aprendizaje experiencial, conjetural y por descubrimiento, con un potencial tan grande o mayor que las mismas situaciones reales, pues en ellas no se pueden hacer todas las cosas que se hacen en la computadora, al menos durante el mismo rango de tiempo.

Estrategia nueve: de presentación

La estrategia de presentación consiste en utilizar programas del tipo Power Point, que permiten presentar la información en variedad de formatos, colores, efectos especiales, etc., recurriendo al método expositivo asistido por computadora.

Es una estrategia que tiene similitud con la de “pizarra electrónica” y podría ser considerada un caso particular de ésta. Nos interesa diferenciarlas con el fin de enfatizar que en los casos de la estrategia de “pizarra electrónica” debe existir mayores posibilidades de interacción con la computadora.

Conclusiones

1. La tecnología no constituye la solución de todos los problemas educativos, pero es un elemento importante para generar cambios en los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática.
2. Debemos tener muy claro que los resultados positivos que podamos obtener al utilizar computadoras en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, dependerán directamente del uso que les demos. Esto significa, entre otras cosas, que la computadora no es un aparato que resolverá los problemas educativos por arte de magia.
3. El empleo de computadoras en los procesos de enseñanza aprendizaje debe justificarse en el marco de un planeamiento educativo completo, lo que supone la selección de objetivos educativos, y la definición de estrategias didácticas específicas.
4. Existen diversas estrategias didácticas para apoyar procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática. Estas estrategias están determinadas, tanto por el software disponible, como por las propias preferencias del docente.
5. Es posible desarrollar procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática, con apoyo de las computadoras, en ambientes de aprendizaje de características diversas. Efectivamente, es posible generar desde ambientes de tipo algorítmico hasta ambientes de corte heurístico.

6. El docente debe conocer diversas estrategias didácticas para apoyar procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática, para que enriquecer de manera sustantiva su propia actividad y la que desarrollan sus estudiantes.

Bibliografía

Calderón, E. (1990) "Los computadores en la educación, desarrollo científico y tecnológico prioritario para el futuro de Iberoamérica." Informática Educativa. V.3. No. 2. Colombia.

Galvis, A. (1991) "Reflexión acerca del uso del computador en educación primaria y secundaria." Informática Educativa. V. 4. No. 1. Colombia.

Galvis, A. (1992) "Planeación estratégica de informática educativa". Informática Educativa. V.5. No. 2. Colombia.

Galvis, A. (1993) "Evaluación de materiales y ambientes educativos computarizados". Informática Educativa. V. 6. No. 1. Colombia.

Meza, G. (1991). "Eureka: The Solver. Conceptos fundamentales". Publicaciones del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Cartago.

Meza, G. (1992) "Eureka: The Solver. Un recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas superiores". Comunicación. V.15. Cartago.

Meza, G. (1994) "Cómo usar MathCad". Editorial Tecnológica de Costa Rica. Cartago.

Meza, Garita y Villalobos. (1997). "Planeamiento de procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática asistidos con software matemático". En Memorias del V ECADIM.

Meza, G. (1998) "Enseñanza de la matemática asistida por computadora: mitos, retos, amenazas y oportunidades". En Memoria del Primer Congreso Internacional de Informática Educativa.

Meza Cascante, Luis Gdo. (1998) "Sesiones de aprendizaje interactivas programadas en Geometer´s Sketchpad". En Memoria del Primer Congreso Internacional de Informática Educativa.

Meza Cascante, Luis Gdo. (1998) Experiencias educativas con Geometer's Sketchpad. En Memoria del "Primer Festival de Matemática".

Meza Cascante, Luis Gdo. (1999) Enseñanza de la geometría en sétimo año con ... Geometer's Sketchpad. Manual de la profesora o del profesor. Publicaciones del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Cartago.

Meza Cascante, Luis Gdo. (1999) Enseñanza de la geometría en sétimo año con ... Geometer's Sketchpad. Cuaderno de trabajo de la estudiante o del estudiante. Publicaciones del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Cartago.

Radford, Luis. (1994) "La enseñanza de la demostración: aspectos teóricos y prácticos". En Revista "Educación Matemática". Vol. 6. No. 3.

Rojas, T. (1991) "Creatividad y programación." Informática Educativa. V.4. No. 1. Colombia.

Salas, C y Rodríguez, R. (1985) "Utilización de microcomputadoras en la enseñanza". Praxis. Heredia.

Sancho, L.(1996) "Aplicaciones de la informática a la educación II". EUNED. San José, Costa Rica.

Scott, P. (1990) "La computadora y la enseñanza de la matemática". Educación Matemática. V.2. No. 1. México.

Trujillo, C. (1992) "Informática para apoyar el mejoramiento de la educación." Informática Educativa. V.5. No. 1. Colombia.

Experiencias con matemática asistida por computadora en el colegio

Ivonne Patricia Sánchez Fernández[•]

Resumen

A partir de febrero del año en curso (2001), he ejercido la labor docente en un colegio privado, en la modalidad de "Matemática asistida por computadora", únicamente. Es decir, mi trabajo consiste en aplicar la computadora a los diferentes temas relacionados con los planes de estudio, que dicho sea de paso, son desarrollados con otro profesor que se encarga de impartir "Matemática normalmente".

Este trabajo consiste en retomar aspectos teóricos, que en la práctica se manejan diferente, o bien, situaciones reales a las que uno como docente no está preparado.

Introducción

La matemática en el colegio y, si se quiere, desde la escuela, es una de las materias que más asusta a los estudiantes, quizá porque siempre han pensado en la misma como una fuente de tortura e insatisfacciones.

Sin embargo, gran parte de la culpa recae en la forma de cómo se enseña la matemática.

Es así, como surge la idea y la necesidad de involucrar nuevas técnicas, con el fin de atraer a los estudiantes hacia el aprendizaje libre de la matemática; para que la labor docente se refuerce, en este caso particular esa técnica recibe el nombre de: computadora.

En este período que he tenido la oportunidad de trabajar exclusivamente en el área de matemática asistida por computadora, he descubierto algunos aspectos importantes sobre los cuales deseo hacer hincapié, con el afán de considerarlos fuertemente, en caso de adoptar esta modalidad.

Metodología

Básicamente, mi trabajo consistió en reforzar los temas que cada grupo estaba estudiando en un momento determinado; sin embargo, en más de una ocasión desarrollé algún otro tipo de actividad (en la que tal vez no se utilizó la computadora), pues es necesario recordar que no todos los temas se pueden desarrollar satisfactoriamente en la

[•] Estudiante de la Escuela de Matemática. Instituto Tecnológico de Costa Rica.

computadora. Muchas de las actividades que desarrollé, ni siquiera tenía que ver con la materia, pero eran ejercicios para incentivar el pensamiento lógico y la creatividad.

Es así como la mayor parte del curso, el trabajo de los muchachos consistió en resolver alguna guía previamente diseñada, fuera ésta de repaso, de comprobación o de descubrimiento.

Materiales

El colegio se encargó de comprar un software necesario, en particular uno llamado El Geómetra, con el cual se pudo trabajar bien la parte de geometría, trigonometría, algunos temas sobre funciones, inclusive números enteros y racionales.

Sin embargo, otros programas tuve que diseñarlos yo misma, o bien, conseguirlos con mis compañeros del Tecnológico.

Evaluación

Dado que esta es una modalidad diferente, el rubro con el mayor porcentaje de la nota es el de trabajo cotidiano, pues gran parte del trabajo que se realiza con los estudiantes es en clase.

Luego, está el portafolio, que es el equivalente a una prueba de ejecución, aquí los estudiantes desarrollan en forma creativa los contenidos que han trabajado durante cada trimestre.

Hay un trabajo extraclase, similar a los que se acostumbran, se evalúa concepto y asistencia.

Motivación

Muchas veces, se tiene la tendencia a creer que, al vivir en una época donde la mayoría de los jóvenes tienen acceso a computadoras y juegos de video, a todos les fascina la idea de trabajar con una computadora en la clase de matemática; sin embargo, tuve la experiencia de encontrar muchachos que no se sentían atraídos hacia esta modalidad, por el simple hecho de utilizar una herramienta que algunos de ellos detestaban.

Definitivamente, esta actitud atrasó varias veces el trabajo en clase, pues estos estudiantes preferían no tocar la computadora hasta que yo estuviera cerca de ellos en caso de problemas; más aún una estudiante se sentía tan nerviosa que casi rompe el llanto en media lección.

Por otro lado, la tendencia de los estudiantes a estar frente a juegos de video, les hace creer que la computadora sólo sirve para dos cosas: digitar tareas y jugar. Entonces, muchos de ellos están deseando llegar a clases para poder utilizar juegos, así sea unos pocos segundos mientras se dan algunas instrucciones generales, mientras llega el resto de compañeros o simplemente ya terminaron el trabajo asignado para ese día. Lo que personalmente me preocupa es que esta inclinación a estar siempre jugando se observa desde niveles de pre-kinder, hasta niveles superiores en secundaria.

Adecuaciones Curriculares

Durante el curso lectivo correspondiente al año 2001 tuve que enfrentar algunas adecuaciones curriculares por déficit atencional, que en realidad no considero un reto imposible, aunque si es necesario tener muy claro que una fuente de distracción por naturaleza es la misma computadora, pues siempre está la inquietud de jugar, de utilizar Internet durante la clase, de utilizar constantemente y aunque no sea necesario los audífonos. O bien, estudiantes que no son capaces de seguir una instrucción, pues a pesar de dársela directamente están tan ensimismados que no escuchan lo que se les indica.

Sin embargo, una adecuación que sí me preocupó y me tuvo en apuros, fue el caso de un muchacho con severas limitaciones visuales y motoras; es así como este joven sólo puede apreciar lo que se encuentre dentro de su visión central, esto provocó serios problemas, a pesar de utilizar la apariencia del monitor extra-grande, el muchacho no podía enfocar bien lo que se indicaba, cuando se utilizó el televisor para dar alguna explicación, él tuvo que observar desde una computadora, para indicarle donde debía trabajar (algún menú, un icono, un botón) era necesario que yo moviera uno de mis dedos frente a sus ojos para que pudiera seguirlo hasta el monitor y ahí seguir moviéndolo para que ubicara la posición del objeto, o bien, describirle minuciosamente cada parte del monitor.

Por otro lado, la motora fina no está bien desarrollada, por lo que un simple "*hacer clic*", era para él, una situación bastante difícil; primero, porque le costaba ubicar la mano sobre el ratón (mouse) y colocar el dedo índice donde corresponde; luego, el movimiento de dicho dedo sobre el botón correspondiente y hacerlo coincidir con la información que escasamente podía observar era una tarea complicada.

Toda la materia debía entregársele impresa en negrita y en letra tamaño 20, lo mismo que las presentaciones o programas.

Note que, este muchacho requería constantemente de atención; pues, en repetidas ocasiones cerraba, involuntariamente, los programas; o cuando le aparecía un mensaje de error no podía leerlo y por ende, no podía continuar su trabajo.

Disciplina

Dentro del laboratorio se siguen reglas, propias del mismo como no correr, no introducir alimentos, no golpear el equipo, entre otras.

Un profesor que se encargue de impartir matemática asistida por computadora, debe tener en cuenta que este es un ambiente donde se propicia la comunicación y como muchas veces se trabaja en descubrimientos, necesitan compartir y discutir más, por lo que se pierde el modelo de clase silenciosa y apacible que probablemente espera.

En particular, el laboratorio tiene sillas con rodines lo que ayuda a que los estudiantes tiendan a desplazarse sentados en ellas, lo que ocasionalmente puede hasta causar accidentes.

Una situación particular que se presentó, tiene que ver cuando uno de los estudiantes aprovechó un descuido de mi parte y con el micrófono de su computadora grabó una serie de frases ofensivas acerca de uno de sus compañeros.

Algunos problemas

Entre los problemas técnicos es necesario tener presente que, al ser usuario de un laboratorio de computadoras, se está expuesto a ser quien resuelva algunos problemas inmediatos; por ejemplo, si las máquinas se “quedan pegadas”, si se reciben mensajes de error; es muy usual que los estudiantes, involuntariamente, desconecten teclados, o bien, máquinas que no encienden, entre otros.

Conclusiones

A pesar de que la enseñanza de la matemática asistida por computadora está en una etapa de prueba, por decirlo de alguna manera, es un reto que debería asumirse en mayores proporciones; sin embargo, el trabajo que conlleva es pesado, pues el planeamiento, elaboración de material, es constante.

Por otro lado, es importante hacer conciencia en el público en general, que esta modalidad no es siempre como la pintan, que si bien es cierto presenta muchas ventajas, un docente en esta área no puede creer que se puede conformar con lo que sabe, debe seguir investigando; debe estar preparado para encontrar muchas dificultades en el camino, debe someterse constantemente a la actualización, por que lo jóvenes de esta época demanda una gran cantidad de atenciones, y si realmente se quiere llevar a cabo el papel de educador, a veces es necesario estar al nivel de ellos en lo que a gustos se refiere.

Bibliografía

Meza Cascante, Luis. *Metodología de la enseñanza de la matemática*. Notas técnicas del curso Teorías del aprendizaje 2. Instituto Tecnológico de Costa Rica, 1998.

Astorga, Alcides; Sánchez, Alejandra. *Enseñanza de la matemática asistida por computadora. Experiencia en el ITCR.* En: Memorias I Congreso Internacional de Enseñanza de Matemática Asistida por Computadora (I CIEMAC), 1999.

Funciones y Derivadas: Lecciones en Formato Electrónico

Fernando Hitt•, Carlos Cortés••

Resumen

En el siguiente artículo presentaremos parte de lo que se está trabajando dentro de un proyecto general sobre la escritura de libros de texto a nivel College en ambientes de papel, lápiz, calculadora y computadora. El uso de medios informáticos para la introducción de los conceptos de función y derivada nos permite incorporar actividades didácticas basadas en la teoría de Registros semióticos de representación.

Introducción

La problemática de la enseñanza de las matemáticas es compleja, por lo que nuestro acercamiento a ella incluye el análisis de diferentes variables que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas. Como metodología de trabajo realizamos un análisis por separado de cada una de esas variables intentando unificarlas para poder ofrecer una propuesta de enseñanza. El análisis por separado de las variables importantes por analizar son:

1. Detección de obstáculos en el desarrollo de una idea matemática. Esto se realiza analizando la historia de una idea matemática. En nuestro caso, el concepto de función y de derivada.
2. Detección de obstáculos cognitivos tanto en maestros de enseñanza media (College) como en sus alumnos.
3. Un análisis teórico sobre la construcción de conceptos desde el punto de vista de una teoría de las representaciones.
4. Diseño de actividades en papel, lápiz y uso de tecnología para la construcción de conceptos matemáticos como el de función y derivada.

En forma resumida del primer punto, quisiéramos decir que la detección de obstáculos epistemológicos en el desarrollo de una idea matemática nos permite conocer la complejidad intrínseca de la construcción del concepto matemático en cuestión. El segundo punto nos proporciona un acercamiento al conocimiento de los profesores un tanto para

• Matemática Educativa, UMSNH, México.

•• Matemática Educativa, UMSNH, México.

saber lo que ellos enseñan y por parte de los alumnos lo que ellos aprenden. Una vez detectados los obstáculos tanto a través de un análisis de la historia matemática de un concepto dado, como los obstáculos de los maestros y de los alumnos, intentamos explicar esos fenómenos a través de un marco teórico (ver por ejemplo, sobre el concepto de función a Hitt, 1994, 1995, 1996a, 1996b, 1998). Consideramos de suma importancia la teoría sobre la construcción del conocimiento basada en los sistemas semióticos de representación y la conversión entre representaciones (ver Duval, 1993, 1995, 2000).

Tomando en cuenta este marco teórico sobre la construcción de conceptos, se ha puesto de manifiesto la importancia de realizar actividades en las cuales las tareas de tratamiento en una misma representación y conversión entre representaciones de los conceptos matemáticos en cuestión sea la parte medular. Un ejemplo muy claro, relativo al tema de funciones, en el cual se ve la no correcta aplicación de la teoría de representación es: generalmente al aprendiz de la matemática se le proponen tareas de conversión de una representación como la algebraica a su correspondiente gráfica y es poco usual que se le solicite el proceso inverso, que es, dada una gráfica de una función, construir una expresión algebraica asociada a esa gráfica. También ha sido reportado por muchos investigadores que una gran mayoría de profesores de matemáticas enfatizan demasiado las actividades en un solo sistema de representación que es el algebraico.

Otro aspecto importante es el de desarrollar en el estudiante la habilidad de visualización matemática. Ella comprendida en términos de lo que puede ayudar a un estudiante en la resolución de problemas. La visualización matemática tiene que ver con el entendimiento de un enunciado y la puesta en marcha de una actividad que si bien no llevará a la respuesta correcta sí puede llevar al resolutor en la profundización de la situación que esté tratando. Una de las características de esta visualización es la conexión entre representaciones para la búsqueda de la solución a un problema dado.

En el presente trabajo nos concentraremos en el cuarto punto relacionado con el diseño de actividades, en el que se encuentra la construcción de lecciones en formato electrónico. Es importante señalar que se ha elaborado un texto en formato usual "Funciones en Contexto" (Hitt, 2000) en el que una característica sobresaliente a la que se le dio importancia, fue el de analizar fenómenos de la vida que pudieran modelarse con las funciones que se introducen en el nivel medio superior. Desde esta perspectiva de inmediato se ponen en juego técnicas de resolución de problemas que integran de manera natural el uso de diferentes representaciones de los conceptos matemáticos que estén en juego. Ahora bien, "Funciones en Contexto" se transforma en un micromundo al construir en formato electrónico los ejemplos propuestos en el texto e incorporarlos como parte de la actividad ya en forma dinámica.

En particular en este artículo nos referiremos al aspecto de tratamiento gráfico y numérico de los conceptos de función y de función derivada a través de un conjunto de actividades desarrolladas en formato electrónico. El acercamiento a estos conceptos es a través del uso de Progresiones Aritméticas (tratamiento numérico) y graficación de funciones con línea secante y línea tangente (tratamiento gráfico).

Queremos señalar también que un tratamiento numérico y gráfico del concepto de razón de cambio, es un pilar importante para abordar posteriormente el concepto de Derivada. Para ello se toman algunos de los ejemplos que han sido introducidos en el libro "Funciones en Contexto" y se extienden para revisar las ideas de incremento y razón de cambio.

A continuación daremos algunos ejemplos de lo anteriormente escrito.

Tratamiento numérico

Se propone un acercamiento numérico al concepto de derivada, a través de razón de cambio. Un primer acercamiento para lograrlo es introducir las progresiones aritméticas y motivar al estudiante en el desarrollo de estrategias de solución al ejercicio solicitado. El proponer un acercamiento discreto al concepto de derivada (a través de razones de cambio) permite que el estudiante trabaje con elementos que para él son concretos; además, después se puede introducir la pendiente de una recta como la razón de incrementos[1]; lo que se pretende es dar significado a la razón de cambio, que posteriormente serán tratadas en forma gráfica o geométrica y en forma algebraica.

[1] Price (1989) detectó que los estudiantes no tienen la habilidad para ver la pendiente como una razón de cambio.

La meta que se pretende, en este primer acercamiento, es que el usuario determine la relación algebraica que existe en una razón de cambio entre dos progresiones aritméticas (una de las cuales es fija), para ello se deberá inicialmente determinar la fórmula para obtener el *n-ésimo valor* correspondiente a la *n-ésima posición* de la progresión aritmética en 5 niveles que son:

- Nivel I - El nivel I consiste en construir la definición de lo que es una progresión aritmética lo que se realizará a través de ejercicios (por ejemplo obtener la diferencia entre los términos consecutivos y preguntar por la diferencia de otros de ellos); además, aquí mismo, ir introduciendo la terminología que se estará usando a lo largo de este primer módulo (por ejemplo ¿Qué es la posición?, ¿Qué es el valor?, ¿Qué es una diferencia? y ¿Por qué es conveniente ordenar la progresión como una tabla?). La actividad 1 (anexo 2) está realizada en papeles un ejemplo de cómo se pretenden realizar estas dentro del software.

En los niveles siguientes se trabajará con dos progresiones aritméticas que se relacionan; la primera progresión aritmética corresponde a la posición del elemento *(le llamaremos posición)* y la segunda será el valor del elemento *(le denominaremos valor).* Esta relación se presenta en forma de tabla y la disimilitud entre niveles estriba en la forma en que es mostrada la *posición,* lo cual cambiará el grado de dificultad para encontrar los próximos elementos. A continuación explicaremos cada uno de los niveles y daremos un ejemplo.

- Nivel II - Se presentan términos en cuya *posición* la diferencia sea siempre de 1, tal que sus *valores* tengan una diferencia entre 1 y 10. La relación correspondiente a *posición-valor* se muestra en forma de tabla, donde algunos de los valores no se darán y será tarea del usuario introducir el valor que corresponde a la posición que se pregunta. Primeramente se generan algunos valores, preguntando por los valores siguientes (progresión).

Ejemplo de progresión:

posición	1	2	3	4	5	6
valor	-1	3	7	----	----	----

- Nivel III - Se presentan términos en cuya *posición* la diferencia sea distinta de 1, pero constante, tal que sus *valores* tengan una diferencia entre 1 y 10. La estrategia empleada en este nivel es similar a la empleada en el nivel II.

Ejemplo de progresión

posición	1	3	5	7	9	11
valor	-1	7	15	...	----	----

- Nivel IV - Se presenta la *posición* de forma que la diferencia sea distinta de 1 y que no sea constante, el *valor* tendrá una diferencia entre 1 y 10. La estrategia empleada en este nivel es similar a la empleada en el nivel II, agregando posiciones grandes con la finalidad de que se deduzca una fórmula que emplee para calcular estos valores.

Ejemplo de progresión

posición	1	2	4	7	15	45
valor	-1	3	11	----	----	----

- Nivel V - Se presenta la *posición* de forma que la diferencia sea distinta de 1 y que no sea constante. Los datos correspondientes al valor aparecen en diferentes posiciones. La estrategia empleada en este nivel es similar a la empleada en el nivel IV, agregando lugares vacíos entre valores con la finalidad de que se deduzca una fórmula que emplee para calcular estos valores.

Ejemplo de progresión

posición	1	2	4	7	15	45
valor	-1			23		175

Cómo lo tratamos en las lecciones electrónicas

Primeramente seleccionamos la parte de progresiones (fig. 1 y 2) seleccionamos el nivel 3 (fig. 3) y nos aparecerá una progresión (fig. 4) en la cual introduciremos los valores en las celdas en blanco (fig.4) dando el resultado del valor introducido (fig. 5 y fig. 6).

fig.1

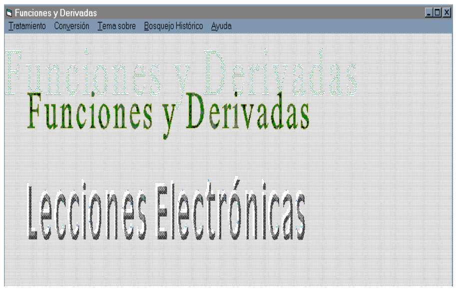


fig.2

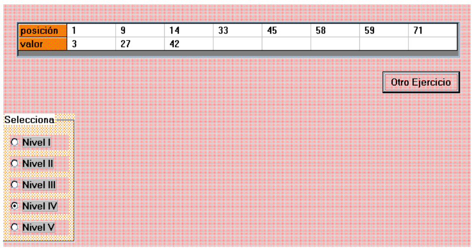


fig. 3

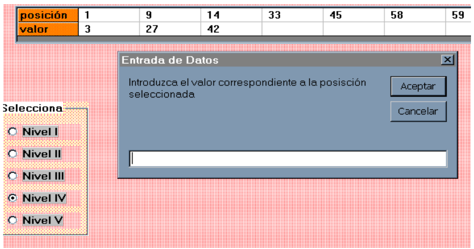


fig.4

fig. 5

fig.6

Otra opción es el de incrementos (fig. 7) y Razones de cambio (fig. 8) en los cuales ya se da una primera visión del aspecto gráfico. Este primer acercamiento permite introducir la noción de Incremento, de razón de cambio y de líneas secante que se convierte en tangente. Este último punto se retoma nuevamente en el tratamiento gráfico.

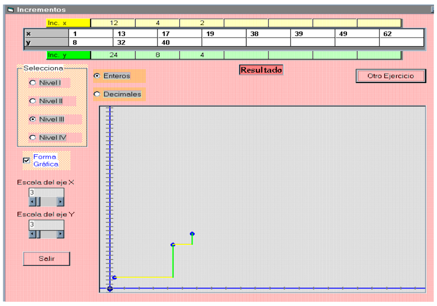


fig. 7

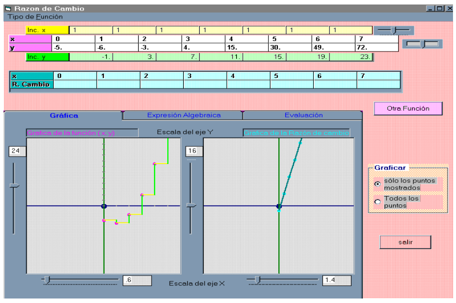


fig. 8

Cómo realizamos el tratamiento gráfico

Primeramente introducimos gráficas de funciones de la forma general, por ejemplo una función polinomial de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (fig. 9), en la cual tenemos parámetros manipulables *a, b, c,* y *d* (fig. 10) para modificar la función polinomial.

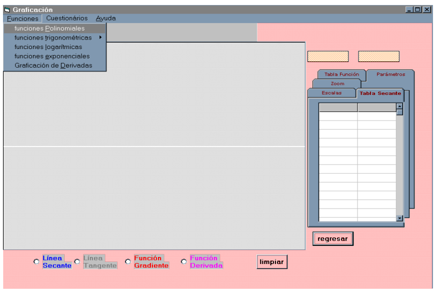


fig 9

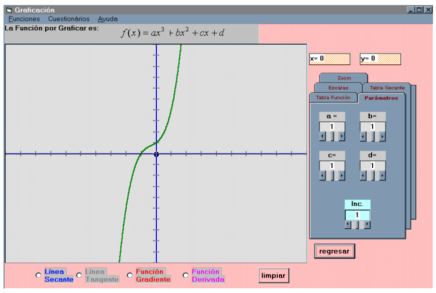


fig. 10

Podemos seleccionar el trazar una Línea Secante (fig. 11) o una Línea Tangente (fig. 12) o la Gráfica de la Función cociente de Incrementos (fig. 13) o la Gráfica de la derivada (fig. 14) obteniendo, de acuerdo a la selección, la tabla correspondiente (fig. 15).

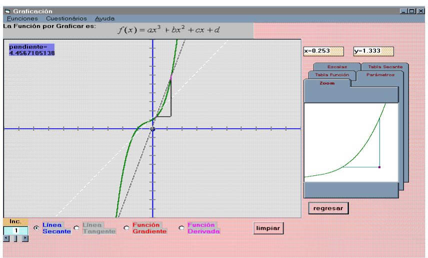


fig. 11

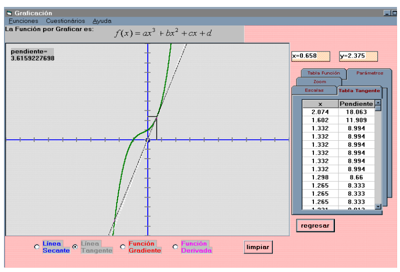


fig.12

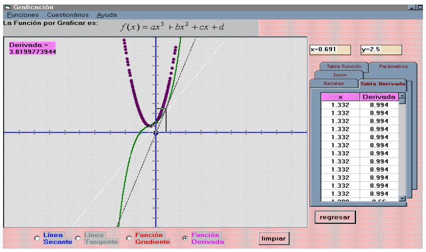


fig. 13

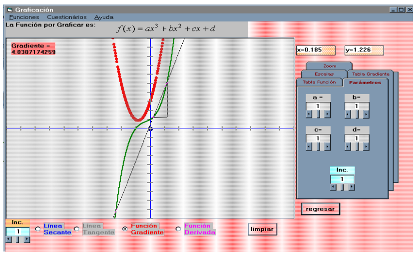


fig. 14

A través del uso de estas actividades se pretende que el estudiante comprenda la noción de incremento, de razón de cambio, de cómo la línea secante se encuentra relacionada con la razón de cambio, de cómo la tangente se relaciona con la razón de cambio cuando el Incremento de x se hace pequeño, de cómo al graficar la pendientes de la línea secante se obtiene algo parecido a la gráfica de la derivada, que a su vez es la gráfica obtenida de las pendientes de la línea tangente.

Conclusiones

La propuesta de enseñanza a través del uso de micromundos donde este integrado Cabri nos permite tener un acercamientos de diversas índoles , como por ejemplo desde el punto relativo a la matemática en contexto como lo es propuesto en el libro "funciones en Contexto" hasta el manejo puramente gráfico, además, los aspectos teóricos integrados en la propuesta hacen posible la construcción del concepto de función en forma sólida de tal manera que el estudiante podrá desenvolverse con mejores acercamientos a los conceptos matemáticos relacionados al concepto de función. La versión electrónica de los ejemplos desarrollados promoverá en el estudiante concepciones dinámicas de fenómenos y de los modelos matemáticos asociados a esos fenómenos. Esta posibilidad de interacción dinámica con los ejemplos ayudará a que el estudiante construya imágenes mentales dinámicas que posiblemente le ayudarán a mejor entender un concepto matemático. Consideramos que la interacción que permiten los ejemplos dinámicos incorporados en los libros electrónicos serán un buen motivador para los estudiantes y que las nuevas propuestas pueden tener un excelente complemento en este tipo de herramientas informáticas.

Bibliografía

Duval R. (1988) Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. *Anales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1(1988) 235-253. Traducción: Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En *Antología en Educación Matemática* (Editor E. Sánchez). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Duval Raymund (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives* 5(1993) 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Peter Lang, Suisse.

Cortés C. (1999) Desarrollo de software para la enseñanza del cálculo diferencial" proyecto de doctorado. Cinvestav-ipn.

Hitt F. (1994) Teachers' Difficulties with the Construction of Continuous and Discontinuous Functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* Vol. 16, No. 4, pp. 10-20.

Hitt F. (1995) Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el Paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa. *Revista Educación Matemática*, Vol. 7, No. 1, pp. 63-75.

Hitt F. (1996a) Estructurando un proyecto de investigación. En *Perspectivas en Educación Matemática* (L. M. Santos y E. Sánchez editores). Grupo Eidtorial Iberoamérica, México, pp. 13-20.

Hitt F. (1996b) Sistemas Semióticos de Representación del Concepto de Función y su Relación con Problemas Epistemológicos y Didácticos. En *Investigaciones en Matemática Educativa* (F. Hitt editor). Grupo Editorial Iberoamérica, México, pp. 245-264.

Hitt F. (1998) Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior,* 17 (1), pp. 123-134.

Hitt F. (En proceso) *Funciones en contexto*. Proyecto Visualización Matemática y Tecnología (VIMATEC), Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Janvier C. (1987) Representation and Understanding: The notion of Function as an example. C. Janvier (ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 67-71.

Gira, gira

Marta G. Caligaris, Georgina B. Rodríguez y Roberto E. Caligaris

Facultad Regional San Nicolás
Universidad Tecnológica Nacional
cc 118 - 2900 - San Nicolás, Argentina
mcaligaris@frsn.utn.edu.ar
grodriguez@frsn.utn.edu.ar
recaliga@frsn.utn.edu.ar

Introducción

Estamos convencidos que la capacidad gráfica de los programas simbólicos es una herramienta poderosa para estimular la intuición de los alumnos. Es por ello que hemos trabajado en el desarrollo de una serie de procedimientos en Maple V R5 y Mathematica para mostrar mediante animaciones diversas definiciones matemáticas como la generación de las cónicas [1] y distintos fenómenos físicos, como la propagación de ondas [2] y la difusión de contaminantes en el aire [3]. Siguiendo la misma línea presentamos en este trabajo la forma de generar las superficies de revolución.

Las animaciones se programaron como procedimientos de Maple V R5. Presentamos en este trabajo el código necesario para llevarlas a cabo. La publicación de los mismos tiene como objetivo dar al docente que le interese, la posibilidad de utilizarlos, modificarlos o adaptarlos según los requerimientos de su planificación.

Presentamos sólo unos cuadros de cada animación, ya que en papel es imposible verla en movimiento. Para ver el resultado en acción, el lector simplemente deberá ejecutar el código en su computadora personal, e invocarlo con las funciones que desee, siguiendo los ejemplos aquí expuestos.

Superficies de revolución

Recordemos que se llama superficie de revolución a la superficie que se obtiene haciendo rotar una curva contenida en un plano, alrededor de una recta contenida en el mismo plano.

En este trabajo generaremos superficies de revolución alrededor del eje z. Con algunas modificaciones, podrán elegirse otros ejes de rotación. Consideraremos también que la curva que gira, llamada generatriz, siempre está contenida en el plano x-z. Esto también puede rescribirse para obtener procedimientos adecuados para generatrices contenidas en otros planos.

Los procedimientos que mostraremos a continuación pueden ejecutarse para distintas generatrices, cuyas leyes pueden escribirse ya sea en la forma explícita $z = f(x)$, $y = 0$ o paramétrica $(x(t), 0, z(t))$. En ninguno de los dos casos se escribe $y = 0$ en el procedimiento.

Comenzamos a trabajar

Hicimos tres procedimientos. El primero, **`generacurvas`**, muestra el movimiento de la generatriz alrededor del eje de rotación. El segundo, **`paralelosymeridianos`**, anima la evolución de la superficie mostrando los meridianos y paralelos y por último **`supderev`**, que muestra en forma animada la generación de la superficie en tiempo real.

La idea fue desarrollar procedimientos lo más genéricos posible, en el sentido que permitan:

- ✓ definir la ecuación de la curva generatriz ya sea en forma paramétrica o explícita,
- ✓ ingresar el intervalo de variación de la variable independiente con libertad,
- ✓ elegir un ángulo de barrido distinto de 2π,
- ✓ modificar la cantidad de cuadros.

Estos procedimientos admiten dos, tres o cuatro argumentos. Los dos primeros, la ley y el dominio de la generatriz, son obligatorios. Pueden escribirse, opcionalmente, una lista de la forma $[\alpha_i, \alpha_f]$ que permite elegir el ángulo de barrido ($[0, 2\pi]$ por defecto en el procedimiento) y un número natural que da la posibilidad de cambiar la cantidad de cuadros (10 por defecto).

Desarrollamos un procedimiento denominado **`detargs`**, que es el encargado de identificar los argumentos ingresados.

El procedimiento `detargs`

El código del procedimiento es el siguiente:

```
> detargs:= proc(ley, parametro::list)
          global inc, ecparam, ep, giro, n;
          n:= 10:
          giro:=[0, 2*Pi]:
          if type(ley, list) then ep:= ley:
                             else ep:= [parametro[1], ley]:    fi:
          if nargs = 3 then
              if type(args[3], list) then  giro:= args[3]:
                                     else n:= args[3]:         fi:
          fi:
          if nargs = 4 then
                  if type(args[4],list) then  giro:= args[4]: n:= args[3]:
                                        else  giro:= args[3]: n:= args[4]:
                  fi:
          fi:
          inc:= (giro[2] - giro[1])/n:
          ecparam:= tt -> [ep[1]*cos(tt), ep[1]*sin(tt), ep[2]] :
          end:
```

Como argumentos del procedimiento se escriben sólo los obligatorios: ley y dominio de la generatriz.

En la sección de declaración de variables, se especifican como globales todas las variables, ya que serán utilizadas por los otros procedimientos:

```
global inc, ecparam, ep, giro, n;
```

Las primeras sentencias ejecutables indican la cantidad de cuadros y el ángulo de barrido que el procedimiento toma por defecto, cuando se indican sólo los argumentos obligatorios:

```
n:= 10:
giro:=[0, 2*Pi]:
```

Con el siguiente condicional, determinamos si la ley de la generatriz está dada en forma paramétrica (en este caso, debe estar dada en forma de lista). Si no es así, entonces con la ley dada en forma explícita, f(x), construímos la forma paramétrica (x, f(x)):

```
if type(ley, list) then ep:= ley:
                   else ep:= [parametro[1], ley]:    fi:
```

Ahora detectamos si se ingresan argumentos adicionales. Para ello usamos el comando **nargs**, que detecta la cantidad de argumentos ingresados. Con condicionales anidados, detectamos si hay 3 ó 4 argumentos, y si los mismos son listas o números. En caso de detectar una lista, ésta reemplaza a la lista **giro** por defecto. De manera similar, si detecta un número, reemplaza la constante **n** definida por defecto.

```
if nargs = 3 then
    if type(args[3], list) then  giro:= args[3]:
                           else  n:= args[3]:
    fi:
fi:

if nargs = 4 then
        if type(args[4],list) then  giro:= args[4]:
                                    n:= args[3]:
                              else  giro:= args[3]:
                                    n:= args[4]:
        fi:
fi:
```

Luego, definimos el incremento del ángulo de barrido entre cuadro y cuadro:

```
inc:= (giro[2] - giro[1])/n:
```

Por último, llevamos la generatriz a un plano perpendicular al eje de rotación que forma con el plano x-z un ángulo determinado (indicado en el procedimiento por la variable **tt**)

```
ecparam:= tt -> [ep[1]*cos(tt), ep[1]*sin(tt), ep[2]] :
```

Animación de una curva girando alrededor del eje z

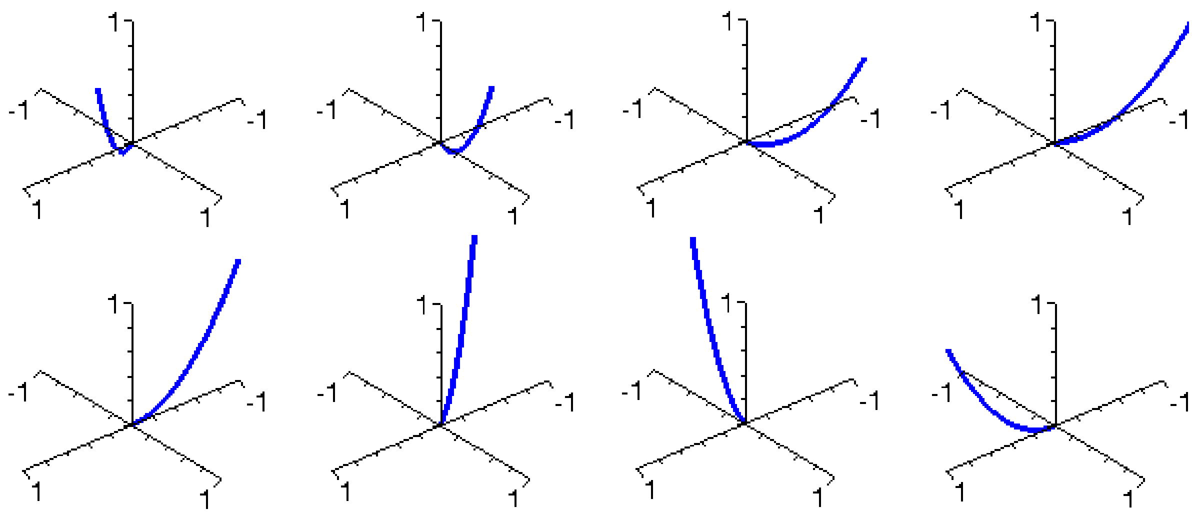
En una primera instancia, vemos cómo se mueve la curva que generará la superficie. Por ahora la superficie sólo la "imaginamos", basándonos en el movimiento que se muestra en la animación.

```
> generacurvas:= proc(ley,parametro::list)
                 local i;
                 detargs(args);
                 for i from 0 to n do
                      cur.i:= plot3d(ecparam(i*inc),
                               parametro[1] = parametro[2]..parametro[3],
                               y=0..1, thickness = 3,
                               color = blue, style = hidden,
                               scaling = constrained):
                                           od:
                 display(seq(cur.i,i=0..n), insequence = true, axes = normal);
                 end:
```

El código anterior es fácil de entender. Simplemente, se ejecuta un lazo que contiene un comando para graficar una curva en tres dimensiones (**plot3d**). Como no sabemos en qué forma está dada la ecuación de la generatriz, debemos analizar previamente los argumentos con el procedimiento **detargs**.

Como ejemplo, se muestra la rotación de $z = x^2$:

```
> generacuvas(x^2,[x,0,1])
```



Paralelos y meridianos

Cuando la generatriz gira, sus puntos describen circunferencias contenidas en planos perpendiculares al eje de rotación, llamadas paralelos de la superficie. Los centros de estas circunferencias están sobre el eje de rotación. En nuestros ejemplos los paralelos siempre van a ser circunferencias contenidas en planos paralelos al x-y.

Los planos que contienen el eje de rotación, cortan la superficie definiendo curvas denominadas meridianos de la superficie.

Con el siguiente código podemos ver algunos paralelos y meridianos, que se generan a medida que se mueve la generatriz.

```
> paralelosymeridianos:=
          proc(ley,parametro::list)
           local i, j, a, m, incx, eccirc;
           m:=6:   incx:= (parametro[3] - parametro[2])/m:  detargs(args);
           for i from 1 to n do  ####1 genera los cuadros
              cur.i:=plot3d(ecparam(i*inc),
                       parametro[1] = parametro[2]..parametro[3],
                        y = 0..1, color = blue, thickness = 3,
                         style = hidden, scaling = constrained):
           for j from 1 to i do  ####2
               meris.j:=display(seq(cur.l,l=1..j)):         od:    ##2
           for a from 0 to m  do ####3
              xx:= parametro[2]+a*incx:
              eccirc:= tt->[subs(parametro[1] = xx, ep[1])*cos(tt),
                            subs(parametro[1] = xx, ep[1])*sin(tt),
                            subs(parametro[1] = xx, ep[2])] :
              circ.a:= plot3d(eccirc(tt),
                         parametro[1] = parametro[2]..parametro[3],
                         tt = 0..i*inc, color = red, thickness = 2,
                         style = hidden,
                         scaling = constrained):          od:    ##3
           todas.i:= display(seq(circ.k,k=0..m),axes=normal):
           final.i:= display(todas.i,meris.i,axes=normal):   od:   ##1
           final.0:= plot3d(ecparam(0),
                         parametro[1] = parametro[2]..parametro[3],
                         y = 0..1, color = blue, thickness = 3,
                         style = hidden, scaling = constrained):
           cur.0:= plot3d(ecparam(0),
                         parametro[1] = parametro[2]..parametro[3],
                         y = 0..1, color = blue, thickness = 3,
                         style = hidden, scaling = constrained):
           display(seq(final.i,i=0..n), insequence = true, axes = normal);
           end:
```

Este procedimiento es un poco más complicado. Con los siguientes comandos definimos la cantidad de meridianos a graficar, y la distancia entre ellos.

```
m:=6:   incx:= (parametro[3] - parametro[2])/m:
```

Con la siguiente anidación de **`for`** se van generando los sucesivos cuadros según el índice **`i`** (el **`for`** de más afuera). En el código se indicaron con un mismo número el inicio y fin de cada **`for`** para hacer más fácil la lectura del mismo.

El segundo argumento del procedimiento, llamado **`parametro`**, es de la forma **`[x, xmín, xmáx]`**. La estructura **`parametro[1] = parametro[2]..parametro[3]`**, que se repite en los comandos es la que permite al procedimiento realizar los gráficos con segundo argumento **`x = xmín..xmáx`**.

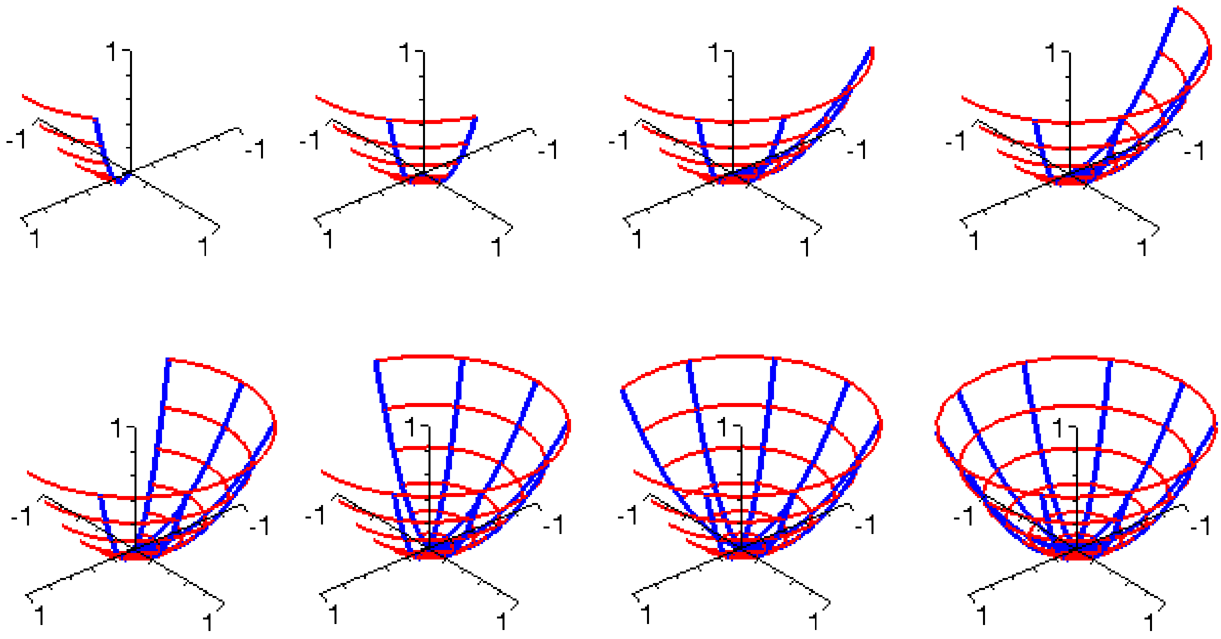
La variable **`cur.i`** guarda el último meridiano generado, la variable **`meris.i`** guarda todos los meridianos generados hasta ese instante. Con el **`for`** de índice **`a`**, se generan los paralelos, que se grafican en colorado.

En la variable **`todas.i`** se guarda una porción de cada uno de los 6 paralelos: a medida que crece **`i`**, se van completando las circunferencias.

Por último, en la variable **`final.i`** se van guardando los meridianos y los tramos de los paralelos generados hasta ese instante.

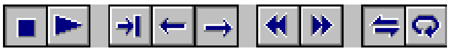
Como ejemplo, se muestra nuevamente la rotación de $z = x^2$:

```
> paralelosymeridianos(x^2, [x, 0, 1]);
```



Superficie animada

Como etapa final mostramos ahora la animación de la generación de la superficie. El primer cuadro muestra la generatriz, ubicada en el plano x-z. A partir del momento en que se ejecuta la animación con el segundo botón de la barra de herramientas, se comienza a formar la superficie.



Barra de herramientas de animación de Maple V

El código correspondiente es el siguiente:

```
supderev:= proc(ley,parametro::list)
            local i;
            detargs(args);
            for i from 1 to n do
               cur.i:= plot3d(ecparam(i*inc),
                              parametro[1]=parametro[2]..parametro[3],
                              y = 0..1, color = blue, thickness = 3,
                              style = hidden, scaling = constrained):
               sup.i:= plot3d(ecparam(tt),
                              parametro[1] = parametro[2]..parametro[3],
                              tt = 0..i*inc):
               cursup.i:=display(cur.i, sup.i, axes = normal):
                              od:
            cursup.0:= plot3d(ecparam(0),
                              parametro[1] = parametro[2]..parametro[3],
                              y = 0..1, color = blue, thickness = 3,
                              style = hidden, scaling = constrained):
             (seq(cursup.i,i = 0..n), , axes = normal);
            end:
```

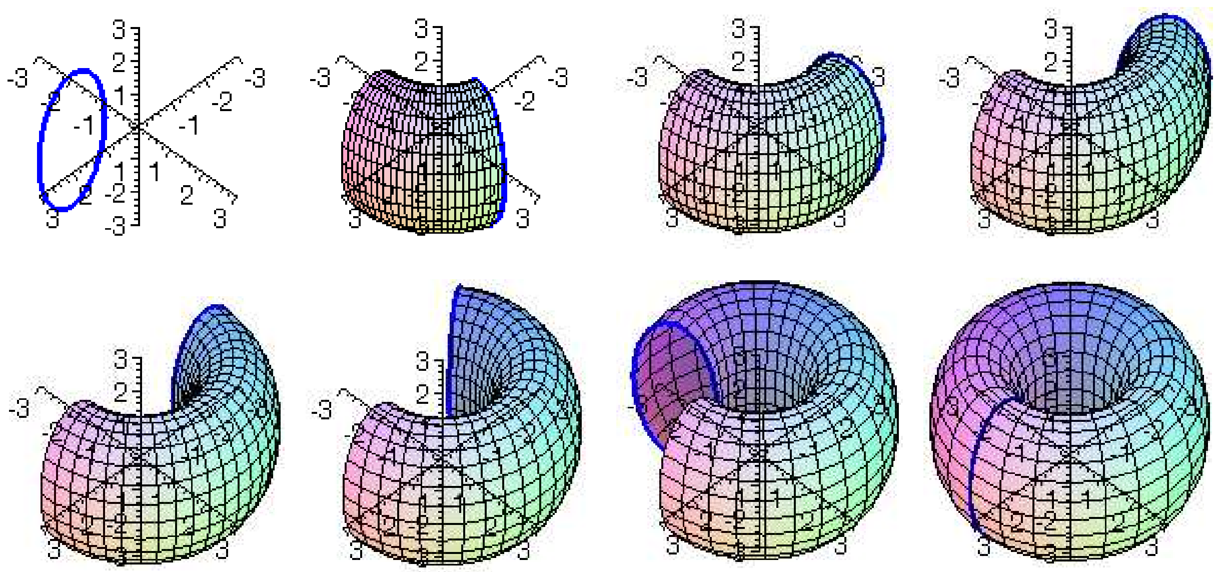
Con respecto al código, se invoca en primera instancia el procedimiento **`detargs`**, para determinar la forma en que están dados los parámetros, como en los procedimientos anteriores.

Luego se ejecuta un lazo que en cada iteración genera un cuadro, donde el gráfico correspondiente muestra un meridiano (**`cur.i`**) y la superficie generada hasta ese instante (**`sup.i`**). Con **`cursup.i`** se muestran ambos elementos.

Tanto en este procedimiento como en los anteriores hemos descripto detalladamente las funciones nuevas que hemos escrito. Hemos utilizado funciones inherentes de Maple V, que no explicamos ya que pueden verse en las páginas de ayuda del progama. Una opción que está incorporada, que no debe olvidarse al preparar una animación es **`insequence = true`** en el comando **`display`**.

Como ejemplo mostraremos la generación de un toro. Esta superficie de revolución se obtiene por la rotación de una elipse alrededor de una recta exterior, ambas contenidas en el mismo plano.

```
> supderev([2 + cos(t), 1 + 2*sin(t)], [t ,0, 2*Pi]);
```



Conclusiones

Hemos mostrado en este trabajo la capacidad de los programas simbólicos, en este caso de Maple V, para generar animaciones y presentado diversos casos que pueden ilustrar al lector y motivar a los docentes interesados en los mismos, para que puedan desarrollar sus propias animaciones según la planificación específica de sus asignaturas. Para facilitar esta actividad a los profesores interesados hemos descripto con cuidado los distintos procedimientos utilizados. Asimismo ofrecemos a todos nuestros colegas todo tipo de apoyo que nos puedan solicitar a nuestras respectivas direcciones electrónicas.

Estas y otras animaciones en acción pueden verse en www.frsn.utn.edu.ar, en el vínculo correspondiente al Grupo de Informática Educativa de la Secretaría de Ciencia y Tecnología.

Referencias

1. **Animando la Matemática**, R. E. Caligaris, G. B. Rodríguez y M. G. Caligaris. Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería **1** (2000) [1] 17-26

2. **Animando la Física. Parte I: Propagación de ondas**, O. V. Nagornov, R. E. Caligaris, G. B. Rodríguez y M. G. Caligaris. Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería **2** (2000) [3] 41-44

3. **Una chimenea virtual**, O. V. Nagornov, N. E. Quaranta, R. E. Caligaris, G. B. Rodríguez y M. G. Caligaris. Emnus 2001

Herramientas Computacionales para la Educación

Mario Marín Sánchez•

Resumen :

En los últimos años se ha generado una buena cantidad de herramientas computacionales orientadas a contribuir en el desarrollo y mejoramiento de los procesos de enseñanza-aprendizaje. Todos estos intentos reflejan la percepción particular de diversos autores acerca de cómo integrar la tecnología computacional en los procesos de educación.

La interacción, la simulación, el hipertexto y la educación a distancia de seguro contribuirán a hacer una educación más eficiente, más oportuna y esperemos que más democrática. Esta ponencia es una reflexión del autor acerca del tema.

Introducción

En esta ponencia, el autor desea compartir algunos de sus puntos de vista respecto a la educación virtual; más que todo es un llamado a la comunidad educativa interesada, a la reflexión sobre el fenómeno educativo en el contexto social, cultural y tecnológico actual.

En educación, ha habido un creciente interés por estudiar el papel que debe jugar la tecnología computacional en los procesos educativos. Estas tecnologías abren una serie de oportunidades. Entre otras características llama la atención que:

- Pueden adaptarse a las dificultades propias de cada estudiante, pues permiten que sea él mismo quien controle los tiempos dedicados a estudiar una materia, y se espera que esta libertad pueda contribuir a aumentar el aprovechamiento del tiempo dedicado al aprendizaje.
- Permiten minimizar los problemas de distancia y espacio, pues facilitan los procesos de educación remota.
- Permiten a los estudiantes aprender independientemente, en su propio espacio y de una manera no lineal, facilitando la generación de métodos personificados de estudio.

• Escuela de Matemática. Instituto Tecnológico de Costa Rica

- Hacen que la información necesaria para el desarrollo de proyectos sea más accesible.
- Permiten crear materiales didácticos enriquecidos con facilidades de navegación, animaciones y simulaciones. El material puede adaptarse a las condiciones propias de cada estudiante, abriendo la posibilidad de que pueda explorar los temas del curso en distintos niveles, acorde con sus conocimientos previos, con sus capacidades y expectativas.

La matemática como un fin o como un medio

Cuando un profesor empieza a enseñar un curso de cálculo, por ejemplo, es muy frecuente que muchos estudiantes se cuestionen acerca de la necesidad que tienen ellos de “aprender” o “comprender” los conceptos que allí se estudian. Y a veces como profesores, tenemos la tendencia a sentirnos responsables de que el estudiante sienta ese vacío y tratamos de encontrar salidas a este problema, incorporando en nuestros cursos algo que se nos ha ocurrido llamar aplicaciones. Esto puede ser un error, dado que en la mayor parte de los cursos básicos los estudiantes no conocen los conceptos que sustentan posibles aplicaciones, y en muchos casos los mismos profesores no conocemos lo necesario del tema en el cual queremos aplicar la matemática.

Ciertamente autores como Stewart dedican en sus libros secciones completas a estudiar "aplicaciones del cálculo". Paradójicamente, para poder abordar algunas de estas aplicaciones se hecha mano a conceptos que el estudiante tampoco conoce y al final de cuentas una sonada aplicación se reduce a un cálculo en el cual no se sabe bien qué es lo que se está haciendo, aunque se haga, y tampoco se sabe para qué se está haciendo, aunque se sepa qué es lo que se debe hacer.

Por eso es trascendental que definamos claramente qué es lo que buscamos de la matemática que enseñamos. Debemos entender que no siempre tendremos la oportunidad de encontrar referentes concretos para los conceptos que enseñamos, acaso no es poco probable que el dilema del V postulado haya surgido de un apego equivocado a un referente concreto.

En este sentido, la computadora ha incorporado un nuevo escenario desde el cual podemos replantear algunos viejos problemas de la enseñanza de la matemática. Si bien los conceptos que sustentan ciertas aplicaciones son poco accesibles para los estudiantes a niveles básicos, la incorporación de simulaciones o experimentaciones puede contribuir a mejorar la motivación que tenga el estudiante para abordar los temas.

Paralelamente, la computadora abre oportunidades especialmente deseables en la formación de estudiantes. Por un lado, permite marginar algunas prácticas educativas sobre cuyo valor formativo puede generarse mucha duda. Por ejemplo, en presencia de la tecnología computacional, se hace necesario ponderar la importancia de enseñar mucho sobre técnicas para resolver ecuaciones versus el estudio adecuado de conceptos que sustentan esos métodos. Por ejemplo, es común que un estudiante pueda resolver ecuaciones y que conozca y aplique con suficiente claridad reglas para despejar. Pero en muchos casos, ese mismo estudiante, al encontrar la solución, no sabe qué obtuvo.

El uso de la computadora como agente transformador de la educación debe partir de dos principios muy básicos. Primero que todo no podemos pensar que la computadora solamente nos ayudará a modernizar viejas prácticas educativas; al contrario de la mismo forma que contribuye a mejorar ciertas formas de educación debe convertirse en un agente de modernización de la manera en la cual percibimos la educación; los objetivos, las metodologías y los actores debemos modernizarnos también. En segunda instancia, la herramienta computadora no debe inducirnos ha hacer usos inadecuados de la misma: las facilidades gráficas, la velocidad y otras ventajas de este medio no son suficientes razones para usarla en educación. La mejor razón para decidir usarla para el desarrollo de un tema es porque puede contribuir a lograr mejor los objetivos propuestos para ese tema.

Lo más importante es tener en cuenta todas las variables presentes para evitar consecuencias indeseadas. De ser posible, alimentar la idea de que la transformación es integral; así como puede cambiar la forma en la cual abordamos ciertos temas usando el recurso computacional, también pueden variar los objetivos que los sustentan.

El asunto es aprender a visualizar los problemas de la enseñanza en la dimensión que les corresponde.

Manejo oportuno y eficiente de la información.

La facilidad para la comunicación y el manejo de los datos que ofrece la Internet, las capacidades gráficas del computador, la velocidad en el procesamiento de la información, el manejo numérico preciso, etc., hacen que la computadora se transforme en un medio ideal para transmitir información al estudiante. Esta información debe ser oportuna, clara y suficiente para el estudiante; el profesor, como responsable absoluto de lo que el estudiante aprenda, debe convertirse en el agente catalizador que permita que esa información contribuya al desarrollo del estudiante.

La conjugación de la graficación con la experimentación, permite una mejor comunicación de los conceptos al estudiante, pues los está recibiendo en forma teórica y en forma gráfica, mientras que simultáneamente puede explorar el rol de los parámetros o variables. Estas características permiten orientar los escenarios computacionales educativos hacia la interacción.

La interacción

Juanito acaba de plantear una ecuación que resuelve un problema de confites y pulperos, para él terriblemente complejo. Su maestra, quien no puede ocultar una profunda sonrisa de satisfacción al ver cómo Juanito ha logrado dar un paso importante hacia la comprensión del significado de una variable y cómo usarla para plantear un problema le responde:

!Perfecto!

Juanito, quien de seguro notó la satisfacción de su maestra, regresa a su pupitre, seguramente orgulloso de sí mismo. Y de seguro mas motivado para abordar el próximo reto.

La interacción es, quizás, una de las posibilidades más prometedoras del uso de la tecnología como apoyo educacional, y es el escenario computacional más propicio para relacionarse con una tendencia importante entre los teóricos de la educación: el constructivismo.

Por ejemplo, cuando un profesor construye una aplicación que le permite al estudiante manipular parcialmente el tamaño del lado de un rectángulo, de perímetro constante, puede inducir al estudiante a comprender mejor los conceptos de variable, de dominio, de función, de rango, de máximo, de intervalo abierto, etc., de manera más natural y más concreta, inclusive, puede diseñar actividades exploratorias para que el estudiante *construya* algunos conocimientos.

Existen diversas opciones que permiten incorporar elementos de interactividad en los escenarios para el aprendizaje. Los lenguajes de programación de propósito general como el C, o el Java son vehículos importantes para crear este tipo de escenarios, no obstante, la tendencia de los últimos años ha sido la de crear aplicaciones de propósito educativo que permitan este tipo de interactividad. Por ejemplo el Geómetra, el JavaSketch, el Mathematica, etc., ya brindan este tipo de facilidad.

Las actividades interactivas son aquellas en las cuales el estudiante tiene una participación activa. Más allá de apretar botones para ver que ocurre, en este tipo de actividad el estudiante puede participar activamente de situaciones que despierten su interés y lo hagan descubrir. Lo que pareciera ser el común denominador de estas actividades es que brindan la posibilidad de que el estudiante razone, que descubra y concluya.

Conclusiones

Los procesos educativos son suficientemente complejos como para poder resolverlos con una herramienta particular o con algún paradigma educativo específico. Cualquier estrategia que proponga contribuir a mejorar los resultados de esos procesos, llámese asistida por tecnología o no, debe partir de este principio.

Durante miles de años la humanidad ha practicado técnicas educativas tanto formales como no formales y aún así hoy día no hemos llegado a un consenso respecto a la universalidad de una u otra estrategia. Algunas de ellas han demostrado ser buenas en algunos casos particulares en otros pueden llevar a resultados

Los cambios para bien en la educación no son instantáneos; al contrario, la complejidad del fenómeno educativo es tal que las respuestas son lentas aun cuando las transformaciones sean grandes. ¿Cuánto tiempo necesitaría un profesor para prepararse a transformar su quehacer educativo tradicional en uno que incorpore de manera eficiente y oportuno el recurso computacional?

Para lograr la incorporación de la computadora como elemento que ayude al desarrollo de programas educativos hay situaciones estratégicas de que deben atenderse.

Un compromiso educativo distinto

Algunas dinámicas educativas computarizadas requiere un mayor compromiso por parte del estudiante. Hay tareas debe atender solo, con pocos o ningún control por parte del profesor. Y muchas actividades estarían condenadas al fracaso si el estudiante no asume un rol activo en el proceso.

El profesor por su parte también adquiere compromisos diferentes. Un clase en la cual el estudiante pueda explorar o hacer conclusiones requiere de mayor preparación. Pueden ocurrir situaciones no previstas, conclusiones no esperadas y debe estar preparado para ello.

Características particulares

En matemática debe considerarse la dificultad propia que tienen algunos temas y que suelen obligar al estudiante y al educador a entrar en un proceso de comunicación directo para que el primero oriente las concepciones que tiene el segundo hacia la construcción del concepto deseado.

Escenarios mixtos

La combinación de elementos de educación virtual con los tradicionales es una buena alternativa. Para un estudiante común del tecnológico, el hecho de disponer de material didáctico que combine las presentaciones usuales de los temas del curso con interacción o con experimentos dirigidos o con simulaciones le permitirá una mayor motivación y con ello un mejor acercamiento con los objetivos propuestos en el curso.

Investigación constante

Las opciones que ofrece el uso adecuado de la computadora podría generar mejoras en la calidad de los cursos; tanto en contenidos como en enfoques. Se hace necesario revisar propuestas hechas en otras universidades, valorar las oportunidades que se nos presentan para hacer innovaciones educativas significativas y minimizar cualquier amenaza que pueda perjudicar las estrategias que se propongan. Todo esto para desarrollar una sólida cultura de uso integral de la tecnología en los procesos educativos.

Bibliografía

Carswell L., ``The Virtual University: Toward an Internet paradigm", SIGCSE Bulletin, Vol. 30, No.3, 1998, pp 46--50.

Coles P., `` I have a drean...," UNESCO Sources, No. 137, 2001.

Crespo S., ``Algunas Consideraciones Sobre el Uso de Tecnología para Enseñar Matemáticas," Internet: Boletín No. 5 del Comite Interamericano de Educación Matemática, 1997.

Galvis A., ``Evaluación de Materiales y Ambientes Educativos Computacionales", Informática Educativa, Vol. 6, No. 1, 1993, pp. 9--27.

Galvis A., ``Planeación Estratégica de Informática Educativa", Informática Educativa, Vol. 5, No. 2, 1992, pp. 105--114.

Gonzales R., Cranith G., ``Multimedia Eduacation - Quo Vadis?", SIGCSE Bulletin, Vol. 30, No. 3, 1998, pp. 90--93.

Harger R., ``Teaching in a Computer Classroom with a Hyperlinked, Interactive Book", IEEE Transactions on Education, Vol. 39, No.3, 1996, pp 327--334.

Harisim L.,``A Framework for Online Learning: The Virtual-U", IEEE Computer, Vol. 32, No. 9, 1999, pp 44--50. 1992, pp. 23--34.

Holmes W., The Myth of Educational Computer IEEE Computer, Vol. 32 No 3, septiembre, 1999.

Hu H, The Mathematics Education Reform: Why You Be Concerned and Wath You Can Do, Amer. Math. Monthly 104 (1997), 946--954.

Lidtke D., Moursund D.``Computers in Schools: Past, Present, and how we can change the future, Communications of the ACM} Vol. 36, No.5, 1993, pp. 84--87
on Education Vol. 39, No. 3, 1996, pp 375--380.

LÓGICA Y CONJUNTOS CON MATHEMATICA 4.1

Leonel L. Palomá Parra[*+]
Alvaro Salas Salas *

***Universidad de Caldas.**
+Universidad Nacional de Colombia.

RESUMEN

Cualquier Sistema físico o abstracto , Johansen 1994, está compuesto por una colección de partes interrelacionadas con un objetivo específico. El objetivo de este escrito es desarrollar algunos conceptos de la lógica matemática vista como un sistema abstracto identificando la colección de partes que lo componen con sus respectivos atributos, lo mismo que mostrar la forma en que es posible programar en Mathematica 4.1® ciertas operaciones lógicas, las cuales se ven como procesos. Se presenta el código de algunos de estos programas.

1. INTRODUCCIÓN.

La teoría general de Sistemas, según el enfoque de Bertalanffy, define un sistema como una colección de partes físicas o abstractas interrelacionadas con objetivos específicos, en contorno llamado supersistema.

Estos sistemas pueden ser abiertos o cerrados, dependiendo si hay o no intercambio de información con el medio (supersistema).

La partes de un sistema en este mismo contexto son, entre otras, los procesos, flujos de entrada y de salida, las variables, las constantes, sistemas (subsitemas) con sus respectivas interrelaciones y atributos (propiedades) que lo hacen un sistema consistente.

Desde este punto de vista, el de la teoría general de sistemas, podemos caracterizar un idioma, por ejemplo el idioma español, cuyos elementos son: el alfabeto, los signos de puntuación, reglas semánticas, reglas sintácticas y procesos como: el constructor de palabras, constructor de frases, constructor de párrafos, etc, y como contorno la expresión oral y escrita.

El idioma nos permite la comunicación entre las personas mediante la expresión oral y escrita, donde la buena comunicación depende del buen uso del alfabeto y sus reglas y la forma eficiente de definir sus interrelaciones.

Es así que en este escrito tratamos conceptos de la lógica matemática desde el punto de vista de la teoría general de sistemas, definiendo todas sus partes con sus respectivos atributos.

2. EL SISTEMA DE LA LOGICA.

Al igual que con el idioma, en el sistema de la Lógica Matemática hay que definir un alfabeto, palabras, procesos, reglas, variables, constantes, contorno, sus interrelaciones y sus atributos.

En primer lugar podemos decir que el alfabeto está compuesto por todas las oraciones gramaticales enunciativas expresadas de tal manera que puede decirse de ellas si son verdaderas o falsas, llamadas proposiciones cerradas. A verdadero (V) y Falso (F) se les llama valores de verdad de la proposición.

A una proposición que aceptamos siempre como verdadera se llama axioma, y a una proposición cerrada cuya verdad puede ser demostrada se le llama teorema.

Un atributo de las proposiciones cerradas es que no pueden ser verdaderas y falsas simultáneamente.

Los procesos lógicos son constructores de proposiciones compuestas, y esencialmente son tres: la disyunción, ($\vee$), la conjunción ($\wedge$) y la negación ($\neg$).

El primero y segundo proceso actúa ante dos flujos de entrada para producir un flujo de salida, y el último actúa ante un flujo de entrada para producir un flujo de salida, los cuales podemos representar mediante los siguientes diagramas:

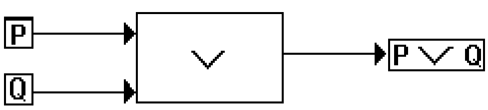


Figura 1

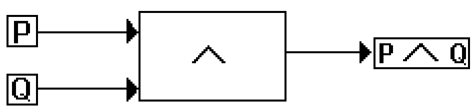


Figura 2

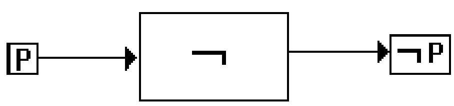


Figura 3

Los procesos de la figura (1) y (2) puede permanecer en 4 estados diferentes, y el proceso de la figura (c) puede permanecer en dos estados diferentes, dependiendo de los valores de verdad de los flujos de entrada.

Un caso particular se muestra en los siguientes diagramas:

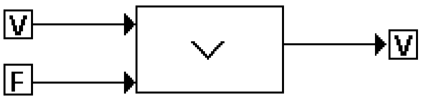


Figura 4

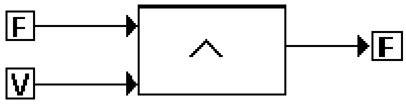


Figura 5

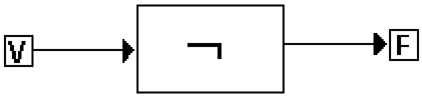
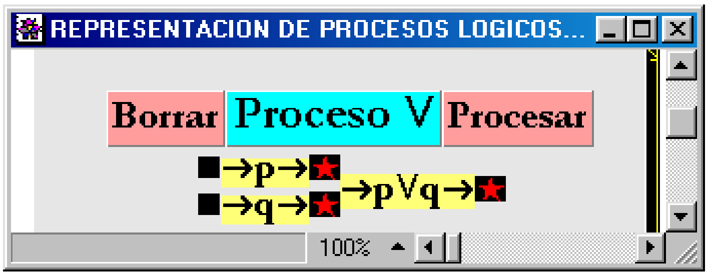


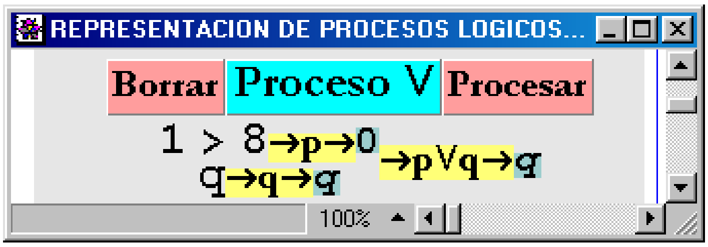
Figura 6

Cada uno de estos procesos tienen atributos tales como: Idempotencia, conmutatividad, asociatividad, entre otros.

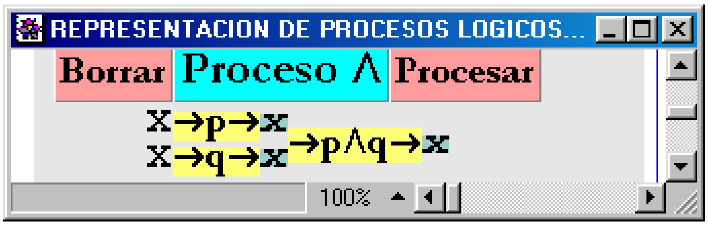
En Mathematica 4.1 podemos programar estos procesos. Se puede hacer una representación como se muestra a continuación :



Se llenan las casillas de color negro con proposiciones (que pueden estar representadas por letras o ser proposiciones que Mathematica identifica como falsas o verdaderas). A continuación se pincha el botón **Procesar**. Si se desea realizar otro cálculo, se pincha el botón **Borrar**. Por ejemplo, si P = “1>8” (esta proposición es falsa. El programa le asigna el valor 0. Cuando una proposición es verdadera, el programa le asigna el valor 1) y Q = q , entonces al ingresar estos datos al programa, éste nos proporciona lo siguiente :



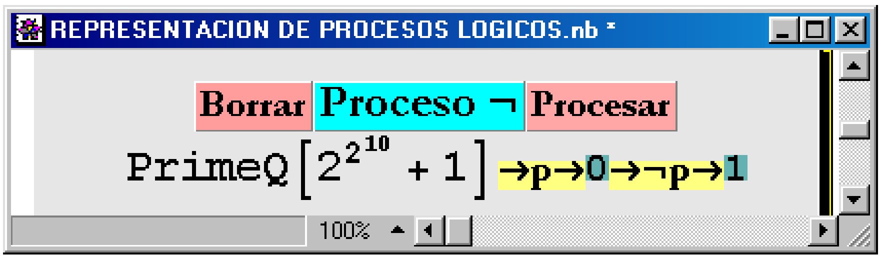
Para las proposiciones P= x y Q = x, el programa que realiza el proceso $\wedge$ nos proporciona lo siguiente :



Según esto, $x \wedge x$=x, lo cual nos dice que la conjunción es idempotente.

El proceso $\neg$ se ha representado en Mathematica como sigue :

Si P = "$2^{2^{10}}+1$" es un número primo, entonces el programa nos proporciona lo siguiente :



Según esto, el número $2^{2^{10}}+1$ no es primo. La negación de P, es decir, la proposición "$2^{2^{10}}+1$ no es un número primo" es, por consiguiente, verdadera.

A partir de los tres procesos antes mencionados podemos definir otros procesos menos simples como por ejemplo el proceso de la implicación ilustrado en el siguiente diagrama, simbolizado **P** $\Rightarrow$ **Q, P** implica **Q.**

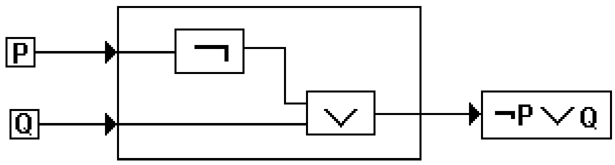


Figura 7

Este proceso tiene 4 estados posibles. Un estado particular es:

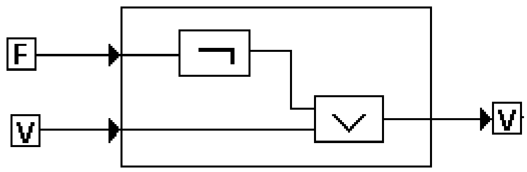
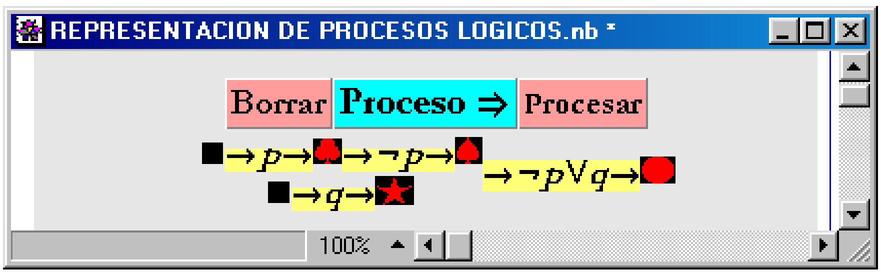


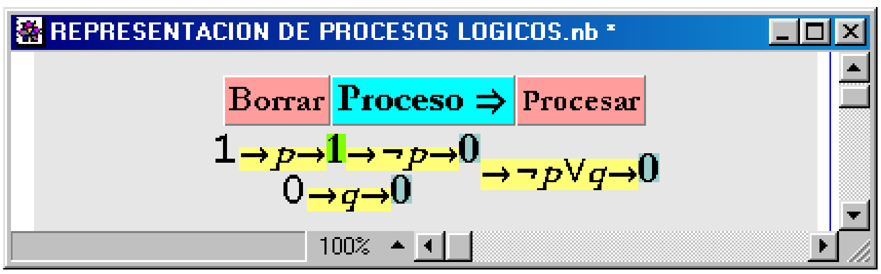
Figura 8

A diferencia de los casos anteriores, aquí es importante el orden de los flujos de entrada, es decir que no es un proceso conmutativo.

En Mathematica este proceso se ha representado de la siguiente manera :



Al tomar P=V y Q = F se obtiene :



Existen procesos con características especiales, como por ejemplo aquellos donde el flujo de salida siempre es verdadero independiente de los flujos de entrada, llamados procesos tautológicos, ver Figura 10,

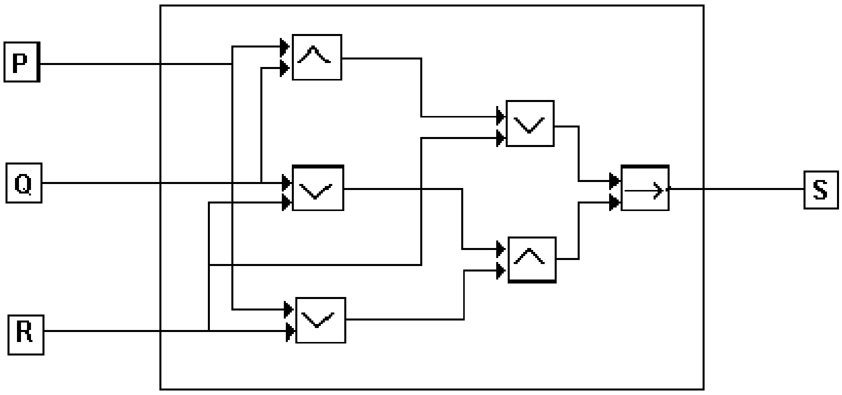


Figura 10 Proceso Tautológico

$$S = ((P \vee Q) \vee R) \rightarrow ((P \vee R) \wedge (Q \vee R))$$

Otros donde el flujo de salida siempre es falso independiente de sus flujos de entrada, llamados procesos contradictorios, ver Figura 11,

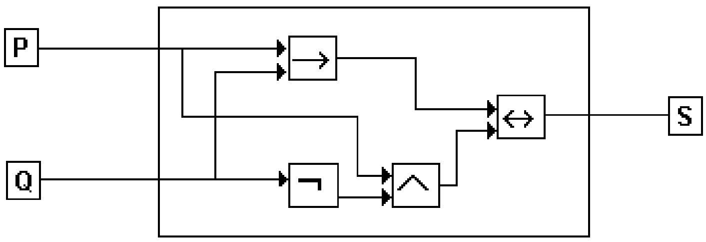
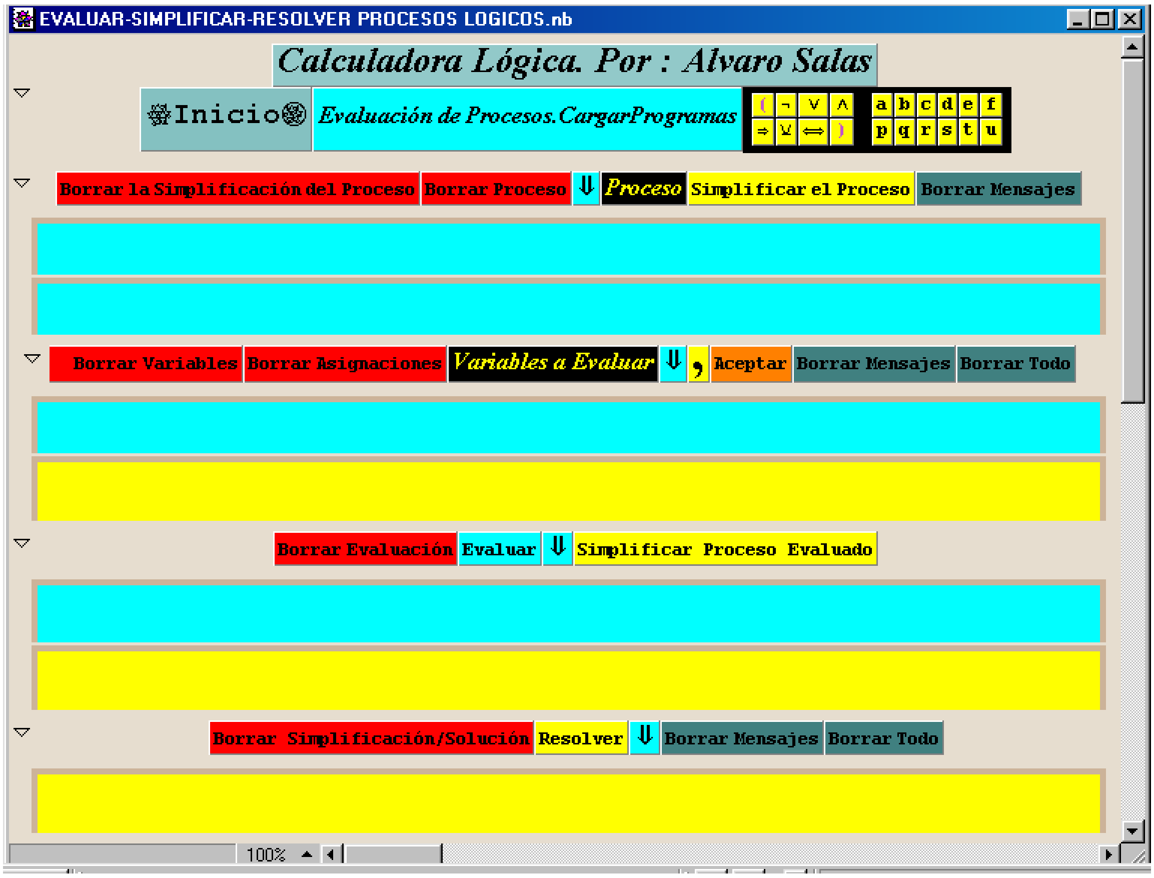


Figura 11. Proceso Contradictorio

$$S = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$$

Para trabajar con procesos de mayor complejidad se ha escrito en Mathematica un programa especial para tal fin. Este programa permite evaluar un proceso para una , alguna o todas las variables que en él intervienen. De otro lado, este programa también puede simplificar el proceso. Esto se logra con ayuda del algoritmo de Quine-McCluskey, el cual no se encuentra implementado en el núcleo(Kernel) de Mathematica. La forma como este programa aparece en el Front End de Mathematica 4.1 se muestra a continuación :



Para usar este programa, primero se deben cargar los programas necesarios. Esto se hace pinchando los botones que se muestran a continuación, los cuales aparecen al comienzo :

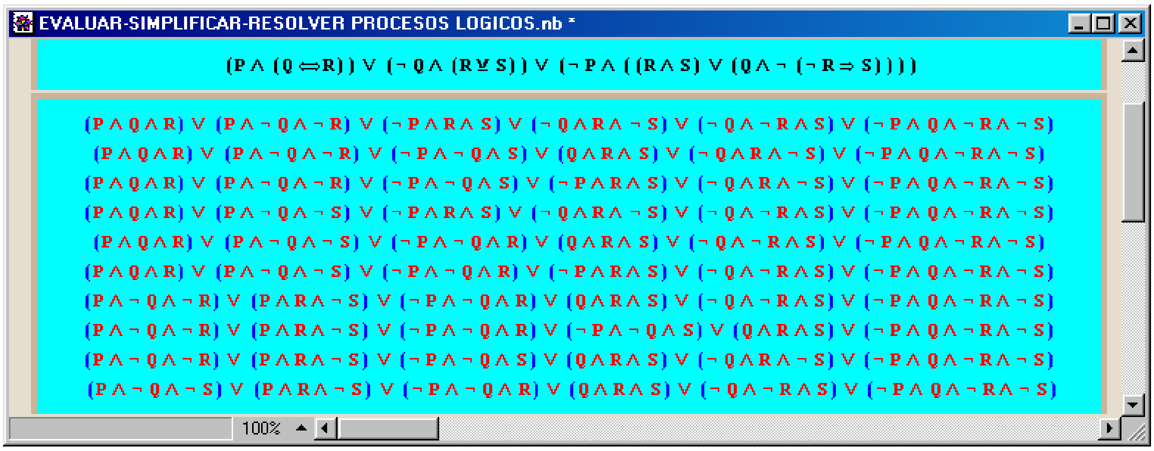
Primero se pincha el botón izquierdo y luego el derecho (no a la inversa). A la derecha de estos dos botones aparece una caja de herramientas que permiten escribir las expresiones lógicas correspondientes. Una vez cargados los programas, podemos proceder a evaluar y/o simplificar un proceso lógico dado, lo mismo que resolver ciertas ecuaciones lógicas.

A manera de ejemplo, consideremos el proceso

[illegible]

Este proceso se introduce como se aprecia a continuación :

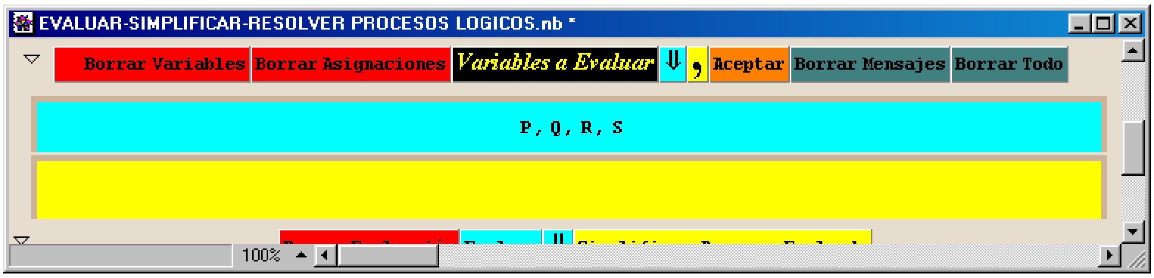
Si deseamos simplificar este proceso, hacemos click en el botón **Simplificar el Proceso**. Al pinchar este botón nos aparecen 10 simplificaciones de nuestro proceso, todas ellas equivalentes (estas aparecen inmediatamente debajo de la expresión para el proceso) :



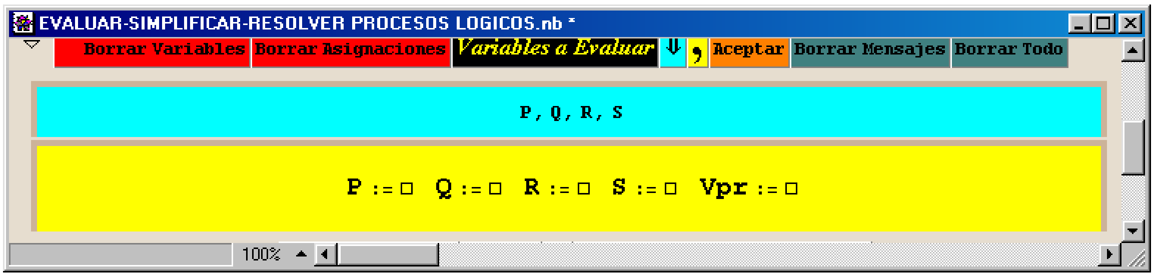
El proceso y su (s) simplificación (es) se pueden borrar bien sea manualmente (con el mouse) o por medio de los botones

Borrar Proceso y **Borrar la Simplificación del Proceso**, respectivamente.

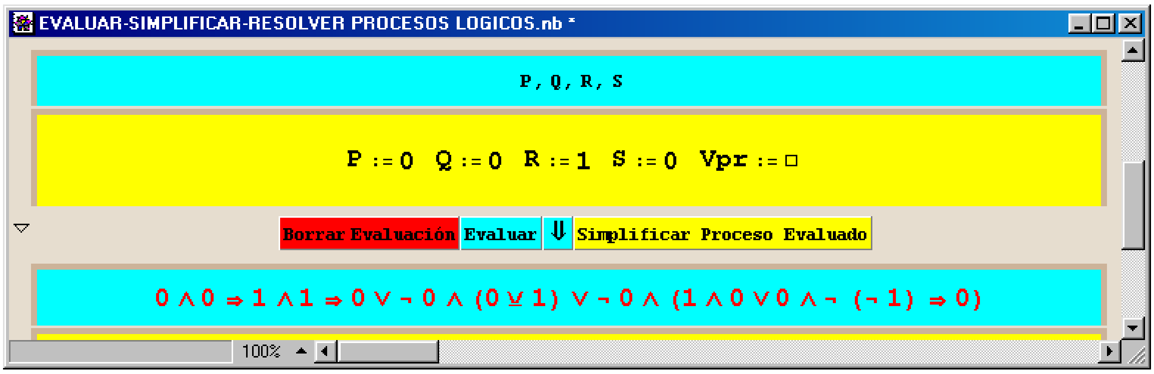
En ciertas ocasiones podemos estar interesados en evaluar un proceso para una, algunas o todas las variables que en él intervienen. A manera de ejemplo, evaluemos nuestro proceso para $P = 0$, $Q = 1$, $R = 0$ y $S = 0$. Inicialmente introducimos las variables a evaluar como se muestra a continuación :



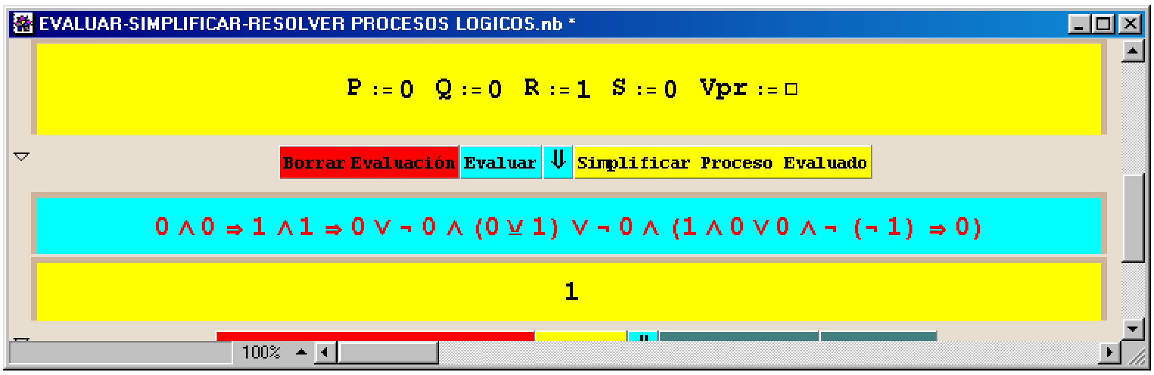
Después de esto hacemos click en el botón **Aceptar**, con lo cual nos aparecen los cuadros para las respectivas asignaciones :



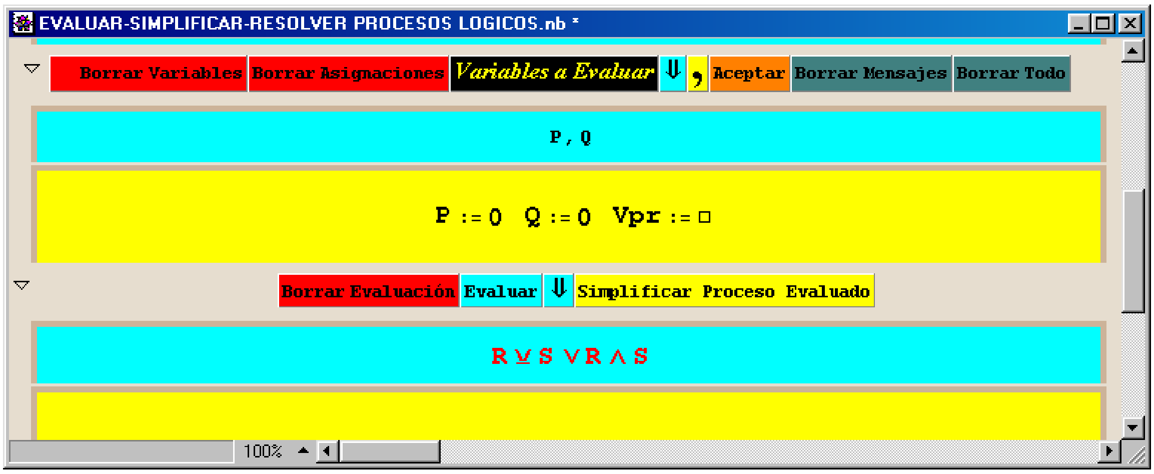
Al llenar las casillas en blanco con los valores respectivos (la última casilla a la derecha en este caso no se llena) y luego hacer click en el botón **Evaluar**, el programa nos proporciona la siguiente información :



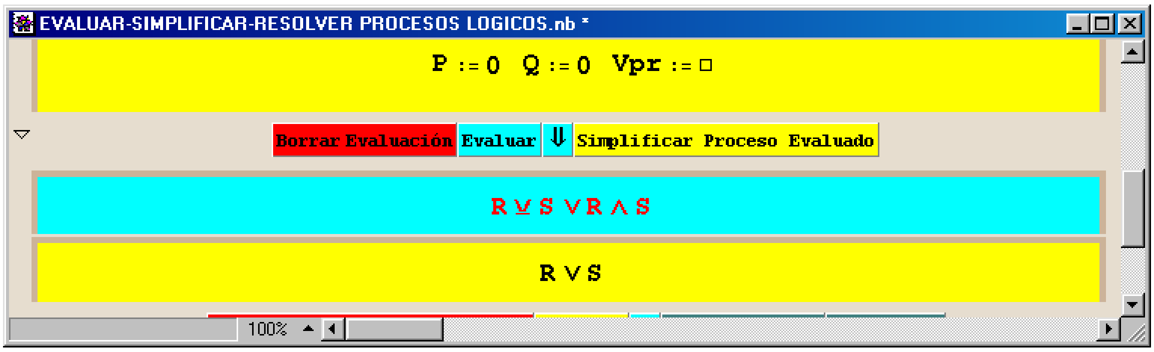
Finalmente, al aplicar el botón **Simplificar Proceso Evaluado**, se obtiene :



Si estamos interesados en evaluar algunas de las variables, podemos recurrir a los botones **Borrar Variables** y **Borrar Asignaciones**. Por ejemplo, deseamos evaluar nuestro proceso para P= 0 y Q = 0 :

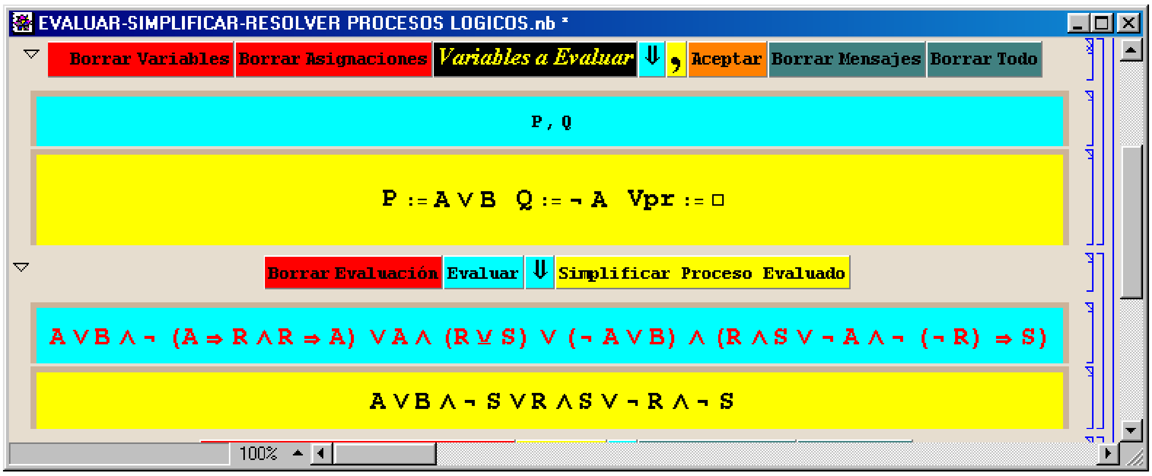


El proceso resultante dependerá, en general, de las variables que no han sido evaluadas, en este caso de R y S. Por último, si deseamos simplificar la evaluación obtenida, aplicamos el botón **Simplificar el Proceso evaluado**. Al pinchar este botón obtenemos la siguiente simplificación :



También es posible evaluar un proceso cuando a las variables se les asignan valores representados en otros procesos. Esta operación es conocida como composición de procesos.

Por ejemplo, al evaluar y simplificar nuestro proceso para $P = A \vee B$ y $Q = \neg A$ obtenemos :



3. ECUACIONES LOGICAS

La figura 12 está relacionada con el proceso

$$\neg P \wedge (S \rightarrow (Q \vee R)) \wedge (\neg P \rightarrow \neg(Q \vee R)) \wedge (T \rightarrow S).$$

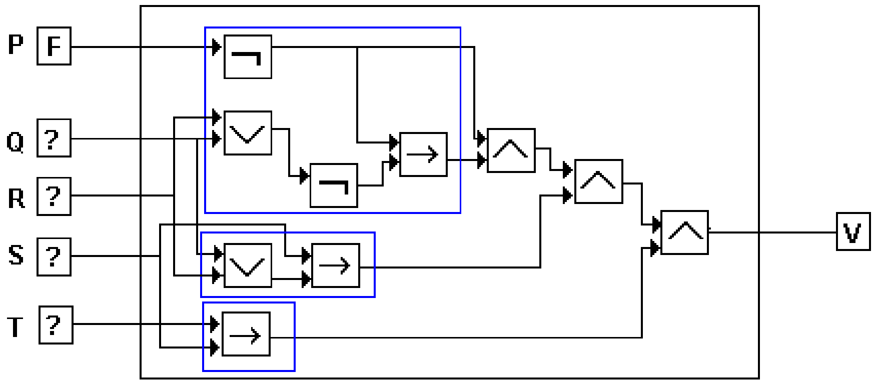


Figura 12. Representación de una ecuación lógica.

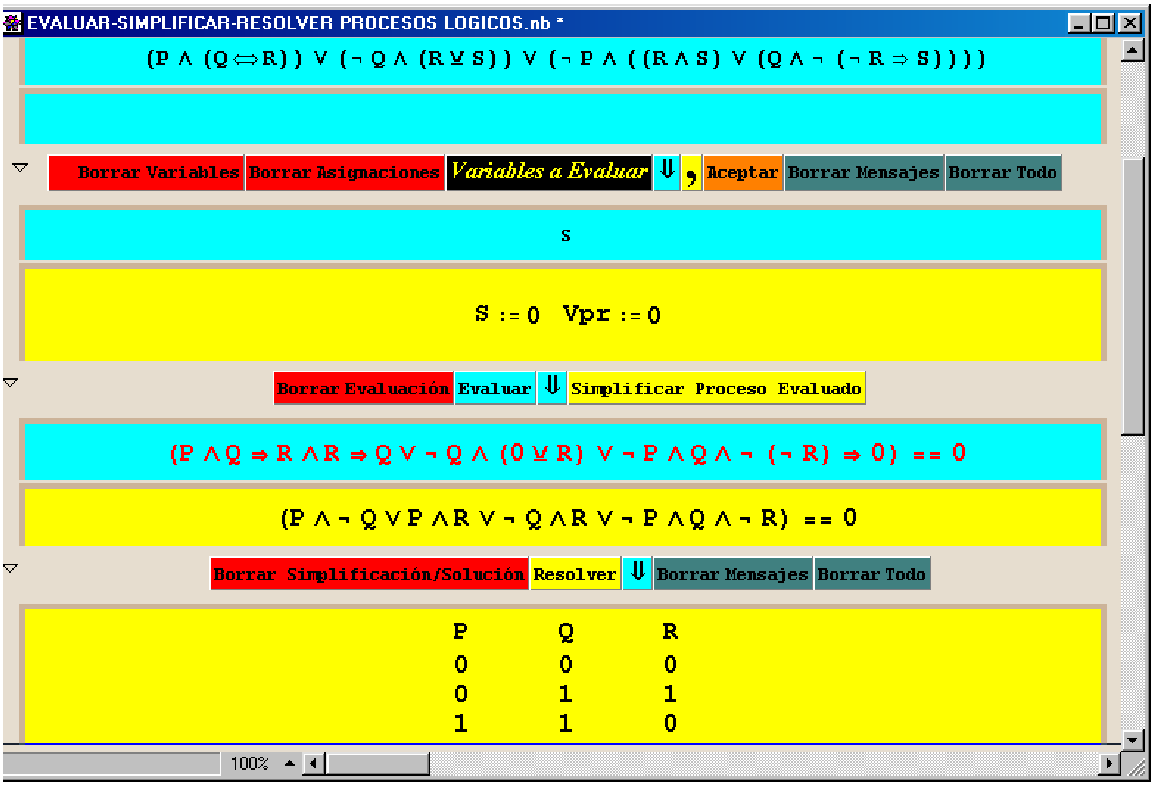
¿ Cuál debe ser el valor de verdad de **Q, R, S, T**, para que el flujo de salida sea verdadero? Haciendo un análisis del diagrama y usando los atributos de cada uno de los procesos podemos concluir que los valores de verdad de **Q, R, S, T,** deben ser falsos respectivamente. Esto también se puede concluir al simplificar el proceso, el cual equivale al proceso $\neg Q \wedge \neg R \wedge \neg S \wedge \neg T$. A los bloques internos se les llama premisas, y los valores de verdad de **Q, R, S, T** conclusiones.

El programa anteriormente descrito también se puede emplear para resolver este tipo de ecuaciones. A manera de ejemplo, consideremos nuevamente el proceso

[redacted]

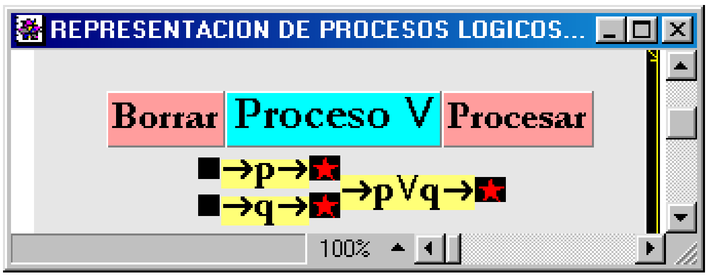
Suponiendo que $S = 0$, ¿ qué valores pueden tomar las demás variables si el flujo de salida ha de ser falso ?

En este caso, escogemos a S como la variable a evaluar. Llenamos la casilla correspondiente a **Vpr := *f*** con un 0. Para encontrar las soluciones de la ecuación aplicamos el botón **Resolver**. Los resultados del programa se muestran a continuación :



4. DESCRIPCIÓN DE ALGUNOS DE LOS PROGRAMAS ESCRITOS EN MATHEMATICA 4.1.

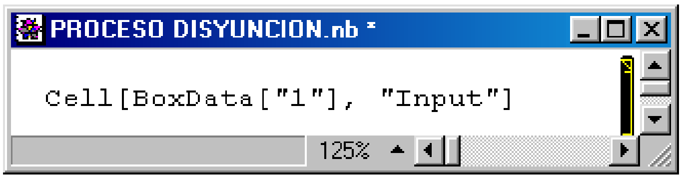
En esta sección se expilcará con detalle la forma como se construyó el proceso disyuntivo, es decir,



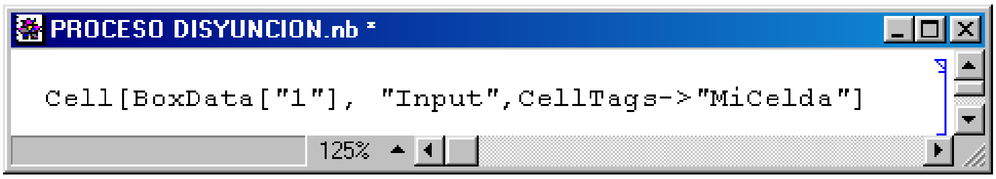
Los pasos a seguir son :

1.Primero que todo, abrimos un cuaderno (Notebook) nuevo en Mathematica y lo salvamos con un nombre, digamos “PROCESO DISYUNCION”.

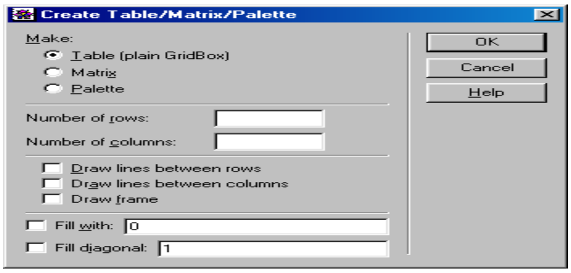
2. En el cuaderno se escribe algo, digamos “1”. Esto nos crea una celda. Seleccionamos esta celda con el mouse y aplicamos Shift+Ctrl.+E. Nos aparecerá lo siguiente :



3. Bautizamos la celda agregándole a ésta la opción “CellTags”. Démosle a esta celda el nombre “MiCelda” :



4. Seleccionamos la celda y nuevamente aplicamos Shift+Ctrl.+E. Esto nos llevará a una celda en donde aparece 1. Borramos el 1 (sin eliminar la celda). Luego vamos al menú Input. Desde allí activamos la opción “Create Table/Matriz/Palette” (Esto se puede lograr automáticamente aplicando “Shift+Ctrl.+C”. En la ventana de diálogo correspondiente escogemos “Table (plain GridBox)”, como se muestra a continuación :

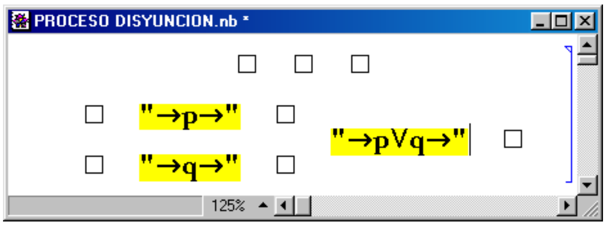


Usando reiteradamente esta ventana de diálogo construimos en la celda una tabla como la que se aprecia :

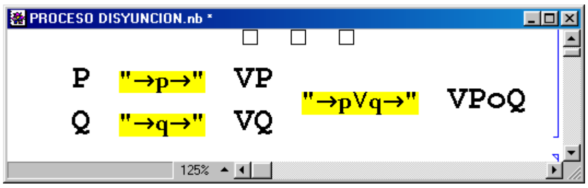
5. En una celda aparte se construyen las expresiones ®p® , ®q® y ®p∨q®. Por ejemplo, la expresión ®p® se puede obtener por medio de la instrucción

```
SequenceForm[StyleForm["®p®", FontWeight ® Bold,
  FontFamily ® Garamond, Background ® RGBColor[1, 1, 0], FontSize ® 18]]
```

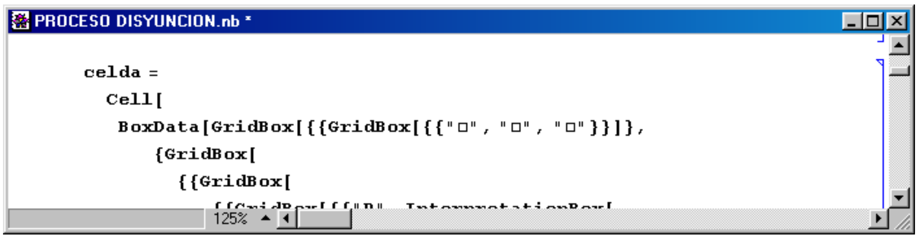
Una vez construidas estas expresiones, se copian y pegan a "MiCelda", como se muestra a continuación (Mathematica cuadra los espacios en forma automática) :



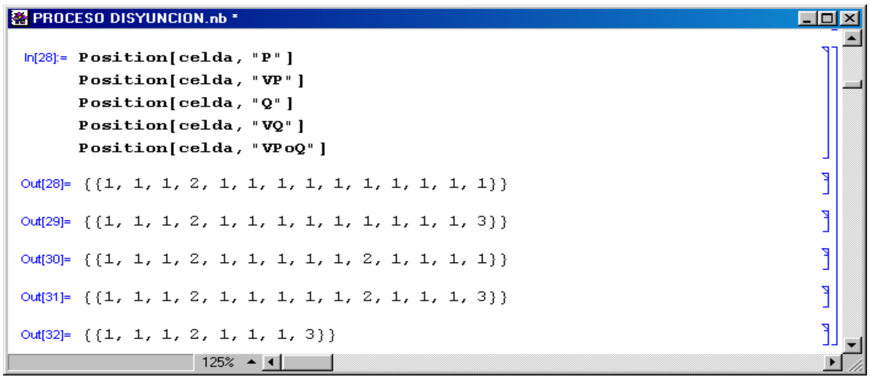
6. Llenamos las casillas correspondientes a P, a su valor, VP, a Q , a su valor VQ y al valor de $P \vee Q$, VPoQ, como se ilustra enseguida :



7. Seleccionamos "MiCelda" y le aplicamos "Shift+Ctrl+E", lo cual nos generará su código. En una celda aparte (que sea una celda de "Input") escribimos "celda=". Luego copiamos "MiCelda" a la celda en donde aparece "celda=" (se muestra una parte del contenido, ya que es extenso) :



Una vez hecho esto, colocamos ";" al final y luego aplicamos "Shift+Enter" o también "Intro" para que Mathematica "sepa" quién es "celda". En "celda" necesitamos conocer la posición de cada una de las variables P,VP;Q,VQ y VPoQ, las cuales introdujimos en 6. Estas posiciones pueden variar, dependiendo de la forma como se haya construido la tabla para el proceso (ver Paso 4). Esto lo logramos con el comando "Position" como se muestra a continuación :

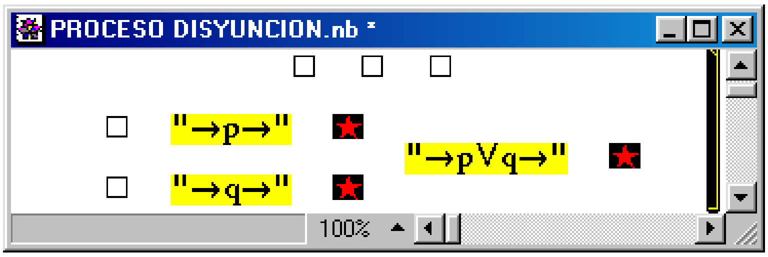


Ahora vamos A "MiCelda" y borramos con cuidado las expresiones P, VP, Q, VQ y VPoQ para regresar a una expresión como la mostrada en el Paso 5.

8. Construimos la expresión Ø por medio de la instrucción

SequenceForm StyleForm Ø FontWeight ® Bold
FontFamily ® Garamond , Background ® GrayLevel
FontColor ® RGBColor , 0, 0 , FontSize ® 18

Copiamos y pegamos la expresión Ø a "MiCelda" en los lugares que antes correspondían a VP, VQ y VPoQ. El resultado de esta operación se muestra a continuación :



9. Creamos el botón **Procesar** por medio del siguiente programa, el cual utiliza la información obtenida en el Paso 7 :

```
Button[Procesar,ButtonFunction:>
Module[{reg0,reg1,actual,lect,P,Q,VP,VQ,VPoQ,nuevo1,nuevo2,nu
evo3},
{reg0[xxx_]:=(xxx/.{1->True,0->False})/.{True->1,False->0};
 actual=ButtonNotebook[];
 NotebookFind[actual,"MiCelda",All,CellTags];
 SelectionMove[actual,All,Cell];
 lect=NotebookRead[actual];
 P=lect[[1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]];
 Q=lect[[1,1,1,2,1,1,1,1,1,2,1,1,1,1]];
 VP=ToBoxes[reg0[ToExpression[P]]];
 VQ=ToBoxes[reg0[ToExpression[Q]]];
```

```
VPoQ=ToBoxes[reg0[Or[ToExpression[P],ToExpression[Q]]]];
nuevo1=ReplacePart[lect,VP,{1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,3}];
 nuevo2=ReplacePart[nuevo1,VQ,
{1,1,1,2,1,1,1,1,1,2,1,1,1,3}];
 nuevo3=ReplacePart[nuevo2,VPoQ,{1,1,1,2,1,1,1,3}];
 NotebookFind[actual,"MiCelda",All,CellTags];
 SelectionMove[actual,All,Cell]};
 NotebookWrite[actual,nuevo3]],
 Active->True,ButtonEvaluator->Automatic,
 Background->RGBColor[0.996109, 0.613291, 0.613291]]
```

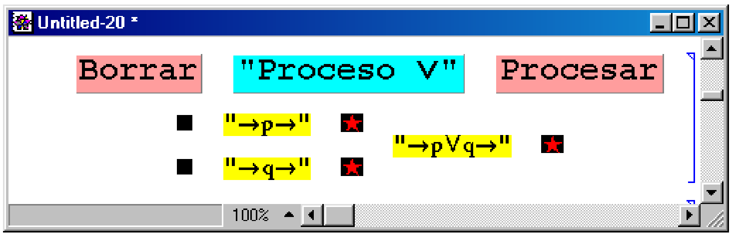
10. Ahora construimos el botón **Borrar** :

```
Button[Borrar,ButtonFunction:>
Module[{estrella,actual,lect,nue1,nue2,nue3,nue4,nue5},
{estrella=StyleBox["\[FivePointedStar]",
FontFamily->"Garamond",
FontSize->20,FontWeight->"Bold",
FontColor->RGBColor[1,0,0],
Background->GrayLevel[0]];
actual=ButtonNotebook[];
NotebookFind[actual,"MiCelda",All,CellTags];
SelectionMove[actual,All,Cell];
lect=NotebookRead[actual];
nue1=ReplacePart[lect,\[SelectionPlaceholder],
{1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1}];
nue2=ReplacePart[nue1,\[SelectionPlaceholder],
{1,1,1,2,1,1,1,1,1,2,1,1,1,1}];
nue3=ReplacePart[nue2,estrella,
{1,1,1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,3}];
nue4=ReplacePart[nue3,estrella,
{1,1,1,2,1,1,1,1,1,2,1,1,1,3}];
nue5=ReplacePart[nue4,estrella,{1,1,1,2,1,1,1,3}];
NotebookFind[actual,"MiCelda",All,CellTags];
SelectionMove[actual,All,Cell]};
NotebookWrite[actual,nue5]],Active->True,
ButtonEvaluator->Automatic,
Background->RGBColor[0.996109, 0.613291, 0.613291]]
```

11. Una vez construidos los botones activos, le damos el título a nuestra construcción por medio de la instrucción

```
Button["Proceso", Background-> RGBColor[0, 1, 1]]
```

Esta instrucción nos proporciona  . Finalmente, al copiar y pegar a "MiCelda" los botones que se construyeron en los pasos 9,10 y 11, obtenemos lo siguiente :



12. Para eliminar las comillas que aparecen, seleccionamos "MiCelda" y le aplicamos "Alt+7" para convertirla en una celda de texto.

Los demás procesos se construyen de manera similar. En cuanto al programa que evalúa, simplifica y resuelve ecuaciones lógicas, no se mencionará lo relativo a su programación, por tratarse de un tema demasiado extenso del que se puede hablar en un próximo informe.
Cualquier información al respecto se puede consultar en la siguiente dirección : matesta@cumanday.ucaldas.edu.co.

5. CONCLUSIONES

El sistema de la lógica matemática puede ser enfocado desde el punto de vista de la Teoría General de Sistemas, que a criterio personal presenta cierta facilidad para trabajar los conceptos, y en especial lo que tiene que ver con las premisas y las conclusiones.
Esta teoría también puede ser extendida, de forma análoga, al Sistema de Los Conjuntos y a otros tópicos de las matemáticas como cálculo de predicados.
Puede decirse que el programa Mathematica 4.1 es una herramienta poderosa para tratar temas de lógica, en lo relativo a evaluación y simplificación de procesos lógicos y a la solución de ciertas ecuaciones lógicas. Una prueba de ello son los programas que se han presentado usando el lenguaje de programación que nos brinda este software matemático.

BIBLIOGRAFIA

1. **Johansen**, *Introducción a la Teoría General de Sistemas*. 1994.
2. **Lipschustz,** *Teoria de Conjuntos y Temas Afines*.
3. **Palomá P**. **Leonel L.** *Sistemas, Matemáticas y Computación*. Memorias XVII Reunión Nacional de Facultades de Ingeniería.
4. **Salas Alvaro, Aristizábal William,** *Algoritmo de Quine -McCluskey en la plataforma Mathematica*. Memorias, XVII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, 2 al 4 de noviembre de 2000. Universidad Pedagógica Nacional, Santafé de Bogotá,Colombia.
5. **Wolfram Stephen,** *The Mathematica Book*, Fourth Edition, Cambridge, University Press.

La Robótica pedagógica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Ana Lourdes Acuña
Fundación Omar Dengo, Costa Rica

La presencia de las Nuevas Tecnologías en el aula busca proveer ambientes de aprendizaje interdisciplinarios donde los estudiantes adquieran habilidades para estructurar investigaciones y resolver problemas concretos, forjar personas con capacidad para desarrollar nuevas habilidades, nuevos conceptos y dar respuesta eficiente a los entornos cambiantes del mundo actual debe ser el reto de cualquier proceso educativo.

Haciendo un recorrido por las escuelas costarricenses y sus estrategias pedagógicas para introducir a los estudiantes en el conocimiento de las ciencias y las matemáticas, pareciera que se ha apostado más por la introducción de conceptos abstractos, con escasa utilidad práctica, y con muchas dificultades para encontrar nexos con las situaciones cotidianas, siendo evidente la falta de conexión propiciada entre los estudios científicos y los problemas reales del mundo. Es aquí donde el Proyecto de Robótica de la Fundación Omar Dengo (PIE MEP-FOD) se presenta en la escuela, con una propuesta de ambiente de aprendizaje innovador donde los niños y las niñas ocupan la mayor parte del tiempo simulando fenómenos, hechos o mecanismos, que son representaciones micro de la realidad tecnológica circundante.

Muchas de las habilidades y destrezas que se buscan generar en los estudiantes a través de la matemática como disciplina, y que se le atribuían en exclusividad, hoy son trabajadas por los niños y las niñas con el apoyo de diferentes plataformas tecnológicas y particularmente con la robótica. Las mediciones, estimaciones, clasificaciones, relaciones espaciales, seguimiento de secuencias, registro de datos, creaciones de gráficos y –como no-, la solución de problemas, son parte de la cotidianidad de quienes participan en las salas de exploración de robótica.

Enseñanza de la matemática en el ITCR: patrones de interacción en el aula

M.B.A. Luis Gerardo Meza Cascante
Lic. Fabio Hernández Díaz
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Resumen

Se presenta un resumen del informe de investigación del proyecto "Enseñanza de la matemática en el ITCR: patrones de interacción en el aula", desarrollado en la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica e inscrito en la Vicerrectoría de Investigación y Extensión bajo el código 5402-1440-0401.

I. El problema y su importancia

En la literatura encontramos escasas referencias a varios aspectos del proceso de enseñanza aprendizaje apoyado por computadora que estimamos fundamentales: ¿cómo se modifican los procesos de interacción en el aula cuando el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática se apoya con computadoras?, ¿de qué manera el papel del educador tiende a modificarse?, ¿cómo cambian los procedimientos y los hábitos de comunicación?, ¿qué efectos produce este tipo de tecnología en el papel que el profesor creé que le toca asumir?, ¿cómo se modifica su autopercepción en cuanto a su papel en el proceso educativo?, ¿cómo incide en el papel que el estudiante considera que le toca jugar en el proceso de aprendizaje?, etc.

Partiendo de la premisa de que el empleo de la computadora en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática afecta de maneras diversas la forma de enseñar y de aprender matemática, generando interacciones en el aula distintas y variadas en comparación con los cursos tradicionales. Compartimos con Maldonado (1991) que todo proceso de innovación tecnológica es típicamente un fenómeno cultural. Por tanto, consideramos como este investigador que el contexto en el cual se introducen las nuevas tecnologías constituye un parámetro importante que condiciona los resultados.

El presente problema es importante porque pensamos, como Papagiannis (1983), que se debe desarrollar investigación acerca del impacto de este tipo de tecnología sobre los profesores y cómo ella afecta su trabajo. Más, aun, creemos que se debe evaluar si la imagen que los profesores tienen de su propio papel cambia como consecuencia de introducir las computadoras en el aula.

La atención del problema también es importante por razones internas y externas al Instituto Tecnológico de Costa Rica. Por una parte, porque los procesos de innovación tecnológica requieren de cantidades de recursos que es necesario justificar apropiadamente. Los resultados de esta investigación muestran los procesos que se realizan con apoyo de computadoras cuando se enseña y aprende matemática con ellas, mismos que pueden fundamentar decisiones futuras. Por otra parte, los resultados pueden constituirse en un insumo académico importante en la carrera "Enseñanza de la matemática asistida por computadora" que imparte la Escuela de Matemática y en la cual se forma a educadores en el campo de la matemática para la educación secundaria.

En el ámbito externo los resultados también son importantes porque tienen valor para realimentar procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática que se desarrollan en diferentes instituciones nacionales. Finalmente, este proyecto muestra la importancia de desarrollar estudios cualitativos que favorezcan la comprensión de los procesos culturales subyacentes a la introducción de la informática en las aulas escolares, situación importante en momentos en los que Costa Rica realiza esfuerzos ingentes para extender la informática educativa a los diversos niveles del sistema educativo.

II. Objetivos de la investigación

II.1. Objetivo general

Indagar cómo se modifican los procesos de interacción en el aula, entre profesor-estudiantes y entre estudiantes-estudiantes, cuando el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática se apoya con computadoras.

II. 2. Objetivos específicos

Obtener información acerca de:

1. qué manera el papel del educador tiende a modificarse en el desarrollo de procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática asistidos por computadora.
2. cómo cambian los procedimientos y los hábitos de comunicación entre el docente y los estudiantes o entre los estudiantes, en procesos de enseñanza aprendizaje asistidos por computadora.
3. qué efectos produce este tipo de tecnología en el papel que el profesor cree que le toca asumir al desarrollar procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática.

III. Delimitaciones y limitaciones

En esta investigación nos interesó analizar los procesos de interacción de los participantes (docentes y estudiantes) en aulas donde se realizaron procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática, en educación superior, con apoyo de computadoras y software. Partimos de la hipótesis de que el empleo de computadoras y software para apoyar los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática modifica los patrones de interacción entre el docente y sus alumnos, y entre los mismos alumnos.

La investigación pretendió estudiar las dimensiones culturales en aulas universitarias en las que se desarrollaron procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática apoyados con computadoras y software, tratando de determinar la incidencia en este fenómeno de la formación previa de los docentes y el efecto catalizador de innovación pedagógica atribuido a la informática.

La investigación abarcó la enseñanza de la matemática en el curso *MA 0101 Matemática General* impartido en la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Este curso forma parte de los planes de estudio de la mayoría de las carreras de ingeniería que se imparten en esta universidad.

La investigación se desarrolló en dos grupos: un grupo durante el segundo semestre del 2000 y uno en el primer semestre del 2001. Cada uno de los grupos estuvo conformado por estudiantes pertenecientes a varias carreras, quienes se matricularon libremente en cada ocasión. En consecuencia, los sujetos de la investigación fueron de las carreras de ingeniería del ITCR y un profesor de la Escuela de Matemática de la misma institución.

En cada uno de los semestres se trabajó en grupos con las siguientes características: ambos grupos estuvieron a cargo del profesor Lic. Fabio Hernández quien actuó como docente. En cada ocasión se desarrollaron las actividades didácticas combinando actividades ordinarias en el aula tradicional con lecciones asistidas por computadora en un laboratorio informático, bajo la modalidad de que unas lecciones se impartían en el aula tradicional y otras en el laboratorio.

Los grupos seleccionados estuvieron constituidos por estudiantes que no habían tenido experiencia previa con enseñanza asistida por computadora, hecho que no se constituyó en una limitación de importancia.

Es importante reportar que los grupos participantes en el proyecto no utilizaron los mismos instrumentos de evaluación que el resto de la cátedra del curso, ni se coordinó con ellos en ningún aspecto, aunque los objetivos y los contenidos del curso si fueron los mismos.

Por otra parte, es relevante indicar que la institución no cuenta con las condiciones adecuadas para la impartición de cursos asistidos por computadora mediante un modelo como el desarrollado en este proyecto. El aula F-04 tiene capacidad para aproximadamente 20 estudiantes y el laboratorio de la Escuela de Matemática no está diseñado para la impartición de lecciones, además su capacidad es de aproximadamente 25 estudiantes. Tanto durante el II semestre del 2000 como en el I semestre del 2001 hubo que conseguir sillas adicionales para ubicar a los 30 estudiantes del curso.

IV. Metodología de la investigación

La investigación desarrollada es una investigación educativa de tipo cualitativo. Este tipo de investigación, de acuerdo con Taylor y Bogdan (1986), produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas y las conductas observables.

De acuerdo con Cook y Reichardt (1995) este tipo de investigaciones no pretende la generalización de resultados, sino el estudio en profundidad de casos particulares. Para Barrantes (1999) la investigación de tipo cualitativo postula una concepción fenomenológica, inductiva y orientada al proceso. Convenimos con este autor en que la investigación cualitativa pone énfasis en la profundidad y sus análisis no necesariamente son traducidos a términos estadísticos.

La recolección de los datos se realizó principalmente por la técnica denominada **observación participante**: *la investigación que involucra la interacción social entre el investigador y los informantes en el ambiente de los últimos, y dentro de la cual se recogen datos de modo sistemático y no intrusivo*[1]. También se recurrió a las "entrevistas a profundidad" y al análisis de algunos de los documentos generados por los participantes.

De manera concordante con lo expuesto por Taylor y Bogdan (1986), las hipótesis y los procedimientos de los investigadores no estaban determinados a priori sino que el objetivo general propuesto inicialmente, así como los objetivos específicos, fueron considerados como de "entrada al campo" (según la denominación usual en investigación cualitativa) de investigación. El diseño de la investigación permaneció flexible, tanto antes como durante el proceso real: *aunque los observadores*

[1] De acuerdo con Taylor y Bogdan. (1986)

participantes tienen una metodología y tal vez algunos intereses investigativos generales, los rasgos específicos de su enfoque evolucionan a medida que operan[2].

Por tanto, de acuerdo con lo expuesto por estos autores, la investigación desarrollada se caracteriza porque:

1. Es inductiva.
2. Se realizó en el propio escenario en el que se desarrollaron los hechos (aula tradicional y laboratorios de computadoras) y nos acercamos a las personas participantes (estudiantes del curso MA0101 Matemática General) con una perspectiva holística: las personas, los escenarios o los grupos no fueron reducidos a variables, sino considerados con una visión de totalidad.
3. Los investigadores tratamos de ser sensibles a los efectos que nosotros mismos causamos en las personas que participaron en el estudio.
4. Procuramos comprender a las personas dentro del marco de referencia de ellas mismas.
5. Partimos de que todas las perspectivas aportadas por los participantes son valiosas.

La investigación también reúne algunas de las características señaladas por Miles y Huberman (1994), citados por Rodríguez y otros (1996). En efecto, esta investigación:

1. Se realizó a través de un prolongado contacto con las personas participantes en la misma y en su propio escenario: trabajamos durante un semestre con cada uno de los grupos participantes.
2. Procuramos alcanzar una visión holística (sistémica, amplia, integrada) del contexto objeto de estudio: su lógica, sus ordenaciones, sus normas explícitas e implícitas.
3. Intentamos capturar los datos sobre las percepciones de los actores desde dentro, a través de un proceso de profunda atención, de comprensión empática y de suspensión o ruptura de las preconcepciones sobre los tópicos objeto de estudio.
4. Son posibles muchas interpretaciones de los datos reunidos, pero algunas son más convincentes por razones teóricas o de consistencia interna.
5. No se utilizaron instrumentos estandarizados, salvo una guía para las entrevistas a profundidad con el grupo del primer semestre del 2001. Por tanto, los investigadores nos convertimos en los principales instrumentos de la investigación.
6. La mayor parte de los análisis se realizan con palabras. Las palabras se unieron, y sub-agruparon con el fin de permitir a los investigadores contrastar, comparar, analizar y obtener conclusiones sobre ellas.

Como parte específica de la metodología para trabajar en los grupos asistidos por computadora se dispuso lo siguiente:

1. Los grupos asistidos por computadora estuvieron a cargo del profesor Lic. Fabio Hernández, tanto en las lecciones en el laboratorio como en las que se desarrollan con la metodología tradicional. Esto fue así tanto en el segundo semestre del 2000 como en el primer semestre del 2001.
2. El profesor Gerardo Meza participó en la planificación de las actividades durante el segundo semestre del 2000 y como observador de las lecciones del laboratorio durante el mismo período. De todas las observaciones realizadas se tomaron notas "crudas" que luego fueron convertidas en bitácoras mediante la inclusión de notas personales y teóricas.
   Durante este período se realizaron sesiones de trabajo los días jueves en la tarde entre los profesores Hernández y Meza para comentar la sesión realizada en la mañana y confrontar las

[2] Idem.

observaciones anotadas por el profesor Meza. De esta manera se buscó mejorar la validez de las observaciones al ser “trianguladas” con la participación del profesor Hernández.

3. La señorita Ivonne Sánchez, estudiante avanzada de la carrera “Enseñanza de la matemática asistida por computadora”, participó como asistente de este proyecto y realizó varias observaciones durante el primer semestre del 2001. Sus observaciones se realizaron en el laboratorio de computadoras y en seis lecciones en el aula tradicional. De cada una de las observaciones se elaboró un informe escrito detallado, mismos que fueron discutidos con el profesor Hernández para “triangular” la información y aumentar la validez.
4. Tanto en el segundo semestre del 2000 como en el primero del 2001 se pidió a las y los estudiantes que entregaran informes escritos de los laboratorios realizados. Durante el primer semestre del 2001 las y los estudiantes, en ocasiones, realizaron parte del trabajo fuera del laboratorio con el fin de que completaran las actividades previstas. En todos estos documentos las y los estudiantes hicieron anotaciones y observaciones, generalmente en respuesta a interrogantes planteadas en las guías de trabajo, que fueron analizadas por los investigadores, con ayuda de la estudiante asistente, con el fin de obtener otra fuente de datos para “triangular” la información.
5. Tanto en el segundo semestre del 2000 como en el primero del 2001 se realizaron “entrevistas a profundidad” a estudiantes. En el primer caso se entrevistó a cuatro estudiantes y en el segundo a ocho. En el primer caso fueron realizadas al final del semestre y estuvieron a cargo de los investigadores. En el segundo caso fueron realizadas a lo largo del semestre y estuvieron a cargo de la asistente. En ambos casos se tomó nota de las respuestas de las y los estudiantes y éstas fueron analizadas por los investigadores en el primer caso, y por el investigador Hernández y la asistente en el segundo.

V. Procedimientos de análisis de la información

La información recopilada fue analizada mediante un proceso continuo a lo largo del periodo de desarrollo de la investigación, tal como suele ser usual en las investigaciones cualitativas.

Con el fin de facilitar este proceso se definieron las siguientes categorías de análisis:

- Patrones de comunicación e interacción en el aula.
- Papel del docente.
- Papel del estudiante.

Para el análisis final de los datos se procedió a identificar y localizar toda la información disponible. Como sucede en las investigaciones cualitativas se tuvo que decidir qué información se iba a considerar finalmente y que parte se iba a desechar. La información estaba registrada en los informes escritos (bitácoras e informes finales generados) la mayoría de los cuales pueden considerarse como “notas cocidas”.

Los investigadores realizamos varias lecturas de la información disponible con el propósito de familiarizarnos lo más posible con los datos. Con este proceso pudimos confirmar lo adecuado de las categorías seleccionadas, mismas que procedimos a confirmar.

Superada esta etapa procedimos a separar los datos según la categoría con la que más relación mantenía, para lo cual se hizo necesario segmentar la información en unidades con significado.
Cuando los datos fueron reducidos a unidades con significado y ubicados en la categoría más pertinente, procedimos a un nuevo análisis con el fin de iniciar la extracción de conclusiones. En esta etapa incorporamos las conclusiones que habíamos adelantado en el informe preliminar, con el propósito de ver si las manteníamos, las complementábamos o finalmente las desechábamos.

VI. Procedimiento para dar validez a la investigación

La validez de esta investigación, al ser de tipo cualitativo, se aseguró recurriendo a la triangulación. De acuerdo con Cea (1998), se entiende por triangulación la aplicación de distintas metodologías en el análisis de una misma realidad social. De acuerdo con Denzin (1975), citado por Cea (1998), existen cuatro tipos básicos de triangulación posibles: triangulación de datos, triangulación de investigadores, triangulación teórica y triangulación metodológica.

La *triangulación de datos* consiste en la utilización de varias y variadas fuentes de información sobre un mismo objeto de conocimiento, con el propósito de contrastar la información recabada.
La *triangulación de investigadores* es el equivalente a lo que se conoce, en la actualidad, por equipos interdisciplinarios. Se trata de la realización de una investigación por un equipo de investigadores, que observan un mismo objeto de estudio desde diferentes puntos de vista.

La *triangulación teórica* implica todas las hipótesis que puedan extraerse de un mismo problema de investigación, con el fin de abarcar el mayor número de perspectivas de análisis posibles.

La *triangulación metodológica* comprende dos modalidades: la triangulación intramétodo y la triangulación entre métodos. La *triangulación intramétodo* se aplica cuando el investigador escoge un único método, pero aplica distintas técnicas de recolección y análisis de datos, o cuando repite el mismo método en situaciones y momentos diferentes. La *triangulación entre métodos* consiste en la combinación de métodos de investigación no similares en la medición de una misma unidad de análisis.
La *triangulación multi-método* consiste en articular, en el mismo estudio, los cuatro tipos de triangulación: de datos, investigadores, teórica y metodológica.

En esta investigación utilizamos una triangulación de datos pues los datos se obtuvieron de dos fuentes: de las y los estudiantes y de algunos de sus productos (informes escritos). También se aplicó una triangulación de investigadores pues participamos dos investigadores y una asistente en la recolección e interpretación de los datos. Finalmente, se aplicó una triangulación intramétodo pues se utilizaron varias técnicas distintas para la recolección de los datos (observación participante, entrevistas a profundidad y análisis documental).

VII. Análisis de la información y discusión de resultados

1. Patrones de comunicación e interacción en el aula

Los diferentes laboratorios que se desarrollaron en la investigación fueron diseñados para presentar una serie de situaciones nuevas y desconocidas a las y los estudiantes. Las respuestas ante estas situaciones, en términos generales, las valoramos como positivas, pues provocaron una serie de procesos de interacción tanto entre las y los estudiantes como entre éstos y el profesor distintos a los observados en el aula tradicional.

En efecto, de acuerdo con los registros de las observaciones tenemos que en el laboratorio de computadoras se presentaron patrones de interacción y de comunicación entre las y los estudiantes caracterizados por:

- La comunicación frecuente entre las y los estudiantes que integraban cada sub-grupo y entre las y los integrantes de los diferentes sub-grupos. La proximidad física no pareció constituirse en un factor importante para facilitar o no la comunicación entre los sub-grupos, pues la comunicación se dio entre integrantes de todos los sub-grupos.

- La identificación y aplicación conjunta de estrategias (entre las y los integrantes de cada sub-grupo) para abordar las situaciones didácticas propuestas. Es de resaltar que las estrategias identificadas por los diversos sub-grupos no fueron las mismas en todas las ocasiones. Además, en ocasiones algunos de los sub-grupos compartieron las estrategias mediante sugerencias o mediante el planteo expreso de consultas a sus compañeras y compañeros.
- Se observó también que en la mayoría de las ocasiones las y los estudiantes se "apropiaron" de las actividades propuestas y se "concentraron" de manera importante en las mismas. Es de hacer notar que aun cuando el trabajo de los sub-grupos fue en general bastante intenso esto no pareció obstaculizar el contacto y la colaboración con las y los estudiantes de otros sub-grupos.
- El trabajo en sub-grupos produjo una serie de intercambios entre las personas participantes, no obstante no se presentaron problemas de ruidos que pudieran entorpecer el trabajo de las y los estudiantes, por lo que el clima de trabajo fue apropiado. El ambiente de trabajo se caracterizó por un predominio de las comunicaciones "informales", es decir, porque la comunicación fue fluida sin que mediara ningún tipo de formalidad para pedir la palabra o para asignarla. Quien necesitaba hablar se dirigía directamente a la persona con quien requería contacto y le hablaba, con un tono de voz adecuado, de modo que el ambiente de trabajo permitiera la comunicación sin entorpecer el trabajo de las otras personas. No suele ser esta la situación en las aulas tradicionales.

En lo que respecta a la comunicación entre las y los estudiantes y el profesor se observó que:

- La comunicación fue frecuente pero muy diferente a la que se presenta en el aula tradicional. En efecto, la participación del profesor no se configura a partir de quien controla el proceso sino que asume características que se asemejan a la de un asesor o facilitador. Las y los estudiantes consultaban con el profesor con cierta frecuencia, pero las preguntas planteadas tenían que ver más con el deseo de compartir sus estrategias o de conseguir alguna sugerencia que les permitiera despegar.
- El trabajo del profesor en el laboratorio fue muy demandante, pues permanentemente fue contactado por las y los estudiantes, quienes le plantearon diversas cuestiones. En ocasiones fue para mostrarle los resultados que habían obtenido y en otras para consultarle algún aspecto concreto. Notamos que el profesor tiene que estar dispuesto a mantener contactos frecuentes y que debe mostrar una disposición a "asesorar" sin caer en mostrar los procedimientos que las y los estudiantes deben utilizar para atender sus actividades.

Consideramos sumamente positivo el hecho de trabajar en parejas, pues esto contribuye al desarrollo de habilidades de trabajo cooperativo, lo que constituye una necesidad cada vez mayor que la sociedad demanda de los nuevos profesionales.

A partir de la información recolectada, tanto en las observaciones de los laboratorios como en las entrevistas realizadas, inferimos que los estudiantes valoran de manera positiva el hecho de trabajar en parejas.

En la clase tradicional impartida sin computadoras existe mucho menos interacción entre los participantes de la clase, el profesor asume un papel mucho más protagónico y el estudiante una actitud de mayor pasividad. Es importante, además, mencionar aquí que tanto las observaciones como las entrevistas parecen confirmar esta afirmación, pues los estudiantes explícitamente afirman que prefieren las lecciones en el laboratorio.

2. Papel del docente

En términos generales, puede afirmarse que el papel del docente es fundamental para la buena marcha de procesos de enseñanza y de aprendizaje, tanto en el aula tradicional como en los procesos asistidos por computadora. En este punto compartimos las concepciones vigoskianas sobre la importancia del docente como creador de oportunidades de aprendizaje.

En el caso concreto de este proyecto, fue evidente que el papel del docente en el laboratorio se ve fuertemente modificado, pues la misma naturaleza de las actividades realizadas hace que el estudiante preste una gran atención a los resultados de su propio trabajo en la computadora. De acuerdo con lo observado si el docente pretende captar la atención de la totalidad del grupo cuando trabaja en el laboratorio tendrá serias dificultades, por cuanto las y los estudiantes se concentran fuertemente en su propio trabajo.

Lo anterior significa que el docente debe tener una concepción distinta de su papel en este tipo de lecciones, pues debe asumir una posición de apoyo a las y los estudiantes en su propio proceso de búsqueda y descubrimiento, debe estar preparado para analizar cuestionamientos totalmente inesperados de parte de sus estudiantes, debe comprender las enormes diferencias individuales que se manifiestan en la clase, pues habrá alumnos con bastante habilidad para trabajar con computadoras y otros que no sólo carecen de esa habilidad, sino que incluso, no les gusta trabajar con ellas.
En resumen, el docente debe evolucionar de un papel de transmisor de conocimientos hacia un papel de facilitador en el proceso de construcción del conocimiento por parte de las y los estudiantes.

Otro aspecto que deseamos destacar es que esta modificación en el papel de docente no debe limitarse al laboratorio de computadoras. Por el contrario, debe manifestarse también en el aula tradicional, aunque es claro que aquí tendrá condiciones totalmente diferentes que lo obligarán a modificar sus estrategias de enseñanza. Lo importante, independientemente del lugar en que se ejerza la docencia es concebir su papel como facilitador en el proceso de aprendizaje de sus estudiantes en vez de dueño del conocimiento y transmisor del mismo a un grupo de estudiantes que carecen de dicho conocimiento.

3. Papel del estudiante

Dentro de este proceso de construcción del conocimiento, se requiere por parte de los estudiantes de una gran credibilidad tanto en el proceso mismo como en su profesor. El estudiante debe estar convencido que debe abandonar su papel como receptor pasivo del conocimiento que su profesor le debe transmitir y evolucionar gradualmente hacia procesos más activos en donde él debe desempeñar un papel mucho más protagónico en la construcción de su propio aprendizaje.

La motivación por aprender desempeña en este proceso un papel fundamental. A su vez el rol del profesor en este proceso motivacional es central, pues es a él a quien le corresponde diseñar una serie de estrategias de enseñanza que promuevan entre otros aspectos, el interés, el descubrimiento, el ensayo y error entre sus alumnos.

Después de analizar la información recolectada tanto mediante las observaciones realizadas como de las entrevistas, se puede observar que en general siempre existió una actitud positiva por parte de los estudiantes hacia las actividades desarrolladas en el curso, eso sí, con una clara preferencia hacia las lecciones en el laboratorio de computadoras.

A continuación, se presentan algunos aspectos que confirman la valoración anterior.

- Todos los estudiantes entrevistados manifestaron que al matricular el curso no sabían que era asistido por computadora, pero que de haberlo sabido lo hubieran matriculado, e incluso que recomendarían a cualquier otro estudiante matricular este tipo de cursos.
- Valoran muy positivamente actitudes del profesor como el gusto por la enseñanza, el ser dinámico, ordenado, que manifiesta interés en que ellos aprendan, claro en su forma de explicar.

También plantean como un aspecto importante la buena comunicación y la confianza que se manifiesta en el aula.

- En relación propiamente con el laboratorio, todas las opiniones son positivas, manifiestan aspectos como el agrado de trabajar en parejas, que no sólo es "venir y sentarse", que hay muchas cosas nuevas que nunca han visto, que pueden resolver problemas en equipos, que los gráficos ayudan a comprender mejor la materia, que entienden más de "donde salen las cosas".
- Entre las recomendaciones más importantes que plantean, están el realizar mayor cantidad de laboratorios, de quices, de trabajos en grupo y entregar un manual para el programa Derive.
- En relación con la planta física del laboratorio, si bien consideran que no es del todo adecuada, no lo consideran un problema fundamental, más bien le dan más importancia a los aspectos señalados anteriormente.
- Respecto a las lecciones en el aula tradicional, en general las observaciones y las entrevistas, permiten obtener una valoración positiva, pero claramente los alumnos prefieren las lecciones en el laboratorio.

VIII. Conclusiones

1. De los grupos con metodología tradicional

De acuerdo con las observaciones realizadas y los materiales analizados, los procesos que ordinariamente se desarrollan en el curso Matemática General, se caracterizan por:

- El predominio de las lecciones magistrales, en combinación con el método de las preguntas.
- La presentación de los contenidos es secuencial, con escasa posibilidad de alteración del orden dado por el profesor.
- El trabajo de aula se complementa con prácticas adicionales, cuyo propósito es que las y los estudiantes desarrollen ejercicios similares a los presentados por el profesor.
- El trabajo es individualizado como norma general, con escasas posibilidades de trabajo cooperativo.
- La comunicación entre las y los estudiantes es escasa y en general no se favorece.
- La comunicación profesor-estudiante se desarrolla en un marco de confianza. Las y los estudiantes pueden consultar con libertad y el profesor contesta con interés. No obstante, este proceso se reduce casi exclusivamente al planteo de dudas de las y los estudiantes.
- El profesor provee las situaciones de aprendizaje, y guía el trabajo. Las y los estudiantes asumen una posición relativamente pasiva en su proceso de aprendizaje.
- No se fomenta el trabajo cooperativo. En general el trabajo cooperativo no forma parte de las estrategias didácticas predominantes en el curso.

2. De los grupos asistidos por computadora

En los procesos apoyados con computadoras tenemos que:

1. En ocasiones se presentó un rompimiento de la secuencia de presentación de los contenidos. Aun cuando las guías fueron elaboradas para temas específicos, sucedió que en ocasiones que las y los estudiantes mencionan e incorporan otros temas en sus discusiones y estrategias de solución. Por ejemplo, al trabajar el tema de ecuaciones surgió de manera natural el concepto de gráfica de una función, el tema de inecuaciones y el tema de factorización. Por tanto, una característica de los ambientes enriquecidos con computadoras es el rompimiento de la presentación secuencial de los contenidos.

2. El trabajo cooperativo fue promovido, obteniéndose una respuesta positiva de las y los estudiantes a esta modalidad. La cooperación permitió tanto el compartir las estrategias de solución de las tareas encomendadas como el brindarse apoyo para interpretar estas tareas. También se presentó el trabajo cooperativo en aspectos relacionados con el manejo de los programas computacionales. Es importante señalar que el trabajo cooperativo, que fue promovido por el profesor en sub-grupos, derivó en ocasiones de manera muy natural en un trabajo inter-grupos, hecho que no estaba previsto.
3. Surgieron de manera espontánea las y los estudiantes "tutores" quienes ayudaron a sus compañeros(as) en el desarrollo de las actividades y a procesar la información por aprender. Este hecho coincide con las observaciones de Ramos (1998) y de Elises Simón y del Caño Sánchez.
4. Creemos que los temas explorados previamente en el laboratorio fueron mejor recibidos y comprendidos en las lecciones que se desarrollan con la metodología tradicional. Suponemos, hecho que requiere de mayores elementos comprobatorios, que se debe a que las y los estudiantes desarrollaron referentes en el laboratorio que facilita la comprensión.
5. Las y los estudiantes no mostraron problemas para trabajar con la computadora a pesar de no poseer experiencia previa con los programas utilizados: DERIVE y Geometer's Sketchpad y no haber recibido capacitación específica para ello.
6. Las observaciones y las entrevistas evidencian una actitud positiva hacia las matemáticas y hacia el curso en particular.
7. El papel del profesor fue fundamental en la creación de oportunidades de aprendizaje. En este sentido la investigación confirma los resultados de Sutherland (1987, 1989) y de Noss y Hoyles (1989, 1992) de que la tesis de Papert (1980), consistente en que la existencia de ambientes matemáticos ricos en tecnología eran suficientes para motivar a las y los estudiantes y despertar su curiosidad intelectual, no se sostiene. Este hecho también tiene una importante relación con el papel relevante que otorga la tarea vigoskiana al docente como creador de oportunidades de aprendizaje.
8. De acuerdo con nuestra propia vivencia, consideramos que el papel del profesor al apoyar de manera significativa el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática con tecnología se modifica de manera importante: el o la docente debe convertirse en un proveedor de experiencias educativas, debe procurar experiencias que favorezcan la exploración y el descubrimiento, debe aceptar e incluso promover el abordaje no lineal de los temas permitiendo que las y los estudiantes abarquen el tema en estudio y otros sobre los que ellos se interesen, debe asumir un papel de "socio de aprendizaje" en el entendido que no sabe todas las respuestas y que también puede aprender de las y los estudiantes, debe estimular la curiosidad de las y los estudiantes con preguntas oportunas que los lleven a indagar más y debe estar preparado para lo inesperado.
9. Las y los estudiantes mostraron un vivo interés por trabajar en el laboratorio de computadoras. Este punto de tomar en cuenta en este tipo de experiencias educativas porque investigaciones recientes han demostrado que no todas las y los estudiantes, y en todas las circunstancias, se muestran interesados en trabajar con las computadoras, tal como reporta Badilla (1997).
10. Concordamos en nuestras conclusiones con Ramos (1997) en el sentido de que los materiales utilizados, guías de trabajo en este caso, favorecen la actividad cooperativa y el trabajo independiente.

IX. Recomendaciones

Concluido el proyecto de investigación estimamos pertinente plantear las siguientes recomendaciones:

1. Promover en los diferentes cursos impartidos por la Escuela de Matemática, el empleo de estrategias metodológicas que favorezcan la exploración y el descubrimiento por parte de los estudiantes.

2. Promover la discusión y la reflexión entre los docentes de la escuela, con la intención de modificar nuestro papel dentro del proceso de enseñanza. Se propone pasar de un papel que enfatiza la transmisión del conocimiento hacia otro que promueva la creación de oportunidades de aprendizaje en las y los estudiantes.
3. Fomentar el desarrollo de estrategias metodológicas en los cursos que promuevan una amplia interacción tanto entre los estudiantes como entre éstos y el profesor. En particular, se considera fundamental el desarrollo de estrategias de trabajo cooperativo, tanto dentro de las aulas como fuera de ellas.
4. Propiciar la continuación de investigaciones educativas que exploren las posibilidades de la incorporación de la tecnología como un recurso que facilite la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.
5. Promover la impartición de más cursos asistidos por computadora. Para esto es indispensable explorar las posibilidades reales con que cuenta la institución para el desarrollo de este tipo de cursos.
6. Fomentar la participación de estudiantes avanzados de la carrera "Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora", en calidad de asistentes o colaboradores de proyectos de investigación que se realicen en esta escuela.

Bibliografía

ALEMAN, A. (1997). "La enseñanza de la matemática asistida por computadora". INTERNET. http://www.utp.ac.pa/articulos/ensenarmatematica.html.

AGUIRRE, M. y ZUBIETA, G. (1999). "Algunas consideraciones para elaborar actividades apropiadas al aprendizaje de la geometría, con el software Cabri-géometre". En: Libro de Memorias del VII SIMPOSIO INTERNACIONAL EN EDUCACION MATEMATICA ELFRIEDE WENZELBURGER.

ARECEO, E. (1999). "¿Problemas de geometría o problemas con la geometría?. En: Revista Las Matemáticas y su Enseñanza. Vol. 11. No. 1.

ARGANBRIGHT, D. (1993) *Innovations Education Throug Spreadsheets.* En: Proceedings of the IFIP Open Conference: Informatics an d Changes in Learning. Gmunden, Austria.

BADILLA, C. (1998). "Reflexiones sobre la utilización de la informática educativa asociada a una corriente pedagógica: resultados de una experiencia". En: Libro de Memorias del I Congreso Internacional de Informática Educativa para Secundaria.

BARRANTES, R. (1999). "Investigación. Un camino al conocimiento. Un enfoque cuantitativo y cualitativo". EUNED. San José.

BARRETT, G. (1989) *A Computer-Enriched Precalculus Course*. En: The International Conference on Thecnology and Education. Orlando, Florida.

BURNSIDE, R; MACDIVITT, A; PITCHER, N; WEST, E. (1988) *Mathematics Teaching for the Next Millenium.* En: The International Conference on Thecnology and Education. Edinburgh.

CALDERÓN, E. (1990) "Los computadores en la educación, desarrollo científico y tecnológico prioritario para el futuro de Iberoamérica." En: Informática Educativa. V.3. No. 2. Colombia.

CEDILLO, T. (1999). "Las tecnologías de la información y comunicación: una alternativa para cerrar la brecha entre la investigación y la enseñanza". En: Libro de Memorias del VII SIMPOSIO INTERNACIONAL EN EDUCACION MATEMATICA ELFRIEDE WENZELBURGER.

CONTRERAS, J. y MARTINEZ, A. (1999). "El uso del software dinámico como herramienta para conjeturar, plantear y resolver problemas en la clase de geometría". En: Libro de Memorias del VII SIMPOSIO INTERNACIONAL EN EDUCACION MATEMATICA ELFRIEDE WENZELBURGER.

CRESPO, S. (1997). "Algunas consideraciones sobre el uso de tecnología para enseñar y aprender matemática". INTERNET. http://boletin_5_1_97.htm.

DE FARÍA, E. (1998). "Calculadoras gráficas, geometría y el constructivismo". En: Revista Innovaciones Educativas. Año V. No. 9.

DE FARÍA, E. (1999). "Descubriendo teoremas con geometría dinámica". En: Libro de Memorias del VII SIMPOSIO INTERNACIONAL EN EDUCACION MATEMATICA ELFRIEDE WENZELBURGER.

DENIS, L. y GUTIERREZ, L. (1996). "La investigación etnográfica". En: Revista Virtual Paradigma. Vol. 14 al 17.

DOBLES, C., ZÚÑIGA, M. Y GARCÍA, J. (1998). "Investigacióm en educación: procesos, interacciones y construcciones". EUNED. San José.

ELIA, M; GALIZIA, M; MARCONI, C; MASCARELLO, M. (1993) *An information Thery View of the Mathematics Teaching/Learning*. En: Proceedings of the IFIP Open Conference: Informatics and Changes in Learning. Gmunden, Austria.

FERNANDEZ, B; VAQUERO, A; FERNANDEZ-MAYOR, A, HERNANDEZ, LUIS. (1997) *Informática educativa: revisión y análisis de los problemas de la utilización de las computadoras en la enseñanza.* En: Informática y Automática. Vol. 30. Num. 3. Madrid, España.

FERNANDEZ, R. (1998). "Influencia y utilización didáctica de los medios audiovisuales en el aula: análisis de su incidencia en la motivación y en el aprendizaje de los alumnos". INTERNET.

FRITZLER, W. (1997). "Triángulos y cuadriláteros inscritos en un círculo. Una aplicación del software educativo Cabri Géometre". En: Revista Educación Matemática. Vol. 9. No. 2.

FUNKHOUSER, CH; DENNIS, R. (1992) *The Effects of Problem-Solving Software on Problem-Solving Ability.* En: Journal of Research on Computing in Education.

HITT, F. (1998). “Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum”. En: Revista Educación Matemática. Vol. 10. No. 2.

GOMEZ, P. (1996). “Tecnología y educación matemática”. En: Revista Informática Educativa. Vol. 10. No. 1.

GOMEZ, P. y CARULLA, C. (1998). “De lo simbólico a lo gráfico. Efectos de la tecnología en la educación matemática”. INTERNET. http://ued.uniandes.edu.co/servidor/recinf/docnop/de_lo_sim_a_lo_graf.html

HERNÁNDEZ, R; FERNÁNDEZ, C ;BAPTISTA, P. (1991) *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill. México.

GALVIS, A. (1988) *Ambientes de enseñanza-aprendizaje enriquecidos con computador* . En: Informática Educativa. Vol. 1. No. 2. Bogotá, Colombia.

GALVIS, A. (1991) *Reflexión acerca del uso del computador en educación primaria y secundaria.* En: Informática Educativa. Vol. 4. No. 1. Bogotá, Colombia.

GALVIS, A. (1991) “Reflexión acerca del uso del computador en educación primaria y secundaria.” Informática Educativa. V. 4. No. 1. Colombia.

GALVIS, A. (1992) “Planeación estratégica de informática educativa”. En: Informática Educativa. V.5. No. 2. Colombia.

GALVIS, A. (1993) “Evaluación de materiales y ambientes educativos computarizados”. En: Informática Educativa. V. 6. No. 1. Colombia.

HENAO, O. (1996). “Las hojas de cálculo como herramienta didáctica”. En: Informática Educativa. V. 9. No. 2. Colombia.

JACKIW, N. (1998). “El Geómetra: la geometría dinámica para el siglo XXI’. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

JACKIW, N y FINZER, W. (1998). “Dynamic manipulation of mathematical objects”. INTERNET. http://www.keypress.com/sketchpad/talks/s2k/index.htm

MCGEHEE, J. (1998). “Interactive Thecnology and Classic Geometry Problems”. En: Revista Mathematics Teacher. Vol. 91. No. 3.

MEZA, G. (1991). “Eureka: The Solver. Conceptos fundamentales”. Publicaciones del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Cartago.

MEZA, G. (1992) “Eureka: The Solver. Un recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas superiores”. Comunicación. V.15. Cartago.

MEZA, G. (1994) “Cómo usar MathCad”. Editorial Tecnológica de Costa Rica. Cartago.

MEZA, GARITA Y VILLALOBOS. (1997). “Planeamiento de procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática asistidos con software matemático”. En Memorias del V ECADIM.

MEZA, G. (1997). “Computadoras en el proceso de enseñanza- y aprendizaje de la matemática: una taxonomía.”. En Memorias del V ECADIM.

MEZA, G. (1998) “Enseñanza de la matemática asistida por computadora: mitos, retos, amenazas y oportunidades”. En Memoria del Primer Congreso Internacional de Informática Educativa.

MEZA, G. (1998) “Programación de sesiones interactivas en Geometer’s Sketchpad”. En Memoria del Primer Congreso Internacional de Informática Educativa.

MEZA, G. (1998) “Experiencias educativas con Geometer’s Sketchpad”. En Memoria del “Primer Festival de Matemática”.

MEZA, G. (1998) “Estrategias didácticas para desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática asistida por computadora”. Por aparecer en la Revista “Comunicación”.

MEZA, G. (1999) “Enseñanza del cálculo diferencial e integral con apoyo del programa Geometer’s Sketchpad”. En: Revista “Comunicación”. Vol. 11. No. 1. Año 20. Cartago, Costa Rica.

MEZA, G. (1999) “Enseñanza y aprendizaje de funciones con apoyo de Geometer’s Sketchpad” En libro de memorias del *“Primer Congreso Internacional de Enseñanza de la matemática asistida por computadora”*. Cartago, Costa Rica.

MEZA, G. (1999) “Enseñanza de la geometría en sétimo año con el programa Geometer’s Sketchpad” En libro de memorias del *“Primer Congreso Internacional de Enseñanza de la matemática asistida por computadora”*. Cartago, Costa Rica.

MEZA, G. (1999) “Problemas de máximos y mínimos en la educación secundaria con Geometer’s Sketchpad.” En libro de memorias del *“Primer Congreso Internacional de Enseñanza de la matemática asistida por computadora”*. Cartago, Costa Rica.

MEZA, G. (1999) “Enseñanza y aprendizaje de funciones con apoyo de Geometer’s Sketchpad” En libro de memorias del *“Primer Congreso Internacional de Enseñanza de la matemática asistida por computadora”*. Cartago, Costa Rica.

MEZA, G. (1999) “Enseñanza de la geometría en sétimo año con... Geometer’s Sketchpad. Manual de la profesora o del profesor”. Taller de Publicaciones del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

MEZA, G. (1999) “Enseñanza de la geometría en sétimo año con... Geometer’s Sketchpad. Cuaderno de trabajo de la estudiante o del estudiante”. Taller de Publicaciones del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

MEZA, G. (2000) “Simulaciones en computadora con fines didácticos programadas en Geometer’s Sketchpad”. En libro de memorias del “*Segundo Festival de Matemática*”. Heredia, Costa Rica.

RAMIREZ, M. y GUZMAN, J. (1997). “El uso de la calculadora graficadora y la resolución de problemas algebraico-verbales, en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas”. En: Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

RAMOS, N. (1997). “Las interacciones sociales en el aula: su impacto en el aprendizaje de la matemática”. En: Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

RASMUSSEN, S., ERICKSON, T. y SHAFF, K. (1998). “Problemáticas de tecnología en la formación de educadores”. Presentado en el Taller “Enseñanza de la matemática asistida por computadora”. Organizado por la Escuela de Matemática del ITCR y la Fundación CIENTEC.

RODINO, A. (1998). “Las nuevas tecnologías informáticas en la educación: viejos y nuevos desafíos para la reflexión pedagógica”. En: Revista Innovaciones Educativas. Año V. No. 9.

RODRÍGUEZ, G., GIL, J. Y GARCÍA, E. (1996). “Metodología de la investigación cualitativa”. Ediciones ALJIBE. Málaga.

ROJAS, T. (1991) “Creatividad y programación.” Informática Educativa. V.4. No. 1.

RUIZ, E. (1999). “Enseñanza de matemáticas asistidas por tecnologías de la información y la comunicación: lineamientos para el docente”. En: Libro de Memorias del VII SIMPOSIO INTERNACIONAL EN EDUCACION MATEMATICA ELFRIEDE WENZELBURGER.

SALAS, C y RODRÍGUEZ, R. (1985) “Utilización de microcomputadoras en la enseñanza”. Praxis. Heredia.

SANCHO, L.(1997) “La computadora: recurso para aprender y enseñar”. EUNED. San José, Costa Rica.

SIÑERIZ, L. y SANTINELLI, R. (1998). “Estrategias espontáneas con uso de CABRI”. En: Revista Educación Matemática. Vol. 10. No. 3.

SCOTT, P. (1990) “La computadora y la enseñanza de la matemática”. Educación Matemática. V.2. No. 1. México.

SCOTT, P. (1997). “Situaciones problemáticas: ¿Parte de una posible respuesta al desafío de los resultados del TIMMS?. INTERNET. http://www.boletin5_1_97.htm.

STEKETEE, S. (2000). “Hands-on with handheld Sketchpad for the Cassiopeia”. INTERNET. http://www.keypress.com/sketchpad/sketchtalks/html.

TAYLOR, S. y BOGDAN, R. (1986). “Introducción a los métodos cualitativos de investigación”. Paidós. Buenos Aires.

TRUJILLO, C. (1992) “Informática para apoyar el mejoramiento de la educación.” Informática Educativa. V.5. No. 1. Colombia.

Lección de Juegos, una estrategia metodológica

Esteban Ballestero Alfaro[•], Mercedes Peraza Delgado[•]

Es común escuchar en nuestros días que las nuevas corrientes teórico-pedagógicas hacen referencia a los distintos estilos de aprendizaje de cada ser humano de acuerdo a sus diferencias individuales, gustos y comodidades.

Lo anterior se afirma al escuchar testimonios de diferentes personas que aseguran que escuchando música moderna o rock pesado generan un ambiente de aprendizaje propicio para satisfacer sus necesidades, mientras que otros prefieren la música instrumental para dicho fin. Otras personas se inclinan por estudiar en un sitio solitario, estrategia que resultaría incómoda para los individuos que prefieren el trabajo cooperativo o grupal, en donde predomine un ambiente ruidoso.

Por éstas y otras razones es que muchos expertos coinciden en que un buen curso lectivo debe propiciar a los y las estudiantes durante el proceso una gama variada de metodologías de enseñanza. Esta variación metodológica garantizará suplir las necesidades de los diferentes tipos de aprendizaje que posee el estudiantado.

Dentro de las diversas opciones metodológicas, el o la docente puede recurrir a estrategias, como lecciones de juego, sesiones de laboratorio, método expositivo utilizando las ayudas audiovisuales que sean necesarias., método de los cuatro pasos o lección asistida por computadora.

En éste artículo se quiere enfatizar en el método de juegos, pues una lección desarrollada a partir de dicho método genera un proceso de enseñanza-aprendizaje más agradable, tanto para el alumno como para el profesor. A continuación señalaremos algunas de sus ventajas:

1. Un juego, por lo general, propicia la competencia individual o de grupos, así como deseos de superación.
2. El estudiante aprende en un ambiente agradable que le genera simpatía hacia el estudio, en general, afecta el aspecto motivacional del alumno positivamente.

[•] Estudiantes de la Escuela de Matemática. Instituto Tecnológico de Costa Rica

3. La participación del o la estudiante es vital para el desarrollo de la lección, lo que le da la satisfacción de sentirse necesario o necesaria.

Es importante hacerles ver a los y las estudiantes que el objetivo primordial del juego es que ellos generen su propio aprendizaje, y que el juego es sólo una herramienta más para lograr este objetivo.

Sin embargo, una lección de juegos demanda tiempo de preparación del material didáctico a utilizar, por parte del profesor o la profesora. Además puede ocasionar problemas de disciplina lejos del control del profesor.

Cuando un o una docente considera los aspectos negativos mencionados en el párrafo anterior para decidir si utilizar o no un juego en la lección, principalmente se ve influenciado por la inseguridad que le provoca el innovar su práctica pedagógica, actitud que debemos eliminar, ya que en este mundo que evoluciona aceleradamente, los y las docentes no podemos quedarnos atrás en lo que respecta a materia educativa, es decir, debemos aplicar el principio de la educación continua, en donde es primordial una constante renovación e integración de las estrategias metodológicas que mejor se ajusten a las necesidades de los y las estudiantes de acuerdo al entorno por el que estén rodeados.

La motivación grupal es un aspecto esencial para el buen aprendizaje y práctica docente. Una motivación en su clímax garantiza un acercamiento y aceptación del profesor o la profesora hacia el grupo, y desarrolla un interés por aprender en el alumno repercutiendo positivamente en otros aspectos secundarios como la disciplina, la puntualidad, la asistencia y el trabajo cooperativo.

Unas lecciones de juego aplicadas dentro de la metodología de la enseñanza pueden contribuir enormemente en el aspecto motivacional de un grupo, debido a que el alumno es consciente del trabajo de preparación que un juego involucra al ser exclusivamente preparado para ellos pues aprecian la preocupación del profesor. Esta motivación nos beneficia en las lecciones magistrales ya que el grupo se encuentra a la espera del nuevo juego que el o la docente les ofrecerá.

La lección de juegos puede resultar en algunos casos esa máscara o disfraz alegre que le permitirá al educador o educadora enseñar un tema cuyos contenidos resulten tediosos y poco interesantes para el estudiantado.

Para finalizar, sólo queremos recalcar que el juego es una estrategia más de la enseñanza, no es la solución absoluta a los problemas que este proceso arrastra, pero que puede minimizarlos. El juego resultará ventajoso para enseñar o reforzar algunos temas pero no es la metodología óptima para otros y aquí es donde cumple un papel importante la capacidad de discernimiento del o la docente, pero debemos recordar que la variedad de metodologías en el proceso de enseñanza representa la mejor clase.

Seguidamente le presentamos una lista de juegos que usted puede utilizar en sus lecciones. Es importante recalcar que estos juegos han sido ideados y utilizados por los estudiantes del curso de práctica docente de la carrera de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora del Instituto Tecnológico de Costa Rica, con sus respectivos grupos de secundaria en los niveles de sétimo y octavo año, tanto en colegios públicos como privados, y en todos los casos los resultados han sido satisfactorios.

Objetivos :

- Reforzar el aprendizaje logrado por los y las estudiantes sobre los contenidos desarrollados durante las lecciones.
- Desarrollar aprendizaje en los y las estudiantes ante la introducción de un nuevo tema.
- Propiciar una nueva alternativa pedagógica que permita al docente variar su estrategia metodológica.
- Motivar a el o la estudiante por el aprendizaje de la matemática, así como fortalecer las relaciones interpersonales entre los estudiantes y éstos con el o la docente.
- Fortalecer el trabajo cooperativo e individual de los y las estudiantes.

Juego # 1

Título: "En busca del tesoro".

Metodología: Trabajo en grupos.

Temas recomendados:

Este juego puede ser adaptado para cualquier tema de matemática ya sea en primaria o secundaria

Descripción:

La idea principal del juego es llegar al tesoro, pero previamente el jugador o la jugadora debe enfrentarse a una serie de obstáculos que debe vencer.
El juego consta de un dado, un diagrama como el que se muestra en la figura, preguntas previamente planificadas por el o la docente y fichas adheribles al diagrama.

Materiales:
Para el dado: Cartulina gruesa (cartón, madera). Éste puede ser comprado previamente.
Para el diagrama: Cartulina (cartón, papel periódico, estereofón)
Instrucciones:

- Se le entregará una ficha a cada grupo, luego éstos elegirán un nombre que los represente (éste puede ser libre u orientado por el o la docente a elementos de un tema específico, por ejemplo, nombres de matemáticos).
- Un representante de cada grupo tirará el dado e iniciará el juego el grupo que obtenga mayor puntaje.
- Un representante de cada grupo tirará el dado y avanzará con su ficha respectiva en las casillas del diagrama de acuerdo con el puntaje obtenido en el dado.
- Si el grupo cae en una casilla en blanco la ficha se estacionará en esa posición hasta el siguiente turno. Si la casilla tiene un signo de pregunta, el grupo deberá contestar una de las preguntas previamente formuladas por el o la docente, y si la respuesta es errónea el grupo deberá retroceder la ficha a la posición anterior.
- Por otra parte, si la casilla contiene una instrucción esta debe ser ejecutada (por ejemplo avanzar, retroceder o moverse según lo indique la flecha).
- El grupo ganador será el que llegue primero al tesoro.

Juego # 2

Título: “Dominó”.
Metodología: Trabajo en grupos.
Temas recomendados:
Este juego puede ser adaptado para cualquier tema de matemática ya sea en primaria o secundaria

Descripción:

Nota: En este caso se hará una adaptación para el tema de ecuaciones.

Este juego consiste en x número de piezas rectangulares, donde cada una de ellas tiene impreso a un extremo una ecuación, y al otro la solución de otra ecuación

Materiales:

Para la elaboración de este juego puede utilizarse cartón, cartulina, madera, estereofón, etc.

Instrucciones:

- Deben formarse grupos preferiblemente de no más de 4 personas.
- Las piezas deben unirse mediante la ecuación y su solución respectiva
- El grupo ganador será el que termine de unir las piezas primero

Juego # 3

Título: “Mate-zodiaco”.

Metodología: Trabajo en grupos.

Temas recomendados:

Este juego puede ser adaptado para cualquier tema de matemática ya sea en primaria o secundaria

Descripción:

Este juego consiste en un diagrama circular segmentado que asemeja el zodiaco, donde cada sector representa un signo zodiacal, y que a su vez éste esconde una pregunta que debe ser contestada por uno de los grupos.

Materiales:

Para la elaboración de este juego puede utilizarse cartón, cartulina, madera, estereofón, etc.

Instrucciones:

- Deben formarse grupos preferiblemente de no más de 6 ó 7 personas para un grupo mayor a treinta personas (queda a criterio del profesor).
- El o la docente debe colocar el diagrama en la pizarra o una pared.
- Cada grupo nombrará un capitán, que será el encargado de tomar una de las piezas de algún signo en particular.
- E l grupo debe contestar la pregunta y resolverla en la pizarra, donde tanto el o la docente como los compañeros y las compañeras de clase deben corroborar la veracidad de la respuesta. Si la respuesta es correcta el grupo tiene derecho a enviar al capitán a tomar otra pregunta.
- Todos los grupos trabajarán simultáneamente.
- El juego concluye cuando se terminen las preguntas. El grupo ganador será el que haya contestado el mayor número de preguntas correctamente.

Sugerencia: Si desea que cada grupo resuelva un mayor número de preguntas, le recomendamos agregar más de una pregunta a cada sector del zodiaco ó hacer los ejemplares que considere convenientes.

Juego # 4

Título: "Masa al blanco".

Metodología: Trabajo en equipos.

Temas recomendados:

Este juego puede ser adaptado para cualquier tema de matemática ya sea en primaria o secundaria

Descripción:

Este juego consiste arrojar una pelota de masa o plasticina a un blanco que consta de diferentes sectores puntuados.

Materiales:

- Masa preparada o plasticina
- Una pizarra acrílica o una cartulina sujeta a la pizarra o la pared.

Instrucciones:

- Deben formarse dos o más equipos según lo prefiera el o la docente.
- El o la docente debe colocar el blanco en la pizarra o una pared. (si fue hecho en cartulina)
- El o la docente deberá previamente dividir la pizarra o cartulina en sectores con diversos puntajes. Se recomienda dejar algunos espacios en blanco.
- El profesor o profesora dará a cada equipo una pregunta. Si el equipo la responde correctamente entonces tendrá derecho a arrojar la pelota de masa o plasticina al blanco una distancia previamente establecida. El grupo acumulará los puntos que indique el blanco según sea su acierto

El número de preguntas para cada grupo es a criterio del profesor. El grupo ganador será el que haya acumulado el mayor número de puntos.

Juego # 5

Título: "Háganlo juntos".

Metodología: Trabajo en grupos.

Temas recomendados:

Este juego puede ser adaptado para cualquier tema de matemática con problemas de aplicación.

Descripción:

Este juego consiste en tres fichas que contienen pistas para resolver un problema.

Materiales:

Para la elaboración de este juego puede utilizarse cartón, cartulina o papel construcción.

Instrucciones:

- Previamente el o la docente fragmentará el enunciado de un problema en tres partes que serán las tres pistas que permitirán resolver el problema.
- Se formarán grupos de tres personas donde cada una de ellas tendrá una pista diferente, por lo tanto si desean resolver el problema cada uno deberá aportar la información que conoce.
- Todos los miembros del grupo deberán conservar su ficha durante la resolución del problema, es decir, la información de cada estudiante es confidencial.
- Todos los grupos trabajarán simultáneamente. El primer grupo que resuelva el ejercicio deberá explicar en la pizarra el procedimiento que empleó. El resto de los grupos deben suspender su trabajo y prestar atención a la explicación que está haciendo este grupo.
- Si la respuesta es correcta, el grupo que resolvió el ejercicio ganará un punto.
- Si la respuesta es incorrecta, todos los grupos deberán continuar resolviendo el ejercicio hasta que uno de todos lo resuelva correctamente.

Bibliografía

Sánchez N. G., *La lección de juegos en la enseñanza de las matemáticas*, Editorial de la Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica, 1984.

Castillo T., Espeleta V.(Compiladoras), *Planeamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática* (Metodología de la enseñanza de la matemática, Módulo 2), EUNED, Primera Edición, San José Costa Rica, 1996, páginas 125 y siguientes.

De Guzmán M., Juegos Matemáticos en la enseñanza. INTERNET, **http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/juemat/juemat.htm**

Desarrollo de un Curso Virtual de Probabilidades

Walter Mora Flores•, Mario Marín Sánchez•

Resumen

Se describe el desarrollo de un curso de probabilidad para estudiantes de la carrera de Ingeniería en Computación del Instituto Tecnológico de Costa Rica. El desarrollo del mismo se hace con la intención de incorporar elementos de interacción a través del computador, para permitir al estudiante y al profesor el diseño, la implementación y el desarrollo de actividades que faciliten la exploración de conceptos. La programación y el desarrollo del curso hace un uso importante de métodos numéricos y tiene un componente importante de programación en Java. Muchas de las propuestas o herramientas promueven un acercamiento de las prácticas educativas al paradigma constructivista .

Palabras Clave: Probabilidades, Curso Virtual, Interacción Humano-computador, Métodos Numéricos, Programación Java.

• Escuela de Matemáticas. Instituto Tecnológico de Costa Rica

PRESENTACIÓN DE LA EVOLUCIÓN DE PROPUESTAS DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE UN TEMA DE ANÁLISIS I

María Elena Platzeck• - Fabio Rubén Prieto• - Sonia Lidia Vicente•

INTRODUCCIÓN

La dificultad en el aprendizaje de la matemática no es nueva, conscientes de esta problemática nos propusimos trabajar en ello para tratar de superarla.

Una labor tan compleja como es la de abordar con eficiencia los variados problemas que se presentan en la transmisión de los conocimientos matemáticos genera preocupación y esto hace que se manifieste la inquietud de promover cambios en el enfoque dado a la enseñanza de diversos temas.

Aprovechando las alternativas que ofrece la evolución tecnológica para propiciar dichos cambios en la manera de enseñar y aprender matemática, teniendo en cuenta que la informática ocupa un lugar cada vez más importante en nuestra sociedad y resulta de gran utilidad en el campo educativo, nos propusimos intentar la realización de mejoras en el enfoque dado a la introducción de un tema de Análisis I en la Facultad de Ingeniería, en un curso inicial de Cálculo.

Es importante elegir adecuadamente entre las herramientas tecnológicas disponibles aquellas que mejor se adapten para la elaboración del material necesario para desarrollar algunos contenidos curriculares, lo que resultará enriquecedor para los estudiantes y contribuirán a una mejor comprensión y aprendizaje.

El trabajo muestra una descripción de diferentes alternativas utilizadas en la enseñanza del tema “Ecuaciones Diferenciales Ordinarias” , implementadas en diferentes ciclos lectivos, con un análisis de los resultados obtenidos en cada ciclo como también de las encuestas realizadas a los alumnos sobre la metodología de trabajo utilizada.

Las distintas estrategias implementadas combinan la enseñanza tradicional y las técnicas grupales de aprendizaje activo, utilizando la computadora como herramienta de apoyo al docente como también para fomentar el aprendizaje de los alumnos.

• Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de La Pampa (Argentina)

En este trabajo se ha utilizado el método de investigación-acción siguiendo el modelo de Kemmis, S. (1992).

RESUMEN DE LAS ACTIVIDADES REALIZADAS

Durante el segundo cuatrimestre del año 1997 y primer cuatrimestre del año 1998 realizamos los primeros intentos por lograr una mejora en el aprendizaje de este tema. Desarrollamos una experiencia basada en el método de enseñanza orientada a la resolución de problemas, combinado con la investigación en grupos.

En el transcurso del segundo cuatrimestre del año 1998 se combinó el autoaprendizaje a través de textos utilizando un cuestionario-guía, con clases en las cuales se efectuaron las resoluciones de problemas y la exposición de los mismos en el pizarrón por parte de los alumnos.

En el segundo cuatrimestre del año 1999, utilizamos un tutorial, confeccionado anteriormente, para implementar una nueva metodología de trabajo donde los alumnos pudieran llevar a cabo el aprendizaje mediante el trabajo con computadora, de manera autorregulada.

Los alumnos contaron con el tutorial con la suficiente antelación al desarrollo de la clase correspondiente, pero no lo utilizaron. Lo imprimieron y trabajaron con él como si fuera una guía más.

En el primer cuatrimestre del 2000 como se trataba de un grupo más numeroso que lo usual solamente trabajaron con el tutorial los alumnos que lo solicitaron, o sea que la incorporación a la experiencia fue voluntaria. (Para el resto se dieron las clases expositivas tradicionales).

Con una antelación de tres semanas a la clase correspondiente se les entregó a esos alumnos un diskette conteniendo el tutorial, para que estudiaran. Tenían libre acceso al centro de cómputos para trabajar en él y se contó con clases de apoyo para que tuvieran la posibilidad de efectuar las consultas que fueran necesarias.

Nuevamente no utilizaron el tutorial como tal, sino que lo imprimieron y trabajaron con él como si fuera una guía más.

Por esta causa en el segundo cuatrimestre del año 2000 recurrimos nuevamente a las clases expositivas. Se suministró una guía con la que trabajaron apoyados con material bibliográfico sugerido por la cátedra.

Durante el primer cuatrimestre de 2001 los alumnos utilizaron un software diseñado Visual Basic por los integrantes de la cátedra para adquirir las nociones básicas sobre el tema.

PLANIFICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Formulación de objetivos

Los objetivos propuestos fueron los siguientes:

Que el alumno:

1) Transfiera el concepto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a la resolución de situaciones problemáticas relacionadas con la vida real

2) Desarrolle actividades como miembro participante de dos o más grupos en función de favorecer la integración grupal.

Elaboración de encuestas para el seguimiento del proceso.

DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES EN CADA CICLO PRIMER CICLO

Segundo cuatrimestre de 1997 y primer cuatrimestre de 1998

El método empleado fue **investigación en grupos,**

Los pasos seguidos (según Sharan y Sharan) fueron:

1) Selección del aspecto del tema que se desea abordar (esto se realizó en el grupo básico, cuando se distribuyeron el trabajo). La cátedra preparó la tarea general estructurando los distintos temas, con un listado de ítems presentados en forma de cuestionario.

2) Planificaron estrategias específicas para trabajar y aprender (detallaron la tarea y propusieron metas concretas).
3) Proporcionaron una planificación simple.
4) Planificaron la presentación de los resultados al grupo básico (presentación oral).
5) Presentaron los resultados de sus trabajos (resolución de los problemas de los
6) Se realizó una evaluación de los resultados de cada grupo.
7) Intercambiaron informaciones nuevas, analizaron los problemas y formularon conclusiones.
En ese momento se realizó un plenario con la exposición en el pizarrón de los temas vistos.
Como para la resolución de los problemas se habían formado tres grupos de seis alumnos cada uno, se solicitó que un integrante de cada uno de ellos expusiera en oralmente la forma de trabajo llevada a cabo, todas las tareas realizadas y las conclusiones a las que habían arribado.

La evaluación consistió en la resolución de dos problemas (uno de decaimiento de elementos radiactivos y otro de crecimiento poblacional) relacionados con el tema, los cuales debían ser resueltos aplicando los conocimientos adquiridos sobre resolución de *Ecuaciones Diferenciales ordinarias de primer orden por el método de separación de variables.*

Resultados de la evaluación.

Aquellos que tuvieron aprobada esta evaluación fueron eximidos de resolver los

problemas relativos al tema incorporados en la tercera evaluación parcial.

Resultados de las Encuestas

Luego de la evaluación se distribuyeron dos encuestas (en forma de cuestionario) para que respondieran en forma voluntaria y anónima. La primera fue respondida en forma conjunta por el grupo de expertos, la segunda fue individual.

Encuesta Grupal

1. Pudimos analizar el problema en todos sus aspectos?

Sí: 3 (100%). **No:** 0..(0,0%).

2. Encontramos cuáles eran los temas que conocíamos y cuáles no?.

Sí: 3 (100%). **No:** 0.(0,0%).

3. Nos pusimos de acuerdo en el grupo sobre la forma de trabajo?.

Sí: 3 (100%). **No:** 0.(0,0%).

3. Tomamos decisiones juntos?.

Sí: 3 (100%). **No:** 0..(0,0%).

4. Planificamos la tarea, de qué manera?

Sí: 2 (66,6%). **No:** 1.(33,3%).

En todos los casos las decisiones fueron grupales

6. Los libros y las guías nos sirvieron para desarrollar las tareas?.

Sí: 3 (100%). **No:** 0..(0,0%).

7. Pudimos intercambiar información nueva en el grupo?.

Sí: 3 (100%). **No:** 0..(0,0%).

8. El análisis y las conclusiones e del grupo, permitieron el aprendizaje individual?.

Sí: 3 (100%). **No:** 0. (0,0%).

9. Con los conocimientos adquiridos pude preparar la presentación al grupo básico?.

Sí: 3 (100%). **No:** 0..(0,0%).

Encuesta Individual

Del total de 18 alumnos que realizaron la experiencia sólo realizaron la encuesta 13 alumnos o sea el 72,22 %.

1.- Tuve dificultades para trabajar en el grupo de expertos preparando mi tema?.

Sí: 1 (7,7%) **No:** 12 (92,3%)

2.- Las explicaciones de los otros expertos fueron suficientes para entender el tema?

Sí: 11 (84,8%). **No:** 1 (7,7%). **Relativamente satisfactoria:** 1..(7,7%).

3.- Como experto, tuve dificultades para hacer la presentación al grupo?.

Sí: 0 (0,0%). **No:** 13 (100,0%).

4.- Entendí las explicaciones de mis compañeros?.

Sí: 11 (84,6%). **No:** 0 (0,0%). **En forma relativa:** 2 (15,4%).

5.- Pude resolver los problemas dados?

Sí: 12 (92,3%). **No:** 0 (0,0%). **Necesité Ayuda**: 1 (7,7%).

6.- Fue suficiente este trabajo para entender los conceptos básicos referente a ecuaciones diferenciales?.

Sí: 11 (84,6%). **No:** 1 (7,7%). **En forma relativa:** 1 (7,7%).

Respecto a las **sugerencias** sólo contestaron tres de los trece encuestados y fueron coincidentes en la necesidad de que el grupo de expertos no superase los cuatro integrantes.

Dificultades encontradas

A los alumnos les resultó difícil (parecían incómodos cuando se les solicitó) presentar la planificación de las actividades.

El tiempo no fue suficiente como para realizar la actividad en forma más profunda, ya que por encontrarnos al final del cuatrimestre, quedaban pocas clases disponibles y tuvieron sólo una semana para preparar el tema, investigando lo solicitado.

Los alumnos mostraron dificultades en la concreción de las metas para presentarlas a la profesora. No obstante tenían bien claro qué sabían, qué necesitaban investigar, y en consecuencia propusieron metas de aprendizaje concretas planificando las estrategias específicas para trabajar y aprender.

Se mostraron reacios a presentar en forma escrita lo que entre todos planificaban en forma oral, aunque la tarea solicitada era muy simple.

SEGUNDO CICLO

Segundo cuatrimestre de 1998.

En el transcurso del segundo cuatrimestre del año 1998 debido a la gran cantidad de alumnos y a la escasez de tiempo no pudimos implementar la metodología anterior por lo que el tema fue desarrollado con clases tradicionales utilizando medios audiovisuales, recursos informáticos y técnicas grupales de aprendizaje activo para la resolución de problemas.

La motivación se realizó utilizando primero algunas ecuaciones diferenciales (no necesariamente de primer orden) para verificar que determinadas funciones eran solución de las mismas. Luego se les entregó a los alumnos un problema que pudieron plantear pero no resolver, ya que no contaban con las herramientas necesarias para hacerlo.

Mediante una clase expositiva, la profesora presentó los conceptos fundamentales que se requerían para la resolución de las ecuaciones y del problema presentado. Con estas nuevas herramientas pudieron completar las resoluciones pendientes, realizándose luego una puesta en común.

Se seleccionaron problemas de diversa índole que pudieran ser resueltos mediante el planteo y la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a variables separables, y se eligió la técnica de Puzzle de Grupos por considerarse la más adecuada. Los temas elegidos para llevar a cabo el planteo y la resolución de problemas fueron: crecimiento poblacional, decaimiento radioactivo, enfriamiento de un cuerpo y aplicaciones geométricas.

La técnica del ***Puzzle de grupos*** utilizada en esta etapa consiste en las siguientes actividades realizadas por los alumnos:

1) Juntarse en grupos de 5 integrantes (**"Grupos básicos"**). Tiempo: 5 minutos.

Distribución de tareas: Cada uno de los compañeros del grupo tiene que seleccionar un texto (A, B, C, D o E), para resolver los ejercicios propuestos en el grupo de expertos.

2) Reunión en **"Grupo de expertos"**. Tiempo: 60 minutos. Para realizar las siguientes tareas:

a) Intentar resolver individualmente cada ejercicio.

b) Discutir en el grupo cada solución.

c) Arribar a una respuesta que resulte satisfactoria para todos los integrantes del grupo. Ante dudas que no se puedan resolver dentro del grupo, recurrir a los docentes.

d) Preparar la presentación que realizará cada uno de los "expertos" al grupo básico explicando la resolución de los ejercicios, las dificultades que se generan. Esta presentación deberá ser común al grupo.

3) Trabajo en los **"Grupos básicos"**. Tiempo: 60 minutos.

Cada uno de los expertos vuelve a integrar el grupo básico de donde partió; en él se realizarán las siguientes tareas:

a) Explicación, por parte de cada uno de los expertos, de los problemas asignados a su grupo.

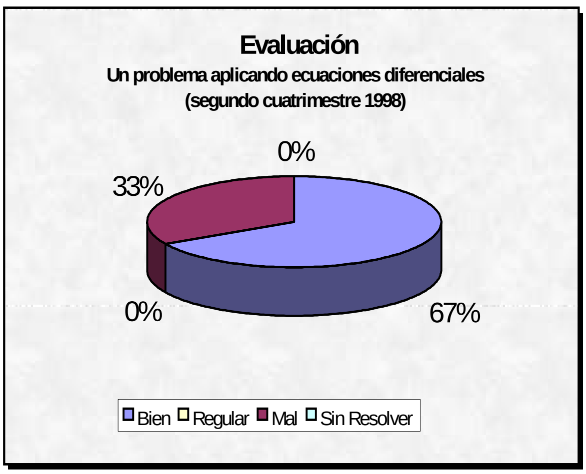
Evaluación

La evaluación, a diferencia del ciclo anterior, no fue específica del tema ecuaciones diferenciales sino que formó parte del segundo examen promocional que se tomó.

Consistió en la resolución de un problema (sobre un total de 7 ejercicios), relacionado con el tema, el cual debía ser planteado y resuelto aplicando los conocimientos adquiridos sobre resolución de *Ecuaciones Diferenciales ordinarias de primer orden por el método de separación de variables.*

Resultados de la evaluación.

De 49 Alumnos que rindieron la segunda evaluación promocional en el segundo



cuatrimestre del año 1998 se observan los siguientes porcentajes:

Encuesta Individual

Se tomó una encuesta al total de 49 alumnos que realizaron la segunda evaluación promocional, con los siguientes resultados:

1.- Pude resolver los problemas dados?

Sí: 45 %). **No:** 8 % **Tuve algunos:** 47 %

2.- Tuve dificultades para trabajar en el grupo de expertos preparando mi tema?.

Sí: 66 % **No:** 20% **Tuve algunas:** 14 %

3.- Como experto, tuve dificultades para hacer la presentación al grupo?.

Sí: 28%. **No:** 54 %. **Tuve algunas:** 18 %

4.- Las explicaciones de los otros expertos fueron suficientes para entender el tema?

Sí: 46 % **No:** 36 % **Relativamente suficientes**: 18 %).

5.- Fue suficiente el tiempo previsto para realizar este trabajo?

Sí: 96 %. **No:** 4 %.

Si bien la mayoría de los alumnos considera que el tiempo destinado al desarrollo de la actividad de Puzzle de Grupos fue suficiente, algunos sugieren la posibilidad de dedicar algo más de tiempo a ella.

También sugieren que haya un profesor por cada grupo de expertos, ya que quienes deben actuar como tales a veces no adquieren el compromiso de hacerlo, ya que no preparan la presentación al grupo en forma clara y completa.

Solicitan además que sea el profesor (o el jefe de trabajos prácticos) quien desarrolle primero en el pizarrón por lo menos un ejercicio y un problema de cada tipo, los que luego les servirán a ellos como modelo, permitiéndoles aprovechar mejor el tiempo disponible. Algunos alumnos expresaron no estar de acuerdo con la aplicación de esta técnica porque esto les requirió dedicar más tiempo al desarrollo del tema y un mayor esfuerzo personal.

Dificultades encontradas

Llegado el momento de formar los grupos, algunos alumnos se mostraron reacios a integrarse con el resto, pero luego lo hicieron y en general trabajaron activamente en la resolución de los problemas.

Otros alumnos no asumieron totalmente el compromiso al actuar como expertos explicándole al resto de sus compañeros los problemas resueltos. Por eso se vio la necesidad de hacer una puesta en común , desarrollando en el pizarrón algunos problemas, porque de otra manera habría quienes se verían perjudicados por la falta de interés puesta por quienes no se quisieron comprometer en el desarrollo de las actividades.

Es notable la convicción que en general tienen los alumnos universitarios de que debe ser el profesor el encargado de "trasmitir" sus conocimientos y ellos ser en el aula "receptores" pasivos. Se resisten a cumplir un rol protagónico.

TERCER CICLO

Segundo cuatrimestre de 1999 y primer cuatrimestre de 2000.

El método empleado fue **Aprendizaje autorregulado mediante el uso de un Tutorial para trabajar en computadora,**

A partir de las experiencias anteriores, viendo la necesidad de disponer de mayor cantidad de tiempo para desarrollar el tema, decidimos implementar una nueva metodología de trabajo.

Habiendo reflexionado sobre la posibilidad de realizar innovaciones utilizando la tecnología para potenciar el aprendizaje, aprovechando los recursos multimediales disponibles y viendo la inclinación de los alumnos al uso de la computadora, teníamos preparado un tutorial sobre el tema para entregarles en un diskette.

Dicho tutorial contenía el complemento teórico necesario para el aprendizaje autorregulado de los conceptos básicos necesarios para desarrollar el tema, acompañado de ejercicios y problemas, algunos de los cuales estaban resueltos. Estaba realizado en Word, utilizando hipervínculos.

El diskette también contenía la bibliografía sugerida, la que, de ser necesario, podrían llegar a consultar.

Los temas elegidos para llevar a cabo el planteo y la resolución de problemas fueron: crecimiento poblacional, decaimiento radioactivo, enfriamiento de un cuerpo, aplicaciones geométricas, mezclas, y aplicaciones varias.

Evaluación

Al finalizar la clase de práctica se les ofreció a los alumnos la posibilidad de realizar una evaluación exclusivamente de este tema. La intención era que ellos mismos pudieran verificar si el aprendizaje efectivamente se había realizado.

Dicha evaluación era optativa y estaba compuesta por tres items: verificar que una función es solución de una ecuación diferencial, resolver una ecuación diferencial encontrando su solución general y una solución particular, y por último plantear y resolver un problema (en este caso se trató de uno de decaimiento radioactivo)

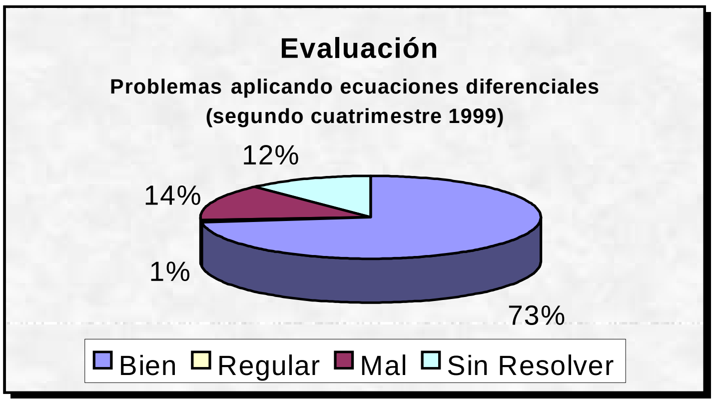
Se presentaron sólo nueve alumnos, de los cuales ocho resolvieron satisfactoriamente las cuestiones presentadas.

La segunda evaluación promocional fue similar a la del ciclo anterior. Consistió en la resolución de un problema (sobre un total de 7 ejercicios) relacionado con el tema, el cual debía ser resuelto aplicando los conocimientos adquiridos sobre resolución de *Ecuaciones Diferenciales ordinarias de primer orden por el método de separación de variables.*

Se incluyó además un item para evaluar conceptos teóricos fundamentales.

Resultados de la evaluación.

De 20 Alumnos que rindieron la segunda evaluación promocional en el segundo cuatrimestre del año 1999 se observan los siguientes



Resultados de las encuestas

Al finalizar el cuatrimestre se les entregó una encuesta para que opinaran sobre la metodología empleada. Los resultados fueron los siguientes:

1. ¿Cómo trabajó con el tutorial?

   Lo analizó usando la computadora: 18 % Lo imprimió parcialmente: 24 %

   Lo imprimió totalmente: 58 % No lo utilizó: 8 %

2. ¿Qué le pareció esta forma de trabajar?

   Novedosa: 12 % Muy buena: 18 %

   Práctica: 22% Poco útil para el aprendizaje: 48 %

3. ¿Tuvo dificultades para comprender el tema utilizando el tutorial?

   Sí: 40 % **No:** 60 %

Entre las sugerencias de los alumnos se encuentran las siguientes: que el profesor desarrolle en el pizarrón ejercicios y problemas antes de trabajar con el tutorial porque sin una explicación previa no lo entienden; que en el tutorial se agreguen más ejercicios y problemas resueltos; que haya más definiciones.

A quienes no les gustó esta forma de trabajar dicen que es porque al trabajar con la computadora tienen una visión limitada del material (lo que ven en la pantalla no les alcanza) y "se pierden". Otros aclaran que tuvieron dificultades para entender la teoría, por lo que luego no pudieron resolver algunos ejercicios y problemas.

A otros les pareció una novedosa forma de trabajar para ¨estar en tema¨ para cuando la profesora lo explique.

Dificultades encontradas

Como la mayoría de los alumnos imprimió el tutorial, se perdió la esencia del mismo.

Muchos alumnos no le habían dedicado el tiempo necesario y esperaban la explicación de la profesora para recién empezar a estudiar el tema, por lo que atrasaron a los que habían trabajado a conciencia y ellos mismos no alcanzaron a completar el estudio del tema en las clases dedicadas a aclarar las dudas.

Si bien contaban con la posibilidad de asistir al centro de cómputos, en donde tenían a su disposición tanto las computadoras como gente capacitada, en su mayoría no lo hicieron Algunos porque tenían su propia computadora y otros porque directamente no quisieron.

Aunque se destinaron clases de consulta en el período de tiempo que debían dedicar al estudio del tutorial, no asistieron a ellas, perdiendo la posibilidad de aclararse las dudas que se les fueran presentando.

CUARTO CICLO

Primer cuatrimestre de 2001 .

(cuarto ciclo de la espiral autoreflexiva de Kemmis)

Metodología utilizada: **Trabajo en computadora con asistencia del docente.**

Teniendo en cuenta que el tutorial había sido impreso por la mayoría de los alumnos, lo que le quitaba al trabajo sus características de ser hecho “ con la computadora”, se diseñó un Software específico e interactivo para que los alumnos adquieran los conocimientos mínimos sobre el tema : Ecuaciones diferenciales ordinarias. Éste se acompañó con una guía con problemas.

También se preparó el material para la evaluación y las encuestas destinadas a la evaluación de esta modalidad de trabajo.

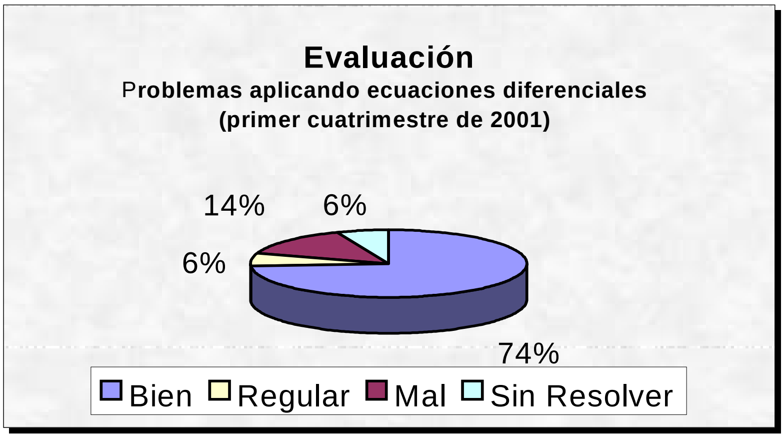
El software interactivo fue confeccionado en Visual Basic. Por el momento sólo trabaja los siguientes contenidos: introducción, definiciones, grado y orden de una ecuación diferencial, soluciones generales y soluciones particulares.

Evaluación

La evaluación consistió, como en los dos ciclos anteriores, en una evaluación sumativa consistente en 7 ejercicios, dos de los cuales incluían temas específicos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y su resolución por el método de separación de variables, y el otro incluía específicamente preguntas teóricas sobre los temas tratados .

Resultados de la evaluación.

En el siguiente gráfico se sintetizan los resultados obtenidos por los alumnos en uno de los tres ejercicios que se tomaron sobre el tema ecuaciones diferenciales. En este ejercicio se incluían preguntas teóricas sobre el tema estudiado con el software diseñado por la cátedra.



Los resultados promedio de los otros dos ejercicios consistentes en la resolución de problemas sobre el tema se sintetizan en el siguiente gráfico.

Resultados de las Encuestas

Luego de la evaluación se distribuyeron dos encuestas (en forma de cuestionario) para que respondieran en forma voluntaria y anónima.

I) Acerca del trabajo con la computadora.

1) ¿Considera que el material utilizado para estudiar esta parte de ecuaciones diferenciales fue adecuado?

Sí: (91 %). **No:** (9 %).

¿Por qué ? (Algunas opiniones):

* Fácil y entendible para estudiar
* Es simple y claro
* Facilitó el entendimiento
* Despertó más interés

Nota: Un alumno fotocopió el material de otro año y le sirvió como complemento

2) ¿Le gustó esta metodología de trabajo? **Sí:** (91 %). **No:** (9 %).

¿Por qué ? (Algunas opiniones) :

* Es más entretenido
* Despertó más interés
* Es algo diferente
* Por ser una actividad distinta la encaró con mayor predisposición
* Pude aprender a desenvolverme mejor sin tener que preguntar a cada rato

3) ¿Qué ventajas o inconvenientes le parece que tiene esta metodología con respecto a una clase tradicional?.

Ventajas

- Tema fácil y rápido de entender
- Poder sacar conclusiones propias y consultar al docente
- Hizo fotocopia del material del año anterior y tuvo dos formas diferentes de aprender el tema
- la clase es más interesante que la tradicional
- aprendí más
- la teoría fue suficiente para resolver los problemas dados

Desventajas

- Los alumnos no poseen una copia del material teórico del softuare ni de los ejercicios que resolvieron con dicho programa.
- No hay posibilidades de consultar
- la teoría se leyó en el momento para resolver la ejercitación que aparecía en el programa pero luego tuvo que buscar material adicional para estudiar.

Sugerencias:

Que se emplee éste método en otros temas: **82** % No completan **: 18%**

II) Acerca del trabajo en grupos para resolver problemas

a) ¿El resto del grupo lo escuchó?. **Sí:** (100%). **No:** (0 %).

b) ¿El resto del grupo le entendió? **Sí:** (82 %). **No:** (18 %).

c) ¿El resto del grupo atendió sus sugerencias? **Sí:** (100 %). **No:** (0 %).

d) ¿Está satisfecho con su participación en las discusiones del grupo?

Sí: (100 %). **No:** (0 %).

II) Acerca de la metodología de trabajo

a) ¿La colaboración de la Profesora de la cátedra fue adecuada?

Sí: (82 %). **No:** (9 %). **Más o menos:** (9%)

b) ¿Considera que esta forma de trabajo le ayudó a mejorar su capacidad para plantear y resolver problemas? **Sí:** (73 %). **No:** (27 %).

c) ¿Considera que esta técnica podría aplicarse con mayor frecuencia? ¿Por qué?

Sí: (82 %). **No:** (9 %). **Más o menos:** (9%)

Respecto a las **sugerencias** sólo contestaron tres de los trece encuestados y fueron coincidentes en la necesidad de que el grupo de expertos no superase los cuatro integrantes.

Dificultades encontradas

No se presentaron mayores dificultades, en general los alumnos trabajaron con mucho entusiasmo con el software, requiriendo escasa colaboración del docente para la resolución los ejercicios.

El software no tiene opciones para poder imprimir tanto la parte teórica como la parte de la ejercitación que resolvieron, por lo que los alumnos tuvieron la posibilidad de asistir al centro de cómputos cada vez que fuera necesario para trabajar en la computadora.

La única dificultad que se presentó fue la instalación del software, ya que se desarrolló con una versión de VisualBasic anterior a la que existía en la sala de cómputos.

CONCLUSIONES

Es de destacar que el grupo de alumnos que fue evaluado en cada ciclo es distinto tanto en número como en su conformación.

Pese a ello si “comparamos” los logros alcanzados con la aplicación de las distintas metodologías utilizadas en cada ciclo, podemos observar que los porcentajes de alumnos que resuelven bien la parte de ecuaciones diferenciales resultan muy similares y notoriamente altos para lo que es usual en cursos de primer año.

Si bien no realizamos un seguimiento de los alumnos, al contactarnos de manera informal con colegas de años superiores, éstos nos manifestaron que en estos últimos años los alumnos han podido desarrollar otras competencias que tienen que ver fundamentalmente con capacidades o habilidades para: formular matemáticamente un problema dado mediante la confección de un modelo matemático.

Se ha insistido permanentemente en desarrollar capacidades para analizar distintos procedimientos para abordar un mismo ejercicio así como aprender a respetar y confrontar distintas formas de pensar, a conjeturar, a verificar, a relacionar y a generalizar.

La utilización de la computadora como herramienta para el estudio del tema y en particular para la resolución de ejercicios constituyó una novedad para la mayoría de los alumnos, y logró que éstos estén motivados y mejor predispuestos para aprender el tema.

En lo que se refiere al resultado en el aprendizaje del tema, también se observaron diferencias positivas respecto a años anteriores ya que sus exámenes registraron mejores calificaciones en comparación con el promedio histórico.

BIBLIOGRAFÍA

Elliot, J. (1996*) "El cambio educativo desde la investigación-acción" Madrid: Ediciones Morata.*

Guzmán, M de. (1992)*"Tendencias innovadoras en educación matemática"*. Buenos Aires: Olimpíada Matemática Argentina.

Kemmis, Stephen, Mc Taggart, Robin (1992) "*Cómo planificar la investigación-acción"* Barcelona : Alertes

Kranz, S (1999) "How to Teach Mathematics". Providence, Rhode Island : American Mathematical Society

Kreider D. ; Kuller, R ; Ostberg, D "Ecuaciones Diferenciales" Panamá: Fondo Educativo Interamericano

Mayer,R.E. (1986) *"Pensamiento, resolución de problemas y cognición"* Barcelona: Paidós.

Polya, G (1990) *"¿Cómo plantear y resolver problemas?"* México: Trillas.

SESGOS DE GENERO EN LA OFERTA TÉCNICA Y TECNOLÓGICA

Ana Rosa Ruiz Fernández•

Introducción:

La baja participación de la mujer en campos estratégicos de desarrollo y por ende, de poder, no es otra cosa que un reflejo de cómo se ha conceptualizado la educación. Desde un plano social, la mujer es ubicada en ciertos campos del conocimiento. Esto es reforzado a nivel de la educación y consolidado a nivel laboral.

El abordaje de este tema, se plantea a la luz de las siguientes situaciones que se reconocen como entornos y marcos de referencia para el análisis:

- A nivel de entorno socioeconómico
  - Existe un contexto social que ubica a la mujer y al hombre en determinados campos del conocimiento que los hacen limitar sus capacidades y destrezas, en especial, a la mujer.

  - Existen barreras conceptuales, físicas y humanas que hacen que la mujer y el hombre puedan insertarse y permanecer en ciertas áreas del conocimiento.

  - Existen barreas conceptuales, físicas y humanas que hacen que la mujer pueda insertarse y mantenerse en ciertos puestos y campos laborales y por tanto, en ciertos cargos ejecutivos y de dirección.

Marco conceptual

Las barreras se analizarán bajo una identificación de sesgos de género en el proceso de atracción, selección, matrícula y permanencia de estudiantes en el campo técnico, científico y tecnológico. Pero para ello, el estudio inició conceptualizando dos conceptos: oferta educativa y sesgos de género.

• Coordinadora del Programa de Equidad de Género, Instituto Tecnológico de Costa Rica

- **Oferta educativa con equidad de género**

  La oferta educativa en el ITCR, es el conjunto de servicios, incluidas las relaciones humanas, que se ofrecen a los y las estudiantes durante el proceso de atracción, acceso y permanencia en la Institución.

  Debe abarcar el servicio de colocación laboral para aquellos estudiantes, mujeres y hombres que completen sus estudios en la Institución.

  Si bien la oferta educativa tiene como población usuaria a los y las estudiantes, debe tomarse en cuenta que las personas que laboran para la Institución, también participan de esa oferta.

  La oferta educativa con equidad de género debe basarse en tres principios fundamentales:

La igualdad de oportunidades

  - La equidad en el acceso y permanencia
  - El reconocimiento y respecto a las diferencias

- **Sesgos de género:**

  Todas aquellas acciones y omisiones que impiden o menoscaban el proceso de atracción, selección, acceso y/o permanencia.

  Las relaciones humanas, en perjuicio de las estudiantes mujeres que desean ingresar a la Institución o que son estudiantes regulares de la misma.

Etapas y resultados de la investigación

La investigación se centró principalmente en la estudiante en el Instituto Tecnológico, cuál es su oportunidad para ser admitida, para permanecer y graduarse. Para ello, se siguieron una serie de etapas y se obtuvieron resultadas en cada una de éstas, las cuales se detalla a continuación.

1. **Una descripción de cada etapa del proceso de atracción y admisión por sexo**. Este análisis evidenció que cada etapa es para el hombre ganar posición y para la mujer perderla[1].
   Se identifica en esta etapa que el examen de admisión es una de las principales barreras de entrada.
   Además se levanta una estadística de matrícula y graduación por sexo, carrera y sede[2].

2. **Una análisis de campo a estudiantes[3] que tuvieron dificultad en cada etapa de admisión.** Por ejemplo, presentaron la solicitud pero no hicieron el examen.

   Los principales factores de inequidad en el ingreso en el ITCR son:
   Presión social para elegir carreras del dominio femenino.
   Limitada oferta de carreras en las ciencias administrativas.
   Desempeño en la prueba de admisión.
   Exigencias de puntaje para ingresar a las carreras.
   Información insuficiente sobre los servicios institucionales.

Elementos del ambiente institucional que limitan la formación de las estudiantes en el ITCR

- Valoración de las mujeres a partir de su apariencia física
- Lenguaje y conductas sexistas.
- Diseño curricular distante de la formación humana.
- Baja presencia de mujeres como docentes en los cursos de carrera.
- Desinformación sobre los servicios institucionales.
- Insuficiencias en la prestación de servicios.

---

[1] Vives William y Blanco Mario. *El comportamiento de la demanda estudiantil en el ITCR*. Cartago: Instituto Tecnológico de Costa Rica, Programa Equidad de Género; 1998

[2] Vives William: El comportamiento de la matrícula y graduación en el ITCR. Cartago: Instituto Tecnológico de Costa Rica, Programa Equidad de Género, 1998.

[3] Brenes, Irene. ***Barreras en el acceso a la oferta educativa del ITCR: la perspectiva de las estudiantes***. Cartago: Instituto Tecnológico de Costa Rica, Programa Equidad de Género; 1998

- La ausencia de espacios de expresión de los intereses y necesidades de las mujeres.
- Perfil rígido y excluyente de las mujeres estudiantes con hijas/os a crago y sin apoyo familiar.
- Criterios academicistas en las decisiones sobre cambios de carreras.
- Desinformación de los derechos de las estudiantes, en particular, sobre la Ley de Hostigamiento Sexual.
- Cultura estudiantil centrada en los intereses y prácticas masculinas.

3. **La prueba del Examen de Admisión presenta sesgos de género al ser ponderado dentro de la nota de admisión[4].**

   Las estimaciones muestran claramente que para cuatro de los cinco años bajo análisis, Cuarto Ciclo es mejor predictor de Rendimiento Académico que las Áreas Matemática y Verbal de la Prueba de Aptitud Académica. El año en el cual la correlación entre el Área Matemática y Rendimiento Académico es superior a la correlación entre Cuarto Ciclo y Rendimiento Académico, la diferencia entre las correlaciones es ínfima."

   "A la luz de éstos resultados no se justifica la mayor ponderación que se le da al Área Matemática en el cálculo del Puntaje de Admisión. Los resultados más bien señalan que Cuarto Ciclo debería tener el mayor peso. En todo caso, si los resultados de los dos últimos años marcaran una nueva tendencia, se aconsejaría dar un peso equitativo a Cuarto Ciclo y al Área Matemática. El Área Verbal, por otra parte, prácticamente no contribuye a explicar Rendimiento Académico, por lo que su peso debería ser mínimo, si es que se le quiere dar algún peso (se calcularon las respectivas correlaciones parciales para sustentar la anterior afirmación; no se incluyen para no hacer este informe innecesariamente largo)"

   "La ponderación que se emplea actualmente está creando un sesgo injustificado a favor de los hombres, toda vez que ellos obtienen un mayor puntaje en el Area Matemática y ésta tiene un poder explicativo sobre Rendimiento Académico, inferior al mostrado por Cuarto Ciclo."

---

[4] Guillén, Edgar: ***Detección de sesgos por género en la prueba de aptitud académica.*** Cartago: Instituto Tecnológico de Costa Rica, Programa Equidad de Género; 1998

"La formula de ponderación empleada no sólo no se justifica técnicamente a la luz de los resultados obtenidos en el presente estudio, si no que además se separa drásticamente de la práctica que se sigue con el SAT. Ramist, de una revisión de estudios de validez del SAT en 685 universidades, encuentra que la ponderación promedio más adecuada es un 54% para las calificaciones de secundaria, un 26% para el Área Verbal y un 20% para el Área Matemática; aunque advierte que se dan variaciones considerables entre universidades. Ramist (1984, p.142) "

4. **Análisis sobre el manejo de género en las carreras[5].** Existe un manejo incorrecto sobre género y cantidad de mujeres. No existe conciencia sobre la problemática, no existen servicios de apoyo a las mujeres, existe una pequeño voluntad hacia un cambio que se refleja con el cambio en el lenguaje y fotos de cada Escuela.

5. **Plan de Acción sobre Equidad de Género en el ITCR**.

El Plan de Acción se plantea atendiendo los siguientes aspectos:

- Políticas y Mecanismos de atracción de la población estudiantil femenina.
- El proceso de admisión como un medio de elección de carrera no discriminatorio y libre de los estereotipos sexuales.
- Oferta académica y oferta de servicios sensible a las necesidades diferenciales de las mujeres y los hombres.
- Equidad de género y ética institucional: mecanismos para la construcción de ambientes potenciadores del desarrollo humano para mujeres y hombres.
- Equidad de género y política de administración del recurso humano: contrataciones, evaluación del desempeño, oportunidades de formación.

---

[5] Meza Gabriela, Queralt Laura y Rojas Ana Mercedes. ***Análisis de género del comportamiento de la demanda estudiantil en el ITCR***. Cartago: Instituto Tecnológico de Costa Rica, Programa Equidad de Género; 1999.

- Equidad de género en la agenda estratégica de desarrollo institucional: áreas de crecimiento, investigación, servicios institucionales, poblaciones destinatarias.
- Derechos de las y los estudiantes y mecanismos facilitadores de su ejercicio.
- Equidad en el acceso y disfrute de los servicios institucional.

SIMULACIONES CON LA CALCULADORA GRAFICADORA TI-89/92+

Edison De Faria Campos•

Resumen

El objetivo de esta ponencia es explorar el potencial de la calculadora graficadora con sistema algebraico computacional (CAS) TI89/92plus para desarrollar algunos modelos matemáticos representados por ecuaciones diferenciales de primer y segunda orden, sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en diferencia, así como construir algunos programas para realizar simulaciones y para resolver problemas de optimización para funciones de varias variables.

Introducción

La modelación matemática es de importancia fundamental en el aprendizaje de la matemática y nos permite reflexionar y explicar fenómenos que pueden ser simulados bajo condiciones favorables. Por otro lado, la programación es una herramienta didáctica muy importante debido a su similitud con el proceso de resolución de problemas, y por permitir ampliar las capacidades de la calculadora. La simulación de fenómenos físicos junto con la modelación matemática y la programación, representan elementos esenciales para la construcción de conceptos matemáticos. Las nuevas calculadoras graficadoras programables como la TI89/92plus posibilitan la programación, simulación y modelación, permitiendo crear un ambiente de experimentación dentro y fuera del aula, funcionando como mediadoras y agentes didácticos dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje (Bauldry y otros, 1997; De Faria, 1997, 1998, 2000; Moreno, 1999; Waits y Demana, 1996).

De acuerdo a Balacheff y Kaput (1996), el aprendizaje es un proceso que tiene lugar en la interacción entre el sujeto(estudiante), el medio y los agentes didácticos. La dimensión cognitiva es el aspecto relevante del sujeto desde el punto de vista del sistema y el medio es un sistema antagonista del sujeto. El medio está en capacidad de actuar y de reaccionar a

• Universidad de Costa Rica, edefaria@cariari.ucr.ac.cr

las actuaciones del sujeto y el conocimiento es una propiedad del sujeto en situación y en interacción con el sistema antagonista.

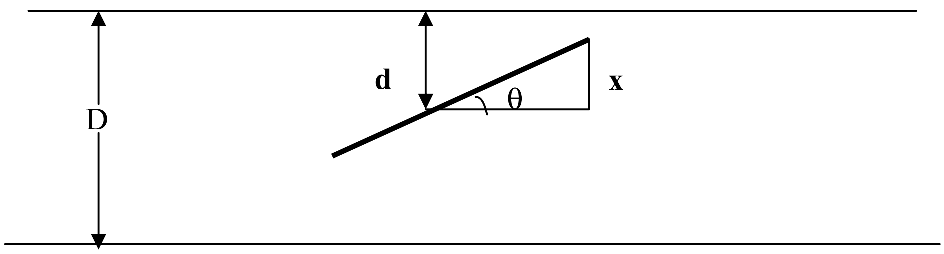
La utilización de la tecnología permite el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación de los objetos matemáticos y dichos sistemas son un aspecto central de la comprensión del sujeto acerca de los objetos matemáticos y sus relaciones y de las actividades matemáticas que éste ejecuta cuando realiza tareas que tienen que ver con esos objetos.

I. Simulaciones tipo Montecarlo

1. Agujas de Bufón

Si tenemos una cartulina con líneas paralelas situadas a una distancia D unas de las otras, y si dejamos caer agujas de longitud L ≤ D sobre la cartulina, ¿cuál es la probabilidad de que una aguja caiga sobre una de las líneas?

Este problema fue planteado por el naturalista e físico francés Georges Louis Comte de Bufón (1707-1788), y la razón entre el número total de agujas (N) y el número de agujas que intersecan las líneas paralelas tiende al número π cuando N crece.



d = distancia del centro de la aguja a la línea más cercana

D = distancia entre dos rectas paralelas consecutivas

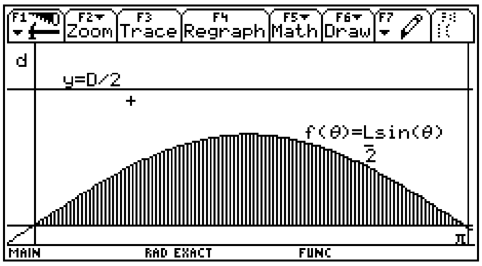
L = Longitud de la aguja

x = $\frac{L}{2} sen\theta$

La aguja intersecará la línea si $d \leq \frac{L}{2} sen\theta$. ¿Cuántas veces ocurre esto?

La siguiente gráfica expresa **d** en función de Lsen(θ)/2. Los puntos que se encuentran dentro de la región sombreada corresponden a $d \leq \frac{L}{2} sen\theta$, es decir, la aguja cruza la línea. Por lo tanto, la probabilidad de que la aguja cruce la línea es igual a la razón entre el área sombreada y el área del rectángulo, es decir:

$\frac{N}{m} \approx \frac{\frac{D\pi}{2}}{\int_0^\pi \frac{L}{2} sen(\theta) d\theta} = \frac{D\pi}{2L}$, con **m** el número de veces en que las agujas intersecan las líneas. Por lo tanto, si N es grande, el número $\frac{2LN}{Dm}$ es una aproximación para el número π.



Programa bufón {Para la calculadora TI89/92}

```
buffon()
Prgm
Dialog
Title "Digite la longitud L de cada aguja"
Request "Longitud", L
EndDlog
Dialog
Title "Digite la distancia D≥L entre las líneas"
Request "Distancia", D
EndDlog
Dialog
Title "Digite el número total de agujas"
Request "Total", N
EndDlog
Local  i, j, k, m
0 → m
expr(L) → L
expr(D) → D
expr(N) → N
ClrIO
```

```
For i, 1, N
π*rand( ) → j
0.5*rand( )*D → k
If k ≤ 0.5*L*sen(j) Then
m+1 → m
EndIf
EndFor
SetMode("exact/approx", "approximate")
SetMode("display digits", "fix 12")
Disp 2*L*N/(D*m)
EndPrgm
```

Para ejecutar el programa anterior, digite **bufon( )** en la línea de comando de la pantalla principal (Home). Como ejemplo, escoja los siguientes parámetros: L = 1, para la longitud de cada aguja; D = 2, para la distancia entre las líneas y N = 500 para el número total de agujas. El resultado generado por el programa es una aproximación para el número π

2. Integración numérica

Suponga que la integral $\int_a^b f(x)dx$ está dada por el área de una región **R**. Si encerramos la región **R** por un rectángulo de área **A** y escogemos al azar **N** puntos de **A** y si de ellos **m** puntos caen en la región **R**, entonces (para **N** grande),

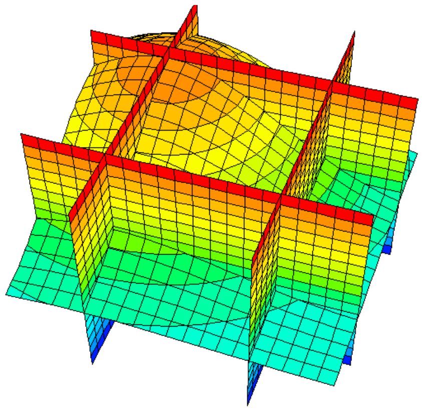
$\frac{m}{N} \approx \frac{Area(R)}{Area(A)} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{Area(A)}$, lo que nos permite obtener la siguiente aproximación:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{mArea(A)}{N}.$$

De la misma forma, si $\int_D\int f(x,y)dA$ expresa un volumen de una región **R** sobre un dominio D del plano x-y y por debajo de la gráfica de z = f(x,y), y si podemos encerrar la región **R** con un paralelepípedo **P** con base D obtendremos – siguiendo el mismo razonamiento anterior – una aproximación para la integral doble:

$$\int_D\int f(x,y)dA \approx \frac{mVol(P)}{N}$$

El siguiente programa aproxima el valor de la integral $\int_0^1\int_0^1 e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ por el método de Montecarlo, encerrando la región de interés con un cubo de arista igual a 1.



Programa integral. {Para la calculadora TI89/92}

```
integral( )
Prgm
ClrIo
setMode(“Exact/Approx”, “approximate”)
Dialog
Title “Digite el número de puntos”
Request “Número de puntos”, N
EndDlog
Local  I, J, K, L, M
0 → M
expr(N) → N
RandSeed rand(2000)
For  I, 1, N
rand( ) → J
rand( ) → K
rand( ) → L
If  L  ≤   e^(-J²-K²)  Then
M+1 → M
EndIf
EndFor
SetMode(“display digits”, “fix 4”)
Disp  M/N
EndPrgm
```

Ejecutar integral( ) desde la pantalla principal (Home), para – por ejemplo – los siguientes valores de N: 20, 30, 50.

II. Optimización: Método de los Multiplicadores de Lagrange.

1. Función de dos variables y una restricción

Considere el problema de optimización:

Optimizar $f(x,y)$

Sujeto a la restricción $g(x,y) = \text{c}$ (constante)

La teoría de cálculo en varias variables nos dice que la solución para el problema puede ser encontrada en uno o más puntos que satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \; ; \; g(x,y) = c. \qquad (1)$$

El siguiente código corresponde a una función que toma como argumentos dos hileras de caracteres s y s1, y devuelve los puntos (x,y) que satisfacen el sistema (1), pero no se decide si dichos puntos son de máximo, mínimo o bien punto de silla. Considero que la ventaja que tiene el programa es que simplifica el procedimiento de encontrar las raíces del sistema (1) y permite que el estudiante se dedique más tiempo en el planteamiento del problema y en la comprobación – que también puede ser incluida en el programa - e interpretación de la naturaleza de cada uno de los puntos.

```
lagrang1(s,s1)
Func
f “Ejecute Clear a-z antes de seguir"
Local m,se,eqs,st,resp
inString(s1,"=") →m
left(s1,m-1) →se
"solve("&s1&" and "→eqs
string(d(expr(s),x)=λ*d(expr(se),x)) →st
eqs&st&" and "→eqs
string(d(expr(s),y)=λ*d(expr(se),y)) →st
eqs&st&",{t,x,y})"→eqs
expr(eqs) →resp
Return resp
EndFunc
```

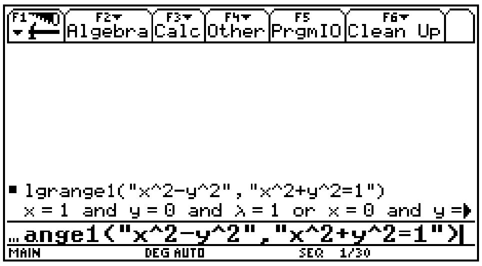
Para verificar si el programa funciona correctamente, encontraremos los puntos que son candidatos a máximos y mínimos para la función y la restricción dadas:

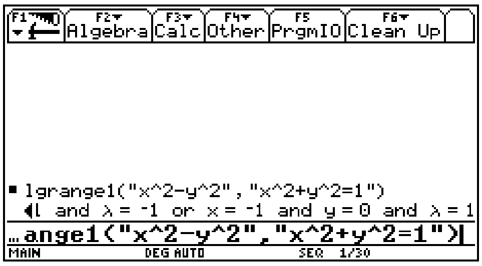
$$f(x,y) = x^2 - y^2 \; ; \; x^2 + y^2 = 1.$$

En la pantalla principal (Home) digitamos el siguiente comando:

lagrang1("x^2-y^2","x^2+y^2=1")

Las soluciones (x,y)=(±1,0) y (0,±1) son dadas en las siguientes pantallas:





2. Función de tres variables con una restricción

El siguiente programa determina los candidatos a máximo, mínimo y punto de silla para el problema de optimización:

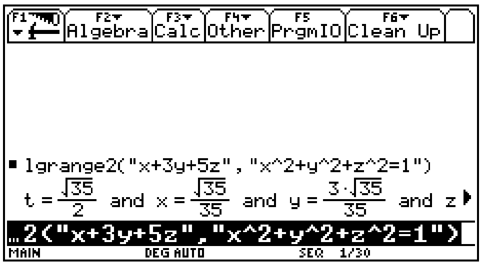
Optimizar $f(x,y,z)$

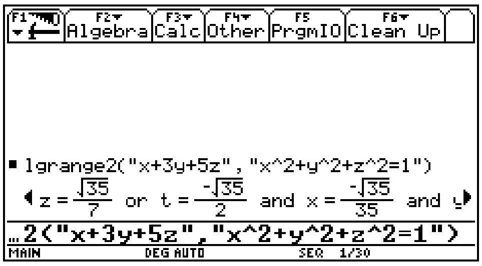
Sujeto a la restricción $g(x,y,z)$ = c (constante)

```
lagrang2(s,s1)
Func
f "Ejecute Clear a-z antes de seguir"
Local m,se,eqs,st,resp
inString(s1,"=") →m
left(s1,m-1) →se
"solve("&s1&" and "→eqs
string(d(expr(s),x)=t*d(expr(se),x)) →st
eqs&st&" and "→eqs
string(d(expr(s),y)=t*d(expr(se),y)) →st
eqs&st&" and "→eqs
string(d(expr(s),z)=t*d(expr(se),z)) →st
eqs&st&",{t,x,y,z})"→eqs
expr(eqs) →resp
Return resp
EndFunc
```

Como ejemplo determinaremos los puntos críticos para el problema:

$$f(x,y,z) = x + 3y + 5z \;;\; x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$





3. **Función de tres variables con dos restricciones**

Finalmente, el programa lagrang3 recibe tres listas: una para la función a optimizar y dos para las dos restricciones:

Optimizar f(x,y,z)

Sujeto a: $g(x,y,z)$ = c1, h(x,y,z) = c2

y devuelve los candidatos a máximo, mínimo y punto de silla.

```
lagrang3(s,s1,s2)
Func
f “Ejecute Clear a-z antes de seguir"
Local m1,m2,sg,sh,eqs,st,resp
inString(s1,"=") →m1
left(s1,m1-1) →sg
inString(s2,"=") →m2
left(s2,m2-1) →sh
"solve("&s1&" and "&s2&" and "→eqs
string(d(expr(s),x)= λ*d(expr(sg),x)) →st
eqs&st&" and "→eqs
string(d(expr(s),y)= λ*d(expr(sg),y)) →st
eqs&st&" and "→eqs
string(d(expr(s),z)=λ*d(expr(sg),z)) →st
eqs&st&" and "→eqs
string(d(expr(s),x)=μ*d(expr(sh),x)) →st
eqs&st&" and "→eqs
string(d(expr(s),y)= μ*d(expr(sh),y)) →st
eqs&st&" and "→eqs
string(d(expr(s),z)= μ*d(expr(sh),z)) →st
eqs&st&",{λ,μ,x,y,z})"→eqs
expr(eqs) →resp
Return resp
EndFunc
```

Utilice el programa anterior para encontrar los puntos críticos para el problema:

Optimizar f(x,y,z) = x + 2y
Restricciones: x + y + z = 1; $y^2 + z^2 = 4$.

lagrang3("x+2y","x+y+z=1", "$y^2 + z^2 = 4$")

III. Un modelo matemático para el sida

El siguiente modelo fue desarrollado por el matemático australiano M. Novak (1992). Se supone que para cada virus mutado, el sistema inmune tiene que crear nuevas células específicas – células resistentes especialistas - para luchar únicamente contra el tipo de virus mutado. Por otro lado, cada virus mutante puede destruir cualquier tipo de célula resistente contra el HIV, o por lo menos deteriorar sus funciones, es decir, cada tipo de célula resistente funciona como especialista mientras que cada tipo de virus mutante funciona como generalista. En esta lucha dispareja en contra de la formación de nuevos tipos de agentes AIDS, generados en el cuerpo de la persona infectada, el sistema inmune pierde eficiencia. La reproducción excesiva de un cierto tipo de virus hace con que el sistema inmune pierda el control, dando lugar al AIDS.

El número $v_j^{(i)}$ de virus mutante de tipo i, j pasos de tiempo de haber iniciado la infección se describe por medio de la ecuación iteractiva:

$$v_{j+1}^{(i)} = v_j^{(i)} + v_j^{(i)} * \left(R - P * a_j^{(i)}\right) \qquad (1)$$

mientras que el número $a_j^{(i)}$ de células inmunes – resistentes – por unidad de volumen de sangre (células T-helper, células B, anticuerpos, células matadoras) que afectan al virus de tipo i, $v_j^{(i)}$ satisfacen la ecuación:

$$a_{j+1}^{(i)} = a_j^{(i)} + v_j^{(i)} * \left(K - U * a_j^{(i)}\right) \qquad (2)$$

0< P < 1 representa la eficiencia inmunológica, 0 < R < 1 es la tasa de crecimiento del virus i, 0 < U < 1 es la eficiencia viral, una característica de la agresividad del virus, mientras que 0 < K < 1 representa la tasa de crecimiento de la célula resistente de tipo i, generada por la presencia del virus mutante i.

Modelo trivial

Consideremos el modelo trivial con únicamente un tipo de virus mutante, con los siguientes valores – que corresponden a situaciones casi reales según Nowak - para los parámetros: R = 0.1; P = 0.002; K = 0.02; U = 0.00004.

Cada paso representa 0.005 años, es decir, 200 pasos representan un año. En este ejemplo existen M = 5000 células en el volumen de sangre analizada. El valor umbral para el brote de AIDS en este caso es de 11 mutantes y el límite para el número total de células inmunes es de 500 (Nowak, 1992).

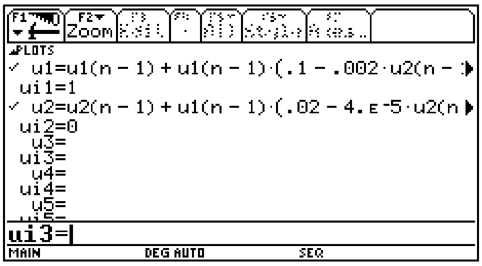
Utilizaremos la calculadora en modo “sequence” e introduciremos en la función u1(n) el número de virus de tipo 1 en el paso n del tiempo, y en u2(n) la cantidad de células resistentes de tipo 1 en el paso n del tiempo.

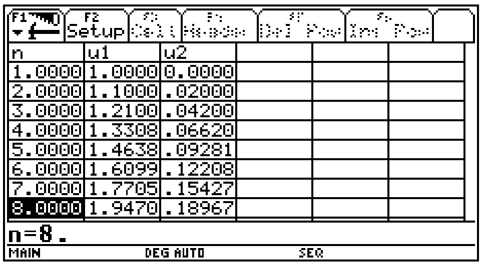
Virus (tipo 1) u1(n) = u1(n-1) + u1(n-1)*(0.1 – 0.002u2(n-1))

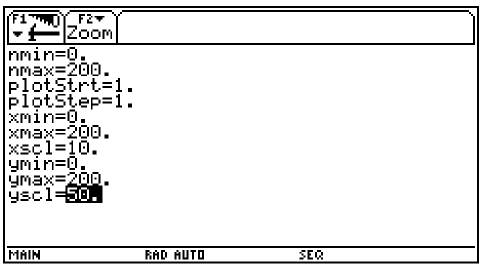
Cantidad inicial ui1 = 1

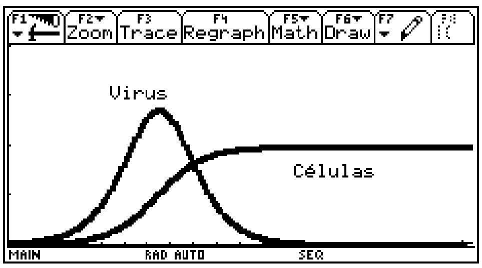
Células resistentes (tipo 1) u2(n) = u2(n-1) + u1(n-1)*(0.02 – 0.00004u2(n-1))

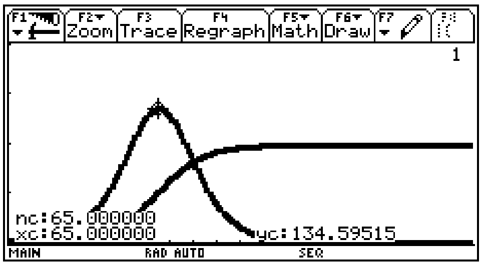
Cantidad inicial ui2 = 0

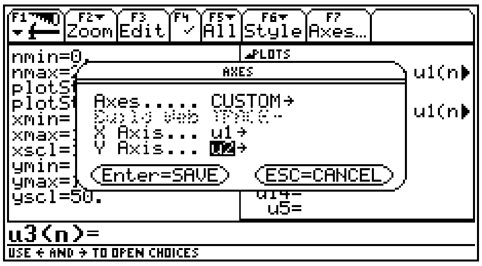


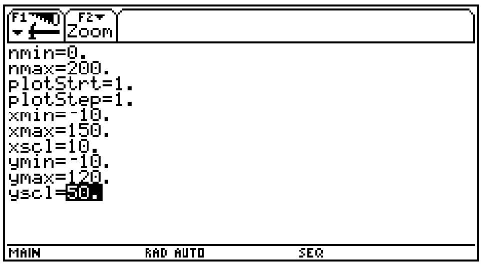


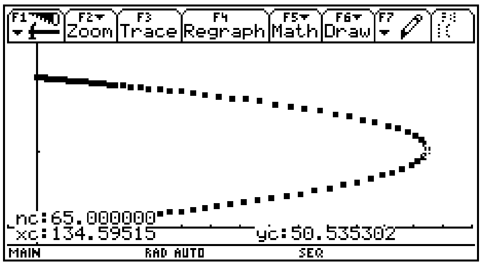










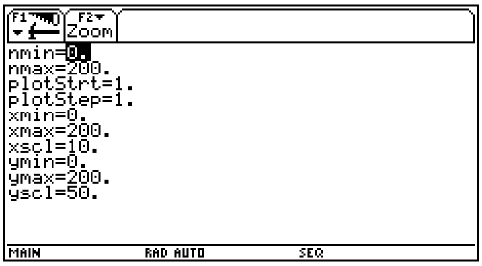


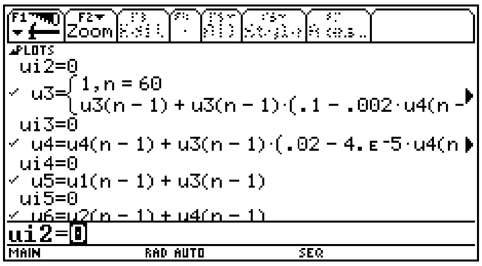
En este caso el número máximo de virus es de aproximadamente 135, en el instante correspondiente al paso 65, mientras que el número máximo de células resistentes se estabiliza en aproximadamente 99.

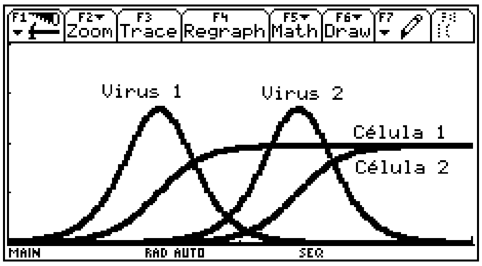
Simulación para dos mutantes

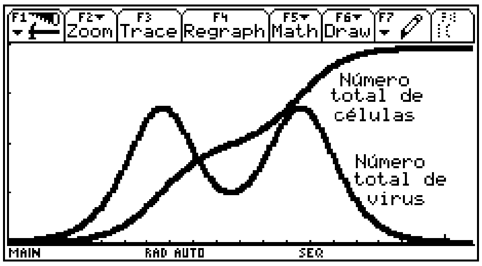
Consideraremos dos mutantes: el segundo mutante aparece 60 pasos de tiempo después del primero (aproximadamente 3.6 meses). Para los valores de los parámetros dados anteriormente tenemos:

Virus (tipo 1)	u1(n) = u1(n-1) + u1(n-1)*(0.1 – 0.002u2(n-1))
Cantidad inicial	ui1 = 1
Células resistentes (tipo 1)	u2(n) = u2(n-1) + u1(n-1)*(0.02 – 0.00004u2(n-1))
Cantidad inicial	ui2 = 0
Virus (tipo 2)	u3(n) = when(n=60,1, u3(n-1) + u3(n-1)*(0.1 – 0.002u4(n-1))
Cantidad inicial	ui3 = 0
Célula (tipo 2)	u4(n) = u4(n-1) + u3(n-1)*(0.02 – 0.00004u4(n-1))
Cantidad inicial	ui4 = 0
Total de virus	u5(n) = u1(n-1) + u3(n-1)
Cantidad inicial	ui5 = 0
Total de células	u6(n) = u2(n-1) + u4(n-1)
Cantidad inicial	ui6 = 0









En este caso, como en al anterior, no hay brote de AIDS.

Simulación para 11 mutantes

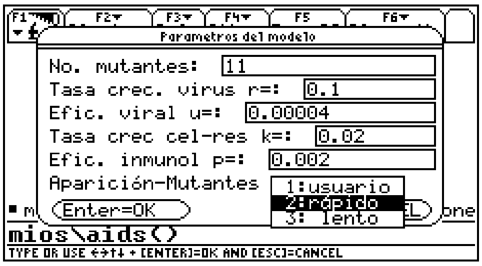
Ahora consideraremos el caso real con 11 mutantes. El tiempo de aparición de los mutantes será determinado de forma aleatoria. Para no escribir las 24 ecuaciones correspondientes a los 11 mutantes, 11 células resistentes y las sumas totales de ambos, se procede a utilizar el siguiente programa desarrollado por Josef Lecher de Amstetten, Lower Austria y adaptado por mí.

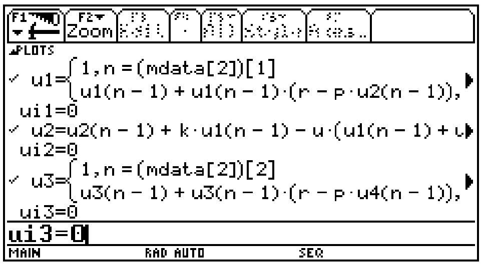
```
aids()
Prgm
Local i,mlist,tlist,asum,astr,aisum,aistr,vsum,vstr,visum,vistr,modus,aktiv,mz
"1"→mz:2→modus
"0.1"→r:"0.002"→p
"0.02"→k:"0.00004"→u
Define vhsum(mz)=Func
Local i,vhsstr
""→vhsstr:1→i
While i≤z
 If i=1 Then
  vhsstr&"u1(n-1)" →vhsstr
 Else
  vhsstr&"+u"&string(2*i-1)&"(n-1)" →vhsstr
 EndIf
 i+1→i
EndWhile
```

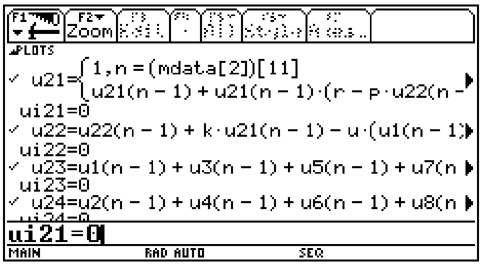
```
 vhsstr
EndFunc

Define ahsum(mz)=Func
Local i,ahsstr
""→ahsstr:1→i
While i≤z
 If i=1 Then
  ahsstr&"u2(n-1)" →ahsstr
 Else
  ahsstr&"+u"&string(2*i)&"(n-1)" →ahsstr
 EndIf
 i+1→i
EndWhile
 ahsstr
EndFunc
"Define  u"&string(i)&"(n)=when(n=(mdata[2])["&string((i+1)/2)&"],1,u"&string(i)&  "(n-1)+u"&string(i)&"(n-1)*(r-p*u"&string(i+1)&"(n-1)))" →vstr(i)
"Define  u"&string(i+1)&"(n)=u"&string(i+1)&"(n-1)+k*u"&string(i)&"(n-1)-u*("&vhsum(mz)&")*u"&string(i+1)&"(n-1)" →astr(i,mz)
"Define ui"&string(i)&"=0"→vistr(i)
"Define ui"&string(i+1)&"=0"→aistr(i)
"Define u"&string(2*mz+1)&"(n)="&vhsum(mz) →vsum(mz)
"Define u"&string(2*mz+2)&"(n)="&ahsum(mz) →asum(mz)
"Define ui"&string(2*mz+1)&"=0"→visum(mz)
"Define ui"&string(2*mz+2)&"=0"→aisum(mz)
Dialog
 Title "Parámetros del modelo"
 Request "No. mutantes",mz
 Request "Tasa crec. virus r=",r
 Request "Efic. viral u=",u
 Request "Tasa crec cel-res k=",k
 Request "Efic. inmunol p=",p
 Dropdown "Aparición-Mutantes",{"usuario","rápido"," lento"},modus
EndDlog
expr(mz) →mz
expr(r) →r:expr(u) →u
expr(k) →k:expr(p) →p
For i,1,mz
 expr(vstr(2*i-1))
 expr(vistr(2*i-1))
 expr(astr(2*i-1,mz))
 expr(aistr(2*i-1))
EndFor
expr(vsum(mz)):expr(visum(mz))
expr(asum(mz)):expr(aisum(mz))
{}→mlist:{} →tlist
```

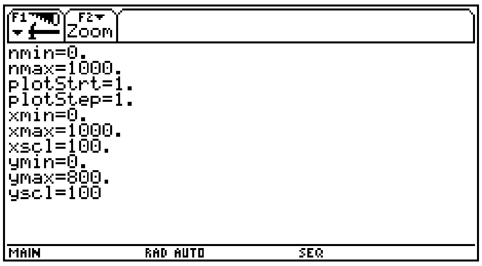
```
If modus=2 Then
 500→aktiv
EndIf
If modus=3 Then
 4000→aktiv
EndIf
For i,1,mz
augment(mlist,{expr("m"&string(i))}) →mlist
If i=1 Then
 augment(tlist,{1})→tlist
Else
 If modus=1 Then
 augment(tlist,{0})→tlist
 EndIf
 If modus=2 Then
  augment(tlist,{rand(aktiv)}) →tlist
  EndIf
EndIf
EndFor
NewData mdata,mlist,tlist
EndPrgm
```

Al ejecutar el programa anterior, se generan las 24 ecuaciones en la pantalla # de ecuaciones:



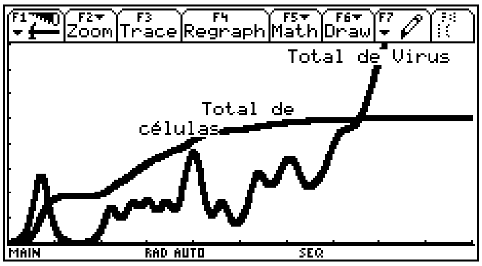


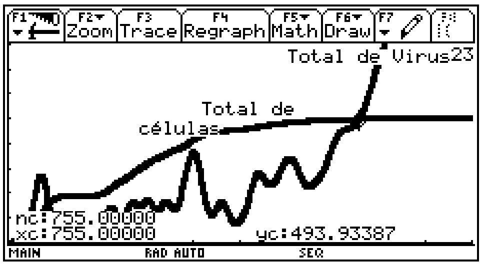


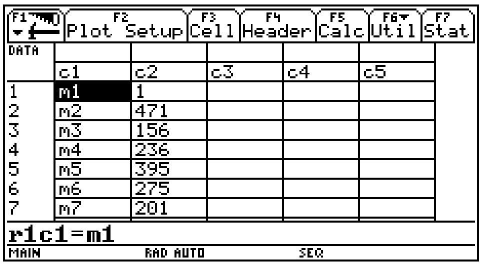


El ítem "aparición-mutantes" permite controlar el tiempo de aparición de mutantes individuales. El tiempo de aparición correspondiente a "rápido" es de 500 pasos (2.5 años) para todos los mutantes, mientras que para "lento" corresponde a 4000 pasos de tiempo (20 años). Dichos valores pueden ser fácilmente cambiados. El programa permite que el usuario indique el tiempo de aparición de los mutantes.

Seleccionaremos únicamente las ecuaciones correspondientes a u23 y u24, para graficar el número total de los virus mutantes $\sum_{k=1}^{11} u_{2k-1}(n)$ y el número total de células resistentes $\sum_{k=1}^{11} u_{2k}(n)$. Para los parámetros utilizados podemos observar un brote de AIDS después de cuatro años (aproximadamente 800 pasos).

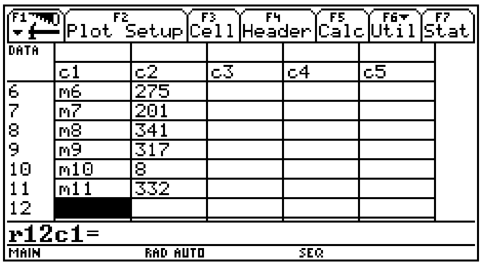






DATA	c1	c2	c3	c4	c5
1	m1	1			
2	m2	471			
3	m3	156			
4	m4	236			
5	m5	395			
6	m6	275			
7	m7	201			

r1c1=m1



DATA	c1	c2	c3	c4	c5
6	m6	275			
7	m7	201			
8	m8	341			
9	m9	317			
10	m10	8			
11	m11	332			
12					

r12c1=

Las tablas con nombre mdata – generada por el programa – contiene en la columna 2, los datos de los tiempos – pasos – de aparición los mutantes de cada uno de los 11 virus de la columna 1.

La calculadora TI92plus tardó casi 2 horas para terminar las dos gráficas correspondientes a 11 mutantes y 1000 pasos de tiempo, pero es increíble la capacidad de esta calculadora para hacer este tipo complejo de simulación.

Conclusión

La calculadora TI89/92plus es un excelente apoyo didáctico en el proceso enseñanza-aprendizaje, pues nos permite interactuar dinámicamente con múltiples representaciones de objetos matemáticos, modelar y simular situaciones que no podemos o no debemos de experimentar en un laboratorio. Existe un grande potencial en ellas para que los estudiantes puedan experimentar, conjeturar, verificar y contextualizar las matemáticas.

Bibliografía

Balacheff, N.; Kaput, J.J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. Bishop A., Clemens K.; Keytel Cl; Kilpatrick J.; Laborde C. (Eds). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht:Kluwer.

Bauldry W., Ellis W., Fiedler J., Giordano F., Judson P., Lodi E., Vitray R., West R. (1997). *Mathematics and Modeling*. Addison Wesley

De Faria, C. (1997). Aplicaciones de la calculadora TI92 al cálculo. *Memoria V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemáticas*. Liberia, Costa Rica.

De Faria E. (1998) Calculadoras gráficas, geometría y el constructivismo. *Revista Innovaciones Educativas*, año V, No. 9, EUNED, 1998.

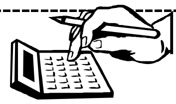
De Faria, E (2000) La tecnología como herramienta de apoyo a la generación de conocimiento. *Revista Innovaciones Educativas*, Año VII, Número 12, Editorial EUNED

Leinbach, C. (1999) Programmin for Users of the TI-89/92+. Gettysburg College, Gettysburg, PA 17325. Documento no publicado.

Moreno, L. (1999) Mediación instrumental y tecnología informática en la educación matemática. *Memorias del VII Simposio Internacional en Educación Matemática Elfriede Wenzelburger*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Nowak, M. A. (1992). Variability of HIV infections. *J. of Theoretical Biology*, 155, 1-20
Texas Instruments, (1998). TI-89 Guidebook

Waits B., Demana F. (1996). Soundoff. A computer for All Students—Revisited. *Mathematics Teacher online*, Vol. 89 No. 9.



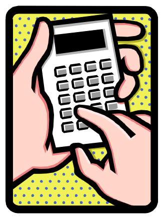
USO DE LA CALCULADORA EN EL PROCESO EDUCATIVO

Fabio Barrantes Acuña•

Cuando recibí la invitación para asistir a este congreso, me llamó la atención la siguiente expresión:

> ***"Propiciando escenarios para la reflexión sobre los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática y el papel del software educativo para apoyar el desarrollo de estos procesos"***

Sin lugar a duda, podemos afirmar que actualmente existe una gran cantidad de investigadores que están creando software con fines educativos, de manera que se logre mejorar en gran medida el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática.
Consciente de lo anterior, me quedó la duda sobre,



- ¿Dónde quedó el uso de las calculadoras en nuestra sala de clase?
- ¿Qué opinan estos investigadores sobre el uso de las calculadoras por parte de los educadores?
- ¿Es recomendable su uso? ¿Es recomendable usarla en la aplicación de exámenes?
- ¿Existe algún nivel donde ya se puede utilizar?

Debido a esto es que nace la necesidad de presentar esta ponencia , donde he querido presentar los pro y los contra sobre este tema, así como incluir alternativas didácticas sobre el mismo, de manera que se pueda analizar y usted como educador decida sobre la conveniencia del uso o no de la calculadora.
El aprendizaje del cálculo mental requiere la capacidad de desarrollar y aprender toda clase de algoritmos, lo cual implica un aspecto muy importante: su comprensión. De ahí que muchos consideran que dicha capacidad inicia desde niños, ya que una vez que el niño

• Universidad Estatal a Distancia (UNED)

aprende a calcular mentalmente, puede desarrollar por necesidad sus propios algoritmos mentales para practicar cálculos. Incluso algunos de estos cálculos en un inicio pueden resultar complejos, sin embargo si pidiéramos a los niños que escriban y expliquen los métodos utilizados podríamos comprender más fácilmente la forma en que su pensamiento procesa la información al aprender a desarrollar dichas operaciones.

En línea con este aspecto, tenemos el caso de Inglaterra, donde se considera que aprender aritmética de pequeño es incompatible con el uso de calculadoras, ya que *"nada puede ser mejor para conseguir aumentar el nivel de esta signatura que la vuelta a los métodos tradicionales; lápiz, papel y goma de borrar."*

En el caso de Colombia, se considera que las calculadoras gráficas han comenzado a ser utilizadas de manera generalizada en muchas clases de Matemática de países desarrollados, aspecto que puede ser perjudicial para su aprendizaje en el sentido de que el uso de la tecnología evita que el estudiante realice cierto tipo de actividades matemáticas y que esto implica un aprendizaje restringido de técnicas que se consideran importantes en la formación del estudiante. Por ejemplo, se menciona que algunas calculadoras producen "automáticamente" la gráfica de una función, ante lo cual el estudiante no tiene la oportunidad de aprender las técnicas que permiten producir con papel y lápiz estas gráficas, aspecto que se traduce en un efecto negativo en su conocimiento matemático.

En el XV Simposio Internacional de Computación en la Educación de México, se menciona el riesgo latente en el uso indiscriminado de las computadores en la educación, ya que al no darle un uso racional a dicha tecnología, el efecto puede ser desastroso. En la actualidad el uso de estos instrumentos ha venido extendiéndose, lo que ha dado como resultado que los estudiantes se vuelven cada vez más absurdamente dependientes y llegan a utilizar las calculadoras para hacer operaciones que para muchos de nosotros serían claramente elementales.

Como consecuencia de dicha situación, se menciona la aparición de una "confianza absoluta", no justificable desde ningún punto de vista, y por lo

mismo preocupante, que los alumnos suelen tener en el resultado obtenido mediante el uso de instrumentos de cálculo. No acostumbran hacer ningún esfuerzo por comprobar sus resultados, ni siquiera desde el punto de vista meramente lógico.

Todos estos razonamientos sobre el tema, nos llevan a una misma conclusión: antes de tener acceso a instrumentos de cálculo, los alumnos deben saber hacer las operaciones matemáticas, por lo menos las fundamentales, a mano, es decir, deben ser capaces de enfrentar esos pequeños retos sin instrumentos de cálculo diferentes al propio cerebro y en caso de propiciar que esto no sea así, se están formando personas con un altísimo grado de lo que puede llamarse analfabetismo matemático, con todas las desventajas y riesgos que ello implica.[1]

Como oposición de lo anterior, otros consideran que ciertos cálculos deben limitarse a la calculadora, ya que no se detecta de inmediato la importancia de la capacitación excesiva en operaciones como divisiones grandes o el cálculo de la raíz cuadrada. Es decir, es vital que se conozcan y desarrollen los aspectos básicos que permitan la comprensión de dichos algoritmos, sin embargo, en determinado momento lo realmente importante es enseñar a los estudiantes la forma de realizar dichas operaciones a partir de una calculadora.

Un profesor de California remarcó que “las viejas generaciones poseen un sentido instintivo del número que les permite olfatear rápidamente una respuesta disparatada, esta es una capacidad de la que carecen las jóvenes generaciones”. Si esto es así, debe ser porque “las jóvenes generaciones” no han aprendido a ser buenos calculadores mentales y utilizar esta habilidad para “olfatear rápidamente una respuesta disparatada”.

Lo antes expuesto nos permite definir claramente visiones totalmente opuestas en cuanto al uso de las calculadoras, pero vale la pena hacer referencia a otros criterios que también nos permiten adoptar una enfoque sobre este tema.

Muchas calculadoras con las más diversas características, son parte de una tecnología

[1] XV Simp[illegible]acional de Computación en la Educación de México

reciente que sin lugar a dudas, será involucrada cada vez más en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Incluso estudios han demostrado que la utilización de esta tecnología tiene efectos positivos en la formación matemática del estudiante, sin embargo, como educadores tenemos la responsabilidad de conocer todas las alternativas que llevan a un mejor proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Dicha responsabilidad nos obliga a analizar y definir cuáles son los elementos que pueden implicar mejoras en la formación matemática del estudiante, así como el papel que nuestra orientación tenga.

Para entender dicha orientación, podemos ubicarnos en el plano nacional, tomando como punto de referencia las pruebas nacionales a las que son sometidos nuestros alumnos. Para Bachillerato encontramos las pruebas diurnas y de madurez, las cuales a pesar de guiarse por el mismo temario unificado, son radicalmente diferentes.

En cuanto a la estructura de preguntas se refiere, en madurez se ha buscado elaborar itemes sobre cada tema, en los cuales el estudiante, a pesar de tener acceso a una calculadora científica, NO puede utilizar este recurso para determinar la respuesta del ejercicio, sin embargo los estudiantes que presentan la prueba diurna si llegan a darle un mayor uso, en vista del tipo de ejercicio y la orientación que el educador la brinda al mismo.

Ante esto, es vital que nos preguntemos cuál es nuestro papel como educadores y qué orientación y enseñanza le brindamos a nuestros alumnos en cuanto al uso de las calculadoras, de manera que adoptemos una posición a partir de un criterio sustentado en el análisis conjunto de la información que se nos brinda, además de nuestra experiencia en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Efectivamente, parece ser que la mayoría de los investigadores coinciden en que el uso de una calculadora en educación primaria es inadmisible y la mayor parte de maestros están de acuerdo en que para este nivel solamente se debe trabajar con los métodos tradicionales, pues argumentan que nosotros fuimos educados y así funcionó, entonces: Porqué no continuar su uso??

Sin embargo se debe tomar en cuenta que de todas las generaciones siempre encontramos compañeros que evidentemente presentan el problema mencionado anteriormente del denominado “analfabetismo matemático” y creo que el verdadero cuestionamiento es en busca de una justificación lógica asociada a las características que definen el proceso de enseñanza.

Es común escuchar en la actualidad que nuestros alumnos argumenten sobre el uso que le darán a lo que aprenden en el campo de las Matemáticas, ya que consideran que lo que están practicando **no** es una destreza útil para la vida, lo anterior en vista de que en nuestro sociedad actual, cualquier cálculo aritmético se hace casi en su totalidad usando calculadores.

En mis años de profesor, he notado que una pregunta “muy difícil” que se le puede dar a un estudiante de último año de la Educación diversificada es:

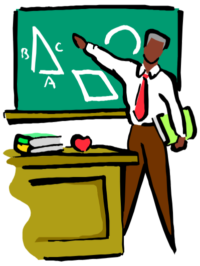
“Efectué la siguiente operación sin utilizar calculadora $121,27 \div 3,7$ “

Ahora, esta misma respuesta para un niño de sexto grado de primaria, no representa un gran reto, ante lo cual nos debemos preguntar: ¿Qué sucedió durante los cuatro años de educación secundaria, con el algoritmo básico de la división de números?

Algunos argumentan que el uso masivo e indiscriminado de las calculadoras en nuestras lecciones, no solo añade, sino que también resta, y lo que es peor, no sabemos, que es lo que resta y en que proporción.

Qué profesor no ha tenido la experiencia de solicitarle a un alumno que determine si un número dado es par y quedarnos perplejos al ver que en vez de mirar si el ultimo dígito es 0,2,4,6,8 lo que hace es que con su “mágica” calculadora divide el número por 2 y observa la pantalla para verificar si el número es entero. Es un hecho que es nuestra responsabilidad saber qué enseñamos y para qué lo enseñamos pues si no nos fijamos una meta podríamos perder en forma ineludible conocimientos que para nuestros alumnos son sutiles, pero que para nuestra sociedad son de un valor incalculable.

Debemos tomar en cuenta que la calculadora en el salón de clase es actualmente un instrumento valiosísimo que de cierta manera elimina los cálculos lentos y complicados, sin embargo quizá lo importante sea añadir a estos ejercicios aspectos que requieran algo más que el uso diestro de una calculadora. Es necesario buscar el desarrollo de conocimientos que van más allá de un cálculo rápido, debemos crear situaciones con un nivel de dificultad mayor, permitiendo así que nuestros alumnos resuelvan problemas en todo el sentido de la palabra; y para lograr esto como educadores debemos desarrollar al máximo la creatividad de nuestra imaginación.



El uso de la calculadora nos abre nuevos horizontes, siempre y cuando se trabaje con una mentalidad que efectivamente lo permita, creo que los resultados del proceso pueden resultar altamente valiosos y satisfactorios tanto para los profesores como para los estudiantes. Está en nosotros darle la orientación y el uso adecuados.

Seguidamente se presentan dos actividades educativas que pretenden fomentar el uso y despertar el interés de los estudiantes en ejercicios que requieren cierta destreza en la resolución de operaciones a través de la calculadora. En dichas actividades se relaciona el idioma español con operaciones matemáticas y se busca que, se determinen ciertas palabras a partir de los resultados de la calculadora, con las cuales se deberán completar un crucigrama y un cuento.

El diccionario también es un instrumento que se puede utilizar, ya sea para verificar la existencia de alguna palabra de uso no muy común o para completar el crucigrama con las definiciones que se brindan en cada caso.

En general, el objetivo fundamental de las actividades presentadas es el de mejorar las destrezas requeridas para el uso adecuado de la calculadora, entender el uso correcto del orden de las operaciones y finalmente, ampliar y mejorar el vocabulario.

Finalmente, considero importante destacar que estas actividades son producto de mi invención, aspecto que me parece señala que el desarrollo de nuestra creatividad nos puede ayudar en la tarea que como educadores tenemos en nuestras manos, es decir, buscar la motivación de nuestros estudiantes a partir de los métodos que consideremos apropiados y que generen resultados efectivos.

CRUCI-CALCULADORA

MATERIALES:
Una calculadora y el material que se entregue.

OBJETIVO:
Lograr que el alumno use una calculadora adecuadamente utilizando sus conocimientos sobre el uso correcto de los paréntesis en una expresión matemática dada.

INSTRUCCIONES:
En el DESARROLLO se presentan dos columnas que indican respectivamente el orden vertical y horizontal de la respuesta. Para cada una de éstas respuestas se le da una expresión matemática, que al ser resuelta en su calculadora, le dará la respuesta, al mirarla en forma invertida. Así por ejemplo: si usted representar en su calculadora 0.1734, invirtiendo la calculadora podrá leerse:

h E L L O

Encuentre el correspondiente resultado y coloque este en el lugar apropiado en el crucigrama.

DESARROLLO

HORIZONTAL

1) Acción de besar
   $(-0.0755+0.21)\cdot\sqrt[3]{64}$

2) Estuche de piel u otro material que llevan las mujeres en donde guardan los objetos de uso personal. (PLURAL)

$[\,55520 + 4181 \cdot 4] \cdot 7$

7) Masculino de lirio

$20 \cdot 20 + 10 \cdot 10 + 17$

8) Aplícase a las personas muy gordas

$(63172{,}5) \cdot 2^3$

10) Aficionado a comer golosinas (PLURAL)

$$(2200)^2 + 210709 - \left[6\left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right) - 2\right]$$

11) Matemático inglés, realizó estudios sobre álgebra

$$514 \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{3}} \cdot 36^{\frac{1}{2}}$$

12) Afirmación

$$4^{\frac{3}{2}} + 343^{\frac{1}{3}}$$

13) Aplícase a la pintura hecha con colores disueltos en aceite secante (PLURAL)

$$75555 \cdot \frac{2}{3}$$

14) De Libia

$$(-4)^0 - 0.8183$$

15) En el fútbol, suerte de entrar un equipo el balón en la portería contraria

$$(25)^2 + (9)^2 + \frac{3^5}{3^4}$$

16) Artículo

$$\sqrt{64^3} - \sqrt[3]{125}$$

18) Alabanza

$$(2240)^2 + 1473$$

19) Parte del mar Mediterráneo

$$0.131+\frac{1}{5}+\frac{3}{50}+0.002$$

21) Agua transformada en cuerpo sólido a causa de un descenso suficiente de temperatura

$$(\sqrt{5})^{0}-0,16116\cdot\frac{5}{3}$$

VERTICAL

1) Se usa en manuscritos o impresos para indicar repetición

$$(-74)\left[2-(-3)^{2}\right]$$

2) Panecillo de harina, amasado con leche, huevos, etc.(PLURAL)

$$2\frac{2}{5}\bullet 3+507700{,}8$$

3) Seglar, laico, que no tiene órdenes clericales

$$\frac{3{,}748}{4}$$

4) Que no tiene compañía, aislado (PLURAL)

$$\sqrt{2^{4}\cdot 13^{4}}\cdot 5^{2}\cdot 3+5$$

5) Quinta nota de la escala musical

$$[5\cdot 9+2]\cdot 15$$

6) Que se dedica al estudio de la Biología

$(-7)^{0}$ - 0,092982

9) Que no ha recibido ninguna lesión (PLURAL)

$$842285\cdot\frac{3}{5}$$

10) Bolsa de tela o de goma llena de un gas menos denso que el aire

$$\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3\div\sqrt{5}\right)-3{,}1921$$

11) Palito torneado que se pone derecho en el suelo

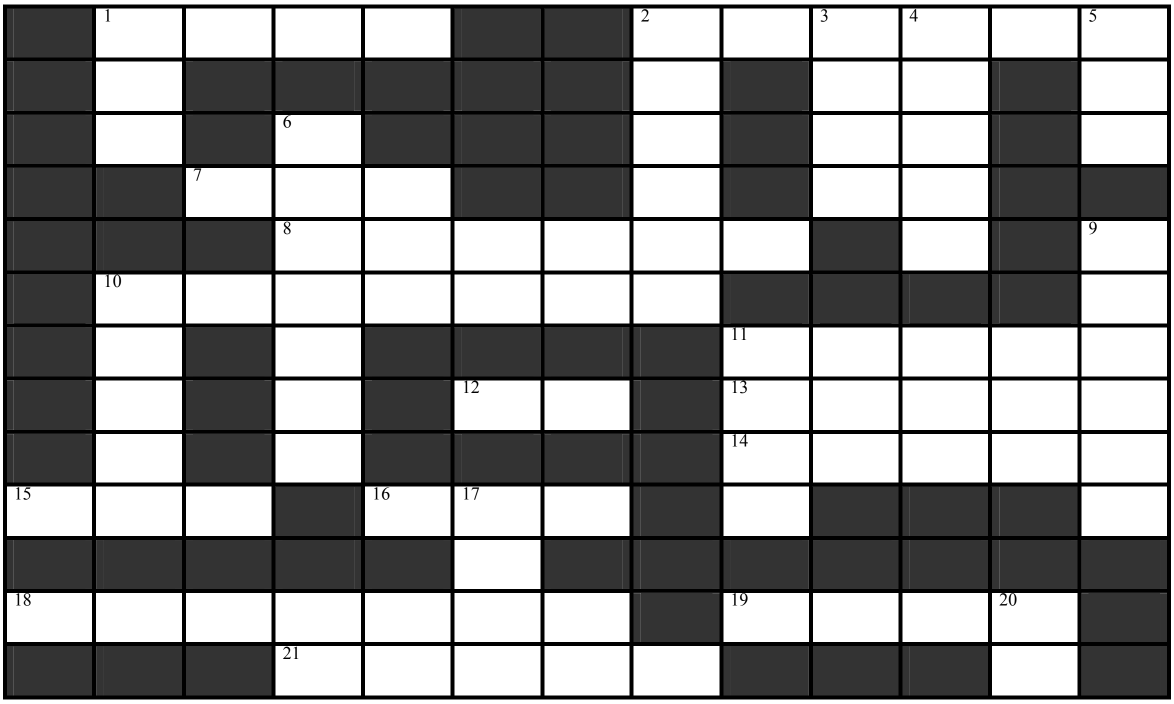
$$\left(\frac{83}{500}\cdot\frac{27}{9}\right)+0.21$$

17) Instrumento musical de viento

$$\left[\sqrt[3]{512}\cdot\sqrt{121}\cdot 385\right]\div\left[15-4\right]$$

20) Símbolo químico del OSMIO

$$\frac{2^2\cdot 5^4}{2\cdot 5^2}$$



<u>Un cuento muy calculado</u>

Materiales: Una calculadora y el material que se entregue.

Objetivo: Lograr que el estudiante resuelve operaciones matemáticas mediante el uso de una calculadora, utilizando para ello la prioridad de las operaciones.

<u>Instrucciones</u>

1. En el desarrollo se le presentan 34 operaciones, debe resolver cada una de ellas utilizando una calculadora.

2 Una vez resuelta cada operación, su calculadora, le dará la respuesta, al mirarla en forma invertida. Así por ejemplo: si usted representar en su calculadora 0.1734, invirtiendo la calculadora podrá leerse:

h E L L O

3 Si la palabra que aparece en la pantalla no entiende su significado puede utilizar un diccionario.

4 Compruebe al final que el cuento este completo y que el mismo tenga sentido

Desarrollo

1. $[15 \cdot 10 + 17] \cdot 5$
2. $\left(8^3 + \frac{15 \cdot 2}{3} + 13\right)\left(9^2 \cdot 2 + 7^2 \cdot 2 - 5^3 \cdot 2\right)$
3. $\frac{7}{4} \cdot 0{,}0262 \cdot 5 \cdot \frac{12}{7}$
4. $(1{,}29574)\left(\sqrt[3]{0{,}042875}\right)\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)$
5. $87{,}254 - (47{,}8726 + 38{,}65)$
6. $\frac{675 + 12(2 \cdot 3 + 5)}{10^5 \div 10^2}$
7. $5 \cdot \left[\frac{5}{4} \cdot 428 \div 5 + 84 \div 7 \cdot 5\right]$
8. $15\left(\frac{104841 \cdot 2}{99}\right)$
9. $\left(5^4 - 7^2 \cdot 10\right) + \left(624 - 103 - 439\right)$

10. $\dfrac{5^3-5^2}{5}+3+4^3-4^2+2$

11. $\dfrac{7^5-7^4}{2}+111$

12. $(0{,}4035)\left[\dfrac{12}{5}-\left(\dfrac{3}{7}-\dfrac{1}{35}\right)\right]$

13. Resultado de $\left[\dfrac{27}{11}+\dfrac{71}{2}\right]\cdot 22$

14. Resultado en decimal de $\dfrac{(2500)^{\frac{1}{2}}}{100}+\dfrac{17}{10.000}$

15. $\dfrac{[2+3-7+8]^0}{5^2}+0{,}1305$

16. $0{,}127+0{,}07+0{,}0518-0{,}07062$

17. $7{,}7\times10^{-1}+3{,}5\times10^{-3}$

18. $(0{,}0377+0{,}105)\cdot 32^{\frac{2}{5}}$

19. $15\cdot\left(\dfrac{2\cdot3\cdot4\cdot5-1}{2^2\cdot5^4}\right)$

20. $\left(0{,}6^2-\dfrac{2^3}{5^3}-0{,}3^3\right)\left(\sqrt[5]{243}\right)$

21. $\dfrac{4}{5}\cdot(1{,}340625)\cdot\dfrac{2}{3}$

22. $125^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{19881\times10^{-6}}$

23. $\dfrac{2\cdot3\cdot4\cdot5}{\sqrt{36}}+\dfrac{\sqrt{5184}}{\sqrt{144}}+2^2\cdot3\cdot5^2+\sqrt{121}$

24. $10^{-1}+7^2\cdot10^{-3}+3^4\cdot10^{-4}+(2^2+3^2+5^2)\cdot10^{-2}$

25. $(-0{,}0755+0{,}21)\cdot\sqrt[3]{64}$

26. $\left(3{,}25\times10^{-1}\right)+\left(482\times10^{-3}\right)$

27. $2\cdot(2^2\cdot5^3+5)\cdot5$

28. $\left[7^2\cdot\sqrt[4]{10000}+5^2\cdot\sqrt[4]{6561}\right]\div10^3$

29. $\frac{1}{5}\bullet1{,}6+\frac{4}{3}\bullet0{,}36525$

30. $\left[5^2\cdot2^4+\sqrt{90000}+2^0\cdot2\cdot7^2\right]\cdot10^{-3}$

31. Resultado en notación decimal de $\frac{4}{5}+\frac{7}{1000}$

32. $12+17\cdot18+2\cdot3^0+1440\div8+205$

33. $7+7^2+7^3+2^2\cdot3^3$

34. $5\cdot10^6+1{,}9\cdot10^4+7{,}3\cdot10^1$

35. $2^2\bullet5^2\bullet7+15\bullet9$

36. $\frac{\sqrt[3]{125}}{10^{-2}}+\sqrt[3]{4913}$

Había una vez un príncipe llamado (1)_________, que durante uno de sus viajes llegó a un pueblo llamado (2)______ cerca del Mar (3)______ . Dicho pueblo había sido hechizado por un malvado (4) ____________, que en una de sus investigaciones malignas cubrió el pueblo de (5) _____y se convirtió en un (6) _______ para poder acechar a los habitantes.

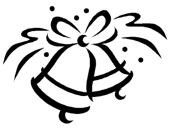
(7) _____ conoció al rey (8) _______ y a su hermosa hija (9) ________, de quien se enamoró perdidamente. Cuando le pidió al rey su mano, (10)______ respondió que antes de que se efectuara el matrimonio debería demostrar su valentía liberando al pueblo de la (11) ______ provocada por el (12) _________.

(13) ______respondió que a pesar de que era un trabajo (14) ________, aceptaría por el amor que sentía por la princesa, entonces el rey desde su (15) ________ solicitó se anotara en el (16) _______________ con su (17) ___________ real la tarea encomendada al príncipe.

El príncipe solicitó la ayuda del hada del pueblo, quien le entregó un (18) __________ con un libro que contenía un (19) ___________ mágico y el conjuro necesario para deshacer el hechizo y le dijo: Busca al (20) ________ que se oculta en un (21) __________, y asegúrate que esté (22) ______, luego (23) _____estas palabras que te he dado. Si sigues mis instrucciones con valentía, saldrás (24) _________.

El príncipe le dio un (25) _________ a su amada y con gran valentía fue en busca del malvado(26)________. Durante su recorrido tuvo que atravesar el bosque, donde se enfrentó con feroces (27) ______ que protegían el (28) ________ y finalmente encontró al (29) _______ quien dormía. Tomó el (30) _________ mágico, rápidamente lo amarró y leyó las palabras del libro. Al terminar, el (31) _________ y el hechizo desaparecieron.

Cuando el príncipe volvió al pueblo, el (32) _______ brillaba de nuevo y (33) ________ habitantes del pueblo lo llenaron de (34) __________. El rey entregó a su hija en matrimonio, (35) _____ y (36) _______ fueron felices para siempre.



TALLERES

Analizador de funciones

Luis Hernández S; Cristian Quesada F.•

Resumen

Actualmente, sabemos que en el estudio del tema de funciones, se requiere representar dichas funciones gráficamente, para su mejor comprensión. No todos los docentes poseen habilidades de dibujo por lo que en ocasiones los gráficos no son claros ni precisos. Además, se pierde mucho tiempo en la realización de estos.

El Analizador de funciones surge como proyecto final de dos estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora del Instituto Tecnológico de Costa Rica para el curso de Taller de Software Didáctico, bajo la supervisión del profesor Luis Acuña Prado.

Analizador de funciones es una aplicación completamente ejecutable desarrollada en Visual Basic 6.0. Permite mejorar el proceso de enseñanza- aprendizaje del tema de funciones, logrando una mayor comprensión de éstas, al elaborar gráficas de funciones y obtener información sobre ellas con más precisión y claridad, en un tiempo menor de lo usual.

Descripción de la aplicación:

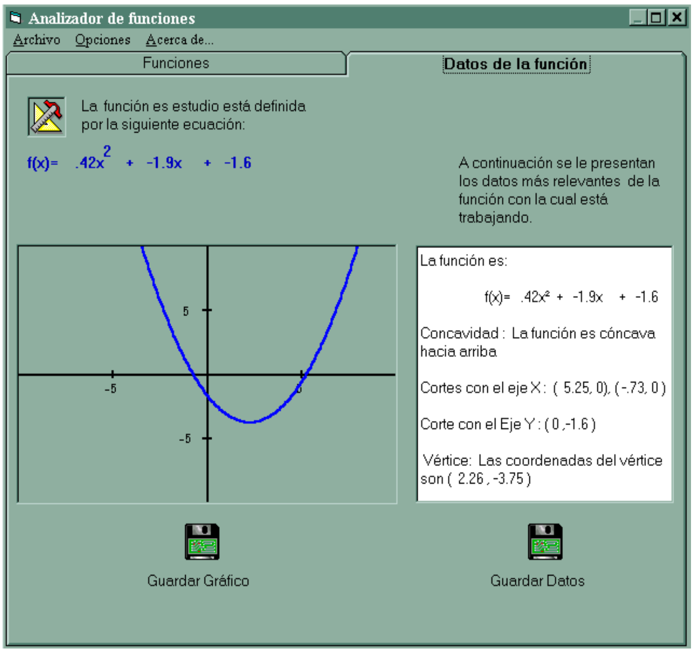
Este programa permite manipular gráficas de funciones (con el fin de observar cómo varía la función graficada, cambiando libremente el valor de sus parámetros por medio de "deslizadores"; la escala del gráfico, entre otros). El Analizador de funciones además de graficar los diferentes tipos de funciones que se estudian en secundaria (lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas), permite al usuario tener acceso a los datos más relevantes de la función (cortes con los ejes coordenados, monotonía, concavidad, etc.). Estos datos pueden ser almacenados en archivos de texto, así como las gráficas pueden ser guardadas como archivos de imagen.

Interfaz con el usuario:

El programa consta básicamente de un formulario principal, en el cual el usuario seleccionará el tipo de función con el cual trabajará. Para cada tipo de función el programa le mostrará una gráfica de una función preestablecida (del tipo seleccionado)

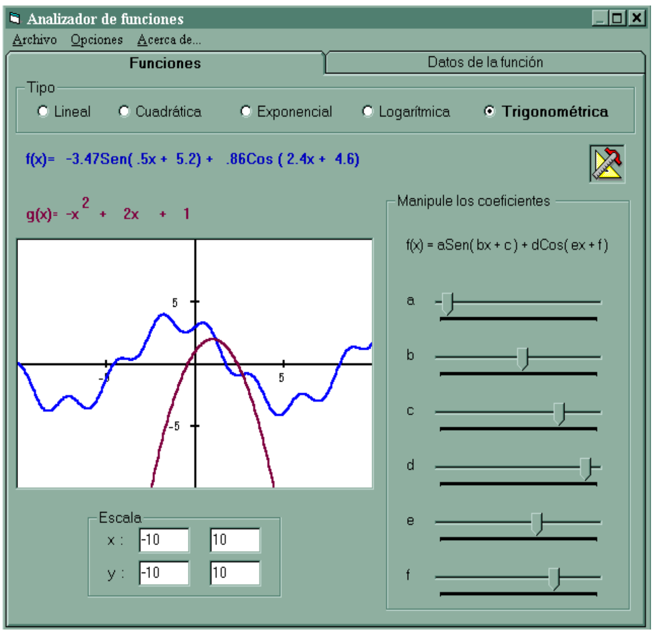
• Estudiantes de la Escuela de Matemática. Instituto Tecnológico de Costa Rica

El programa no le solicitará datos al usuario sobre dicha función, sino más bien le permitirá manipular libremente los valores de los parámetros cambiando la función mediante el uso de "deslizadores". El usuario podrá tener acceso a los datos de la función sobre la cual está trabajando, para lo cual se le presenta en el mismo formulario la gráfica y un cuadro de texto con dichos datos (haciendo uso de "pestañas").

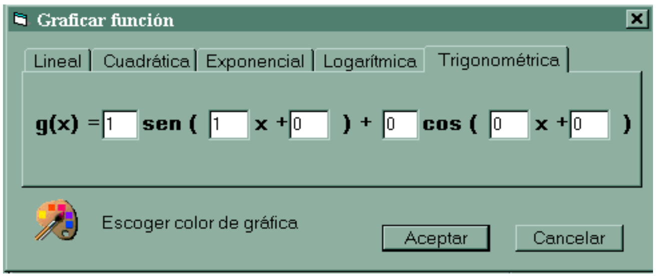


También se le presenta un menú, en el cual el usuario podrá realizar diferentes tareas, tales como:

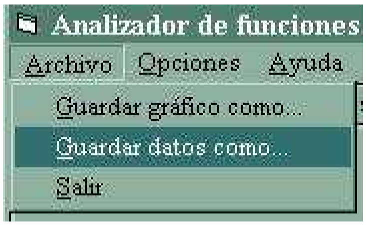
- *graficar una función específica*: Grafica una función de algunos de los tipos ya descritos (para lo cual se le presenta una ventana con "pestañas" para que escoja el tipo de función e ingrese los valores numéricos de la función que desea graficar)



- *borrar función:* borra la función específica antes graficada (si la hay)



En el menú estarán también presentes las opciones de *Guardar gráfico como...*, *Guardar datos como...*, utilizando los *diálogos comunes* de la computadora.



Conclusión:

Este software puede contribuir de manera importante en el aprendizaje y capacitación de los estudiantes en el tema de funciones, específicamente en lo relacionado a su gráfica, como: monotonía, concavidad, traslaciones horizontales y verticales, cortes con los ejes de coordenadas, etc.

El máximo desempeño de este programa se alcanzará cuando pueda ser implementado en los colegios del país, colaborando activamente con el profesor y con los estudiantes.

Bibliografía:

Villón B., Máximo. *Desarrollo de aplicaciones con Visual Basic*. ITCR, Cartago Costa Rica, 1999.

Acuña P., Luis. *Notas del curso: Programación II*, ITCR. I Semestre, 1999.

Hernández D., Fabio. *Notas del curso: Matemática II*, ITCR. II Semestre, 1998.

APLICACIONES DEL PROGRAMA *EL GEÓMETRA* EN LA ENSEÑANZA DEL TEMA FUNCIONES EN SECUNDARIA

Grettel Gutiérrez Ruiz •, Margot Martínez Rodríguez •

Objetivos:

Principalmente, dar a conocer algunas de las sesiones elaboradas para la utilización del programa *El Geómetra* en la enseñanza de funciones en secundaria. Los participantes del taller podrán manipular diferentes funciones, para observar el comportamiento de sus gráficas.
Además, es de importancia para esta investigación conocer las expectativas y reacciones de otros colegas, frente a una experiencia como esta, así como las posibles ventajas que traería a un participante la experiencia previa en el uso del programa.

Resumen

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática puede ser apoyado con las computadoras de diversas maneras. El programa *El Geómetra (Geometer's Sketchpad)* favorece la creación de ambientes de aprendizaje que orienten la enseñanza de la matemática mediante la exploración, la creación de conjeturas, el descubrimiento, la comprobación y la comunicación de resultados., y aunque fue desarrollado para ser usado en Geometría, sus aplicaciones pueden extenderse al campo de las funciones, dado que es posible construir gráficos interactivos. Algunas sesiones se han diseñado para el descubrimiento de conceptos relativos al tema, mientras que otras servirían para verificar teoría, pues la manipulación de gráficos ayudará a darle sentido a contenidos abstractos.

• Liceo de Atenas
• Escuela de Matemáticas. Instituto Tecnológico de Costa Rica

Aprendamos matemática con la hoja electrónica EXCEL

Luis G. Meza Cascante. [•]

En este taller tendremos la opotunidad de conocer dos aplicaciones para la enseñanza de la matemática programadas en Excel: *Operaciones con números enteros y Ecuaciones lineales en una incógnita.*

También las y los participantes podrán explorar otras aplicaciones didácticas en el campo de la matemática apoyadas con esta hoja electrónica, especialmente en el tema de funciones.

[•] Escuela de Matemáticas, Instituto Tecnológico de Costa Rica

Conjeturas y Demostración con Geometría Dinámica

Susana Victoria Barrera
Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM
México
suvictor@servidor.unam.mx
Taller. Nivel medio superior

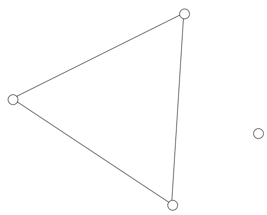
Resumen

Los programas de geometría dinámica le han dado al estudio de la geometría una forma nueva de tratar los teoremas, axiomas y demostraciones. Las demostraciones siempre caracterizaron los cursos de geometría, y aún siguen formando parte del currículo, pero el problema real radica en como enseñar estos temas tan teóricos de una manera más accesible. La geometría dinámica posibilita la experimentación y exploración de propiedades, así como la elaboración de resultados válidos y su verificación.
Las actividades que se realizaran en el taller son parte de una propuesta para el estudio de la geometría con el objetivo de plantear conjeturas y pensar en la demostración de una forma diferente.
Se usará el paquete de geometría dinámica: Geometer's Sketchpad

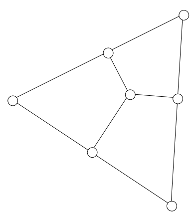
Palabras Claves: Conjeturas, Geometría Dinámica

Introducción

Actividad 1 Dado un triángulo equilátero cuyos lados representan playas. Determina el punto en donde un pescador debe ubicar su casa si tiene que visitar las tres playas y quiere que la suma de las distancias de las playas a su casa sea mínima ya que requiere ir a las tres playas en un mismo día.

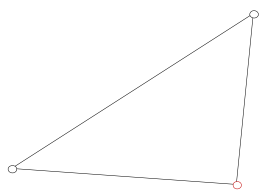


- Traza el punto en donde creas que se debe localizar la casa.
- Si el punto estuviese dentro del triángulo ¿cómo es la suma de las distancias del punto a cada lado del triángulo? Compara la suma de las distancias para un punto fuera del triángulo.



- Explica lo que sucede con la suma.

Actividad 2



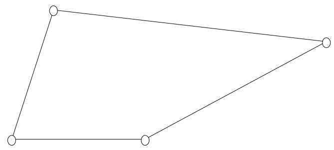
Identifica la ubicación de la casa si el triángulo no es equilátero.

Explica la solución.

Actividad 3

¿Cuánto suman los ángulos internos de un cuadrilátero cualquiera?

Explica porque

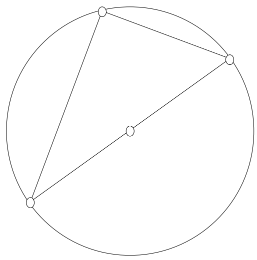


Con el paquete valida el resultado.

Actividad 4

Traza una circunferencia y un diámetro, construye un punto sobre la circunferencia.

¿Qué tipo de triángulo se obtiene?



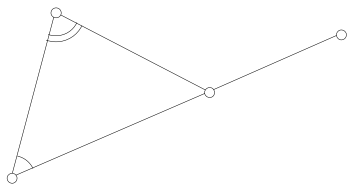
Explica porque.

Actividad 5

Compara un ángulo externo con la suma de los dos opuestos a él, ¿cómo es?

¿Depende del tipo de triángulo?

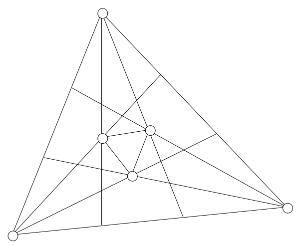
Sucede para los otros ángulos externos



Escribe el resultado que se cumple y explica porque se cumple.

Actividad 6

- Traza las trisectices de los tres ángulos de un triángulo cualquiera.
- Traza el triángulo formado por las intersecciones de trisectices contiguas. ¿Qué tipo de triángulo se forma?



Bibliografía

Clemens, O´Daffer y Cooney *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* Addison Wesley . 1989.

Deledicq A.y col.. *Mathématiques 3º.* CEDIC 1984

Eiller R. Y col. *Math et calcul.*Classiques Hachete. 1981.

Garcia Arenas J. Y C. Bertran I. *Geometría y Experiencias. Editorial Alhambra. 1995.*

Jacobs Harold R. *Geometry*. W.H Freeman and Company. 1974

Jackiw Nicholas. *El geometra* Guia del Usuario y Manual de Consulta. Key Curriculum Press.1997.

Monge M. Y col.. *Mathématiques.* Librairie Classique Eugène Belin, 1980.

Villiers Michael D de. *Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad.* Key Curriculum Press 1999.

TALLER SOBRE CONSTRUCCIÓN DE CUERPOS SÓLIDOS UTILIZANDO MATERIAL CONCRETO

Adriana Vega Mesén•

Introducción.

El presente taller presenta una forma creativa para que los alumnos descubran por ellos mismos la manera de crear figuras del tema de estereometría, el cual ha sido desarrollado con anticipación, en clase; donde se han mostrado los conceptos básicos y el desarrollo de las formulas para mostrar el área, el perímetro y el volumen de los cuerpos sólidos. Además de que los alumnos sean capaces de identificar cada una de las partes de un cuerpo sólido.

También se desea complementar el aprendizaje de la teoría mostrado en clase con una actividad recreativa e ilustrativa a la vez.

Además se busca que los alumnos descubran la manera de desarrollar sus habilidades motoras e intelectuales en la realización de las figuras de los cuerpos sólidos.

Materiales.

- Cartulina.
- Lápiz
- Tijeras.
- Regla
- Goma
- Compás

.

Desarrollo.

El taller de las figuras de cuerpos sólidos consiste en una cadena de pasos a seguir donde se busca que los y las estudiantes vayan descubriendo por ellos mismos los componentes de un cuerpo sólido y así obtendrán una figura la cual puede ayudar significativamente a la comprensión de los temas de estereometría.

Tras la adquisición de unas figuras después de haber terminado de ejecutar los pasos necesarios las y los alumnos podrán poner en practica los conocimientos acerca de los cuerpos sólidos estudiados anteriormente en clase como por ejemplo: su area, su volumen, entre otros.

• Estudiante de la Escuela de Matemática. Instituto Tecnológico de Costa Rica

Además se obtendrá la realización de una clase creativa y a la vez estimulante ya que requiere de ciertas habilidades por parte de las y los alumnos que casi nunca ponen en practica como por ejemplo la parte motora.

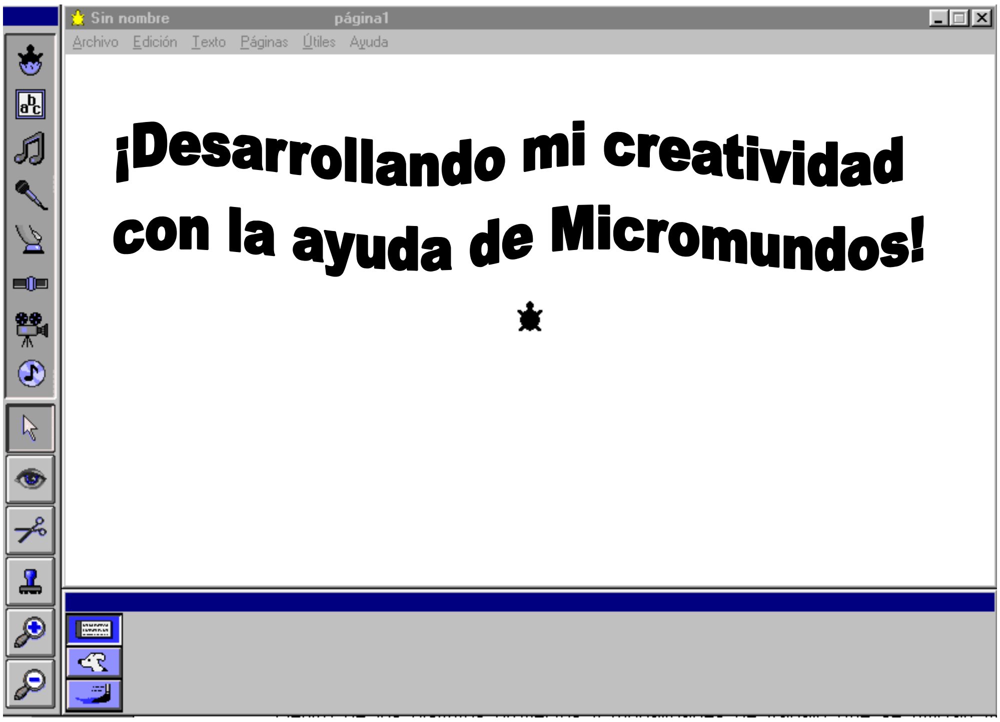
Conclusión.

Espero que sea puesto en practica en clase y que las y los alumnos puedan descubrir y palpar todas las partes de los cuerpos sólidos, y a la vez utilizar su conocimiento visual para ponerlo en practica a la hora de estudiar la teoría sobre sus conceptos.

El aprendizaje heurístico es muy importante en este tipo de actividades por lo que el profesor a la hora de utilizarlo en la clase debe dar cabida a que la y el alumno aprenda por el mismo y no sólo por lo que el profesor le pueda enseñar en una clase magistral.

Requerimientos:

- Una cartulina satinada (para cada día del taller)
- Tijeras
- Goma
- Regla
- Lápiz y Borrador
- Compás



Karolina Piedra Segura[•]

Resumen:

Los educadores debemos estar a la vanguardia en el uso de las innovaciones tecnológicas que se presentan en la actualidad, por esto, hay que estar en constante capacitación para no quedarnos atrás y para poder compartir todos estos cambios con nuestros estudiantes.

Sin duda alguna, es necesario destacar el trabajo que actualmente se esta realizando en las escuelas, específicamente, en los laboratorios de Informática, pues los niños tienen la oportunidad de construir su aprendizaje al mismo tiempo que conocen diferentes herramientas tecnológicas, permitiéndoles esto, agilizar su capacidad de pensamiento y razonamiento.

Dentro de los distintos proyectos y modalidades de trabajo que se utilizan y/o desarrollan en los laboratorios de Informática (Robótica, Revista Virtual, Niños Mediadores, etc.) resalta el trabajo con Micromundos, quien no solo es la plataforma base de ésta innovación,

---

[•] Escuela Ricardo Jiménez Oreamuno, Tejar, Cartago

sino, que es con la que se trabaja en la mayoría de las escuelas de nuestro territorio nacional.

Es importante rescatar que Micromundos es un ambiente de aprendizaje, basado en el lenguaje de programación Logo, en el cual se pueden desarrollar proyectos que apoyen cualquier materia del currículo, y que permite al estudiante partir de sus experiencias previas, para construir nuevos conocimientos. Algo importante, que no se puede dejar de mencionar, es la posibilidad de que el estudiante aprenda de sus propios errores, permitiéndole esto una mayor interiorización de lo que está desarrollando. Además, gracias a la propuesta de modalidad de trabajo, hecha por la Fundación Omar Dengo y específicamente por el PIE-MED-FOD; los niños tienen la posibilidad de consolidar una de las áreas más importantes dentro de su desarrollo, la social, pues al tener que trabajar en parejas, y eventualmente en pequeños subgrupos, deben aprender a respetar las ideas, criterios y personalidades de sus compañeros.

Partiendo de esto, es que el presente taller pretende dar una visión general de ésta herramienta, permitiendo a sus participantes conocerla, interactuar con ella, desarrollar su creatividad y construir también su aprendizaje.

Objetivos:

- Motivar a los participantes, para que incorporen herramientas tecnológicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Conocer y manipular la herramienta computacional.
- Familiarizarse con el ambiente básico de Micromundos.
- Desarrollar algunas destrezas (motrices, de pensamiento, creatividad, afectiva y social)
- Conocer algunas primitivas básicas de Micromundos.
- Desarrollar paralelamente un pequeño proyecto para poner en práctica, el nuevo aprendizaje.

Desarrollo de texto interactivo: JavaSketchpad y FrontPage

Carrera R. Luis[•], Castillo C. Kory[•], Marín S. Mario[••]

Objetivos:

Introducir a los participantes en el diseño de páginas WEB que incorporen elementos de interactividad. Se tratará de dar a conocer las herramientas del JavaSketchpad y del FrontPage para elaborar algunas aplicaciones simples que puedan utilizarse desde exploradores de Internet.

Resumen:

En primera instancia se enseñará a confeccionar páginas WEB usando el FrontPage, como hacer encabezados, enlaces entre texto y enlaces entre documentos WEB.
La segunda parte consistirá en el estudio del traductor JavaSketchPad para crear aplicaciones que permitan la interactividad. Finalmente se construirán pequeñas aplicaciones que incorporen el uso de estas dos herramientas.

[•] Estudiantes de la Escuela de Matemática. Instituto Tecnológico de Costa Rica
[••] Escuela de Matemática. Instituto Tecnológico de Costa Rica

El asistente matemático DeRiVe en la programación de actividades en la enseñanza de la matemática en el nivel medio

Silvia Calderón Laguna[•]

Objetivo:

Se plantea este taller con el propósito de brindar a los y las profesoras de matemática de enseñanza media de una herramienta computacional que les permita abrir nuevas perspectivas en el proceso de enseñanaza-aprendizaje. Se pretende introducirlos (as) en el uso del sistema DeRiVe mostrándoles el potencial de este asistente matemático.

Justificación:

Actualmente los y las profesoras de matemática tienen el desafío de aprender a enseñar de manera diferente a la forma en que tradicionalmente lo han hecho debido a que los y las alumnas reciben información de otros medios sumamente atrayentes. Es conveniente aprovechar el interés popular que el uso del computador ha despertado dentro de los estudiantes haciendo uso de asistentes matemáticos adecuados que le permitan ,entre otros, al o la docente abrir nuevas perspectivas a los ejercicios y a las aplicaciones, usarlo eficazmente para que se entiendan mejor los conceptos , hacer las lecciones más amenas, darlo a conocer a sus estudiantes para que profundicen en cierto dominio de manera creadora ,fundamentalmente durante su estudio individual , incrementando su productividad y ayudando al mejoramiento de la calidad del proceso enseñanza - aprendizaje . Para ello es importante que el o la profesora esté familiarizado(a) con el paquete computacional a utilizar.

DeRiVe es un programa portable y corre en casi cualquier computador personal. Es una herramienta computacional que se puede aprender en pocas sesiones, que permite enfrentar al alumno a una gran cantidad de situaciones de aprendizaje y que conlleva una programación funcional simple.

[•] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica

Metodología:

Este taller está diseñado para dos sesiones de 2 horas cada una. Se pretende dar un primer acercamiento al potencial de esta herramienta mediante la presentación de algunas características sencillas del programa .

Cada participante trabajará en una computadora y el trabajo se desarrollará mediante guías.

Primera Sesión

- Introducción y descripción del sistema DeRiVe
- Descripción de los comandos básicos
- Álgebra

Segunda Sesión

- Funciones
- Graficación
- Presentación de posibles problemas
- Práctica aclaratoria

Estadística:
Un tutor y trivia para la enseñanza de Estadística a nivel de Educación Secundaria

Greivin Ramírez•, Alejandra Sánchez Avila•

Introducción:

El tema "Estadística" es actualmente poco abarcado en la educación secundaria costarricense, a pesar de que está contemplado en el Programa de Estudios, elaborado por el Ministerio de Educación Pública. Los libros de texto (Matemática: Serie Hacia el Siglo XXI , Editorial Santillana, Matemática Enseñanza-Aprendizaje de la Editorial Norma, entre otros) utilizados comúnmente por los diferentes centros educativos del país también lo contienen, pero generalmente como último tema, esta razón, unida al hecho de que los profesores de colegio en un alto porcentaje presentan deficiencias en el dominio de este tema, han influido para que se la haya dado poca importancia y se argumente al final de cada período lectivo, que no hay tiempo suficiente para cubrirlo.

En las instituciones donde se imparte el tema, se utilizan métodos tradicionales como son: las lecciones expositivas e interrogativas para desarrollar los contenidos, prácticas generales para ejercitas conocimientos y revisión de algunos problemas en la pizarra, por parte del profesor o profesora.

Principalmente por las razones anteriores hemos elaborado el programa computacional **Estadística**[1] y está dividido en dos partes:

1. **Tutor**

   Fue programado en la plataforma denominada *Macromedia® Director* 7.0, incluye animaciones para lograr un mejor impacto visual en los y las usuarias. Contiene historia, definiciones, ejemplos y problemas, acerca de los contenidos incluidos en el

• Estudiantes de la Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica

[1] Este programa fue elaborado en el curso Taller de Software Didáctico, el cual forma parte del plan de estudios de la carrera "Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora", ITCR.

Programa de Estudios del Ministerio de Educación Pública, distribuidos según los niveles en los cuales se imparten.

2. Trivia

Esta sección le permitirá comprobar el aprendizaje de los diversos temas, ya que, su objetivo principal es incentivar en los y las estudientes el deseo de estudiar, mediante una actividad lúdica no tradicional. Siendo así, la Trivia le permite a los y las usuarias adquirir conocimientos inmediatos en los diversos campos de la Matemática.

El juego tiene varios niveles de dificultad, es decir, los y las jugadoras podrán escoger un nivel y la cantidad de participantes registrándose con su respectivo nombre.

También es posible elegir: el número de preguntas que se generarán durantes su ejecución, el tiempo disponible para contestar cada interrogación.

Los y las usuarias escogen las preguntas de acuerdo con los diferentes temas y tipos de objetivos (conocimiento, aplicación, análisis y comprensión).

El programa revisa si la respuesta dada es correcta y contabiliza la puntuación de cada jugador.

Al finalizar el juego, si el puntaje de certeza obtenido es alto, tendrá la posibilidad de ingresar su nombre en la tabla de mejores rendimientos, en la cual se encuentran lod diez mejores jugadores en toda la historia del programa.

Estadística está dirigido tanto a docentes como estudiantes de secundaria, se puede usar para impartir la materia, como para repasar y practicar.

En conclusión: esta herramienta computacional permite a todos los usuarios estudiar estadística en una forma mas dinámica y divertida, cada usuario aprende a su propio ritmo, repasa aspectos teóricos, adquiere nuevos conocimientos y ejercita habilidades en este campo.

La matemática de los engranajes

Ana Lourdes Acuña[•]

"La diferencia entre lo que hacemos y seríamos capaces de hacer bastaría para resolver la mayor parte de los problemas del mundo"
(Gandhi)

1. Justificación

"La matemática de los engranajes " es un taller para explorar las relaciones matemáticas asociadas al numero de revoluciones y tamaños de diferentes piezas dentadas que permiten la transmisión del movimiento en múltiples mecanismos tecnológicos.

La experiencia esta dispuesta para que quienes participan construyan diversos modelos o estructuras usando piezas LEGO y analicen las relaciones y efectos que se producen según la colocación y combinación que se disponga.

2. Objetivos

Analizar la matemática contenida en la generación de movimientos ocurridos, a partir de la combinación de engranajes de diferentes tamaños.

3. Metodología

Grupos de cuatro personas exploran la combinación de engranajes de tamaños diferentes y analizan su proporción con el número de vueltas resultante.

Luego de explorar diferentes modelos extraen la formula matemática que permite anticipar el número de vueltas esperado a partir de una combinación de engranajes específica.

4. Materiales

Ejes, engranajes de diferente tamaño, plataformas de montaje.

5. Participantes

Máximo 20 personas por grupo.

6. Propósitos

- Introducirse en el conocimiento de la robótica pedagógica a través de la exploración de ambientes tecnológicos y el análisis de distintos postulados teóricos.

- Establecer vínculos entre la integración curricular y situaciones de aprendizaje asociadas con el diseño y la programación.

- Derivar criterios aplicables a la mediación pedagógica en ambientes educativos que disponen recursos Lego Logo.

7. Metodología

Se han organizado modalidades de trabajo y estudio en parejas y en grupos pequeños. Donde se explorarán rudimentos de construcción y programación apoyados por procesos de mediación personal y con diversos recursos didácticos como fichas impresas y materiales electrónicos.

También se participará en plenarias de discusión para valorar los diversos usos dados a los recursos Lego Logo y sus posibilidades pedagógicas observadas a la luz de los fundamentos teóricos expuestos en las lecturas y la experiencia vivida.

•Fundación Omar Dengo, Costa Rica

Programación de Applets

para las Matemáticas y su enseñanza

Walter Mora F.
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Parte I de 3

Introducción

Este es un curso que pretende establecer una introducción directa a al programación de applets (un applet es un "pequeño programa" implementado en Java, que corre en un navegador). Se asume que el lector tiene alguna experiencia previa en algún otro lenguaje de programación (no necesariamente orientado a objetos.)

Las ideas de programación y los programas de ejemplo están orientadas hacia el campo de la matemática. Los ejemplos suministran "plantillas" para los ejercicios.

Esta primera parte esta orientada la creación de interfaces. Se inicia con una plantilla general para la creación de un applet. Los primeros ejemplos introducen una manera de declarar variables y constantes ("globales" y locales). Se introducen los tipos primitivos, las clases y objetos y el *API* de Java 1.3, los ciclos y el manejo de eventos básicos (hacer clic en un botón y escribir en un campo de texto). Los primeros ejemplos también estudian las formas básicas para leer e imprimir. Los ejemplos finales se refieren a la construcción de interfaces con el *AWT* y la implementación de graficadores sencillos.

La segunda parte trata sobre evaluación de expresiones matemáticas y creación de clases en el contexto del análisis numérico..

La tercera parte trata sobre manejo de eventos y animación. Los ejemplos se orientan a crear applets útiles en proyectos sobre geometría dinámica.

Programación de Applets

Un applet [app(lication program)-let o "aplicacioncita"] es un programa implementado con Java que puede cargarse y ejecutarse dentro de una página Web.

El navegador Web contiene un interpretador Java (JVM o Java Virtual Machine o Ambiente de Tiempo de Ejecución de Java) que debe estar habilitado.

Un applet se edita como un archivo de extensión "*.java". Una vez compilado se obtiene un archivo "*.class". Los applets que utilizan imágenes u otros archivos se pueden agrupar en un archivo compreso "*.jar". El navegador al encontrar una marca <applet> en el código HTML de la página Web, descarga también el archivo "*.class" o el archivo "*.jar" (al que hace referencia en el cuerpo de esta marca) del servidor y lo ejecuta en el cliente.

Taller sobre SWP(Scientific WorldPlace)

Jorge Monge Fallas[•]

Descripción del taller:

Para lograr los objetivos propuestos se trabaja en principio sobre aspectos generales del Software y una introducción en su interfase. Además el tipo de archivos con el cual se trabaja en SWP y la calidad de trabajos.

Como parte introductoria, manejo de operadores y operaciones matemáticas en SWP, seguido del manejo de expresiones algebraicas y la solución de ecuaciones de diferentes tipos.

En la parte de realización de gráficas de funciones se trabaja en principio sobre gráficos de funciones polinomiales (especialmente lineales y cuadráticas) y algún otro tipo de función especial. Conociendo el manejo de expresiones algebraicas se introduce algunas nociones del Cálculo Diferencial e Integral como límites, derivadas e integrales de algunas funciones.

Como herramienta para un mejor manejo de ciertos cálculos se trabaja en una aplicación de asignación que tiene SWP para ciertos entes matemáticos tales como: matrices, funciones, polinomios, sucesiones etc.

Además de una extensión de las herramientas aplicadas para funciones de dos variables aplicadas hacia funciones de tres variables .

Finalizamos con el manejo de algunas estructuras de trabajos prediseñadas tales como artículos, memos, tesis, exámenes etc.

[•] Escuela de Matemática. Instituto Tecnológico de Costa Rica

Taller sobre el Uso del Cabri – Géomètre II en la Enseñanza de la Geometría

Tema: Resolución de problemas geométricos relacionados con triángulos, cuadriláteros y circunferencias usando el Cabri - Géomètre.

Dirigido a: Profesores y profesoras de Matemática de la Educación Secundaria y a estudiantes universitarios de esta carrera.

Presentación: En 1989, el Consejo Nacional de Profesores de Matemática (NCTM) de los Estados Unidos estableció que - en el estudio de la Geometría - los tópicos que deben recibir más atención son las exploraciones de figuras planas y tridimensionales mediante programas computarizados y el uso de modelos geométricos, con el propósito de desarrollar ciertas habilidades cognitivas vinculadas con el quehacer matemático: hacer y comprobar conjeturas, formular contraejemplos, seguir argumentos lógicos, juzgar la validez de argumentos, construir argumentos válidos en forma sencilla, representar situaciones problemáticas con modelos geométricos y aplicar las propiedades de las figuras geométricas conocidas.

En este enfoque queda en evidencia como el uso de paquetes matemáticos ha facilitado la visualización de conceptos matemáticos, lo cual parece tener una amplia repercusión sobre la enseñanza de la geometría, como lo demuestra el desarrollo de paquetes interactivos como el Cabri - Géomètre (Francia), el Geometer'sSketchpad (Estados Unidos) y Euclid (Alemania), los cuales han sido incorporados en proyectos educativos que se están llevando a cabo en países como Italia, España, Australia, Brasil, Argentina, Colombia, Costa Rica y Venezuela.

En este sentido, este taller ha sido diseñado con el propósito de dar a conocer ciertas herramientas del Cabri aplicables en la resolución de problemas geométricos.

Objetivos:

1. Conocer las nuevas tendencias pedagógicas en la enseñanza de la Geometría.
2. Iniciar a los participantes en el uso del Cabri - Géomètre.
3. Hacer y verificar conjeturas sobre ciertas relaciones existentes entre objetos geométricos.

4. Resolver problemas geométricos relacionados con triángulos, cuadriláteros y circunferencias usando el Cabri - Géomètre.

Contenidos:

1. Caracterización del proceso de enseñanza - aprendizaje de la Geometría.
2. Descripción del Cabri - Géomètre.
3. Relaciones existentes entre los elementos de un triángulo: alturas, bisectrices, mediatrices y medianas de un triángulo.
4. Cuadriláteros: Propiedades de los trapecios y paralelogramos.
5. Relaciones entre los elementos de una circunferencia.

Actividades:

1. Presentación de la ponencia sobre *nuevas tendencias en la enseñanza de la Geometría y el uso de software de Geometría Dinámica*
2. Descripción de un paquete computarizado e interactivo orientado a la enseñanza de la Geometría: el Cabri II.
3. Iniciación al Cabri – Géomètre II: Uso de los menúes desplegables y la barra de herramientas.
4. Resolución de problemas geométricos relacionados con triángulos, cuadriláteros y circunferencias usando el Cabri a cargo de cada uno de los participantes.

Recursos:

1. Equipos de computación del Laboratorio de Informática.
2. Software indicado.
3. Guía: Iniciación al Cabri – Géomètre II.
4. Hojas de trabajo diseñadas por la tallerista.

Evaluación: En este taller se evaluará la asistencia y participación activa en cada una de las actividades propuestas.

N° de participantes: En función de la capacidad del laboratorio de informática.

Lugar: Laboratorio de Informática de la institución.

Duración: Dos sesiones de ochenta (80) minutos cada una, para un total de 160 minutos.

Tallerista: Prof. Martha Iglesias Inojosa.

Simplifique la Matemática con Maple

Luis Alejandro Acuña•

Objetivo:

Que los participantes adquieran un conocimiento general del programa matemático Maple V, y específicamente en las áreas de cálculos numéricos, cálculos simbólicos, ecuaciones y funciones, graficación y cálculo diferencial e integral.

Descripción:

Maple V es una herramienta matemática muy poderosa, con aplicaciones en cálculos numéricos o simbólicos, graficación en dos o tres dimensiones, cálculo diferencial e integral, series, ecuaciones diferenciales, estadística, etc. En este taller se presentarán las habilidades de Maple en las siguientes áreas:

1. *Cálculos numéricos*
   Cálculos exactos y aproximados
   Operaciones con números enteros
   Variables

2. *Funciones*
   Funciones predefinidas
   Funciones definidas por el usuario
   Funciones de varias variables

3. *Tipos de datos*
   Listas
   Conjuntos
   Hileras

4. *Cálculos simbólicos*
   Expresiones algebraicas

• Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica

Ecuaciones

Inecuaciones

5. Gráficos

Gráficos en dos dimensiones

Coordenadas

Animaciones

Gráficos en tres dimensiones

6. *Cálculo diferencial e integral*

Límites

Derivadas

Integrales

Tópicos de Cálculo en Varias Variables
Curso Virtual

Walter Mora Flores•, Geovanny Figueroa Mata•

Resumen

Se describe el desarrollo de un curso de Cálculo en varias variables para estudiantes de Ingeniería del Instituto Tecnológico de Costa Rica. El desarrollo del mismo se hace con la intención de incorporar elementos de interacción a través del computador, para permitir al estudiante y al profesor el diseño, la implementación y el desarrollo de actividades que faciliten la exploración de conceptos para que le estudiante logre una mejor comprensión sobre el alcance y significado de éstos. La programación y el desarrollo del curso hace un uso importante de métodos numéricos y tareas de graficación y tiene un componente importante de programación en Java. Muchas de las propuestas o herramientas promueven un acercamiento de las prácticas educativas al paradigma constructivista .

Palabras Clave: Cálculo en varias variables, Curso Virtual, Interacción Humano-computador, Métodos Numéricos, programación Java, programación de gráficos.

• Escuela de Matemática. Instituto Tecnológico de Costa Rica.