CIEMAC

Congreso Internacional
sobre la Enseñanza de la Matemática
Asistida por Computadora

TEC Tecnológico de Costa Rica

MEMORIAS

III Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora

Cartago, Costa Rica

2003

Instituto Tecnológico de Costa Rica. Escuela de Matemática. Teléfono: (506) 2550 2225
www.tec.ac.cr/congresociemac

TALLERES

CÁLCULO, ÁLGEBRA LINEAL Y ELEMENTOS DE ESTADÍSTICA UTILIZANDO CALCULADORAS GRAFICADORAS CON C.A.S.

Edison De Faria Campos[1]
Universidad de Costa Rica
edefaria@cariari.ucr.ac.cr

Resumen

Este curso consta de una serie de actividades de cálculo, álgebra lineal y elementos de estadística, diseñadas para aprovecharse del potencial de la herramienta didáctica digital voyage 200 de Texas Instruments. Algunas de estas actividades fueron utilizadas en distintos talleres con docentes de matemática y en cursos de matemática para computación y para ingeniería civil de la Universidad de Costa Rica.

Introducción

De acuerdo a la National Council of Teachers of Matematics (NCTM, 1996, 1997), la tecnología afecta nuestra forma de pensar y de hacer matemáticas. Además, recomienda la integración de la tecnología en todos los niveles de la enseñanza de matemática para explorar y experimentar con ideas matemáticas tales como relaciones, propiedades numéricas y algebraicas, y funciones; desarrollar y reforzar habilidades tales como cálculos, gráficas, y análisis de datos; enfatizar el proceso de resolver problemas con datos reales, en lugar de concentrarse en los cálculos asociados con los problemas; acceder ideas matemáticas y experiencias que van más allá de los niveles limitados por los cálculos tradicionales con papel y lápiz, permitiendo elevar el nivel de abstracción y generalización; desarrollar conceptos y reconocer patrones; evaluar habilidades matemáticas y conceptos; construir modelos; experimentar, conjeturar y verificar propiedades matemáticas; explorar y desarrollar nuevas formas de enseñar.

La importancia de la tecnología en la educación matemática es enfatizada en los Estándares 2000 del NCTM en uno de sus seis principios, el principio de la tecnología. De acuerdo a este principio los programas de matemática deben utilizar la tecnología para apoyar a todos los estudiantes en el proceso de comprensión de la matemática y para prepararlos para que utilicen las matemáticas en un mundo altamente tecnológico.

El advenimiento de las tecnologías digitales está afectando profundamente la educación, particularmente la educación matemática. Ellas proporcionan oportunidades para trabajar con distintas ideas matemáticas en distintos sistemas de representación. Mediante el uso correcto de las tecnologías digitales podemos resolver problemas complejos y a un nivel de profundidad mayor, pero como cualquier herramienta, ella puede ser bien o mal utilizada. No debemos utilizarla como un sustituto de habilidades básicas y de la intuición, sino para enriquecer el proceso de aprendizaje matemático de los estudiantes.

Algunos estudios concluyen que el alumno que utiliza tecnología en su proceso de enseñanza aprendizaje, tiene más tiempo para explorar, descubrir, entender, enfatizar

[1] Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, CIMM
Asociación de Matemática Educativa de Costa Rica, ASOMED

los conceptos y resolver problemas, elevando así el nivel de pensamiento del estudiante (Martínez Cruz, 1996; Ramírez & Wayland 1996; De Faria, 2000, 2002; De Faria y Castro, 2002).

Gómez (1998) considera que, la tecnología abre espacios para que el estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel) en las que él puede manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración, gracias a la posibilidad que ofrece de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples sistemas de representación dentro de esquemas interactivos, lo que es fundamental para el aprendizaje de los estudiantes. Investigaciones realizadas por Duval (1992) reportan que en estudios en donde se presente un enunciado en el cual están en juego varios sistemas de representación, es importante analizar las articulaciones que hay de un sistema a otro.

Actividades

Las actividades que siguen son apropiadas para cursos de cálculo diferencial e integral, álgebra lineal y estadística. Abarcan contenidos de sucesiones, series, sumas de Riemann, métodos numéricos, simulaciones tipo Monte Carlo, movimiento de proyectiles, regresiones, programación lineal, matrices y transformaciones. Cada actividad tiene un objetivo y los pasos a seguir con la calculadora voyage 200.

Actividad 1 : Graficando una sucesión y sus sumas parciales
Objetivo : Utilizar el modo gráfico sequence para graficar una sucesión y la sucesión de sus sumas parciales.

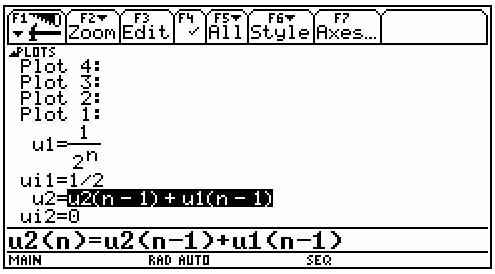
En esta actividad graficaremos simultáneamente una sucesión $\{a_n\}$ y la sucesión de las sumas parciales $\{s_n\}$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, para las siguientes sucesiones:

a_n	$\dfrac{1}{2^n}$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{(-1)^n}{n}$

Pasos:

1. Presione la tecla 3 y seleccionar 4:Sequence como modo gráfico.
2. Abra el editor # presionando ∞#.
3. Introduzca la primera sucesión y su suma parcial:

$$\begin{cases} u1 = 1/2^n \\ ui1 = 1/2 \\ u2 = u2(n-1) + u1(n-1) \\ ui2 = 0 \end{cases}$$



u1 representa la sucesión $\{a_n\}$ mientras que u2 representa $\{s_n\}$.

4. Presione ∞ E, para abrir el editor ∃. Ingrese los parámetros para la ventana gráfica: $1 \le n \le 50$, $x \in [0,50]$, $y \in [-0.5,1.5]$.
5. Abra la pantalla %presionando ∞ R y grafique las dos sucesiones. Identifique $\{a_n\}$ y $\{s_n\}$. ¿Qué sugiere las gráficas?

Repita los pasos anteriores para las sucesiones

$$\begin{cases} u1 = 1/n \\ ui1 = 1 \\ u2 = u2(n-1) + u1(n-1) \\ ui2 = 0 \end{cases}$$

para $1 \le n \le 50$, $x \in [0,50]$, $y \in [-1,5]$ y

$$\begin{cases} u1 = (-1)^n / n \\ ui1 = -1 \\ u2 = u2(n-1) + u1(n-1) \\ ui2 = 0 \end{cases}$$

para $1 \le n \le 50$, $x \in [0,50]$, $y \in [-1,1]$. ¿Qué sugieren las gráficas anteriores respecto a la serie armónica y a la armónica alternante?

Actividad 2 : Conjeturando
Objetivo : Utilizar la calculadora para verificar conjeturas relacionadas con la serie armónica.

Sabemos que la serie infinita $\sum \frac{1}{n}$ es divergente.

Abel, el genio noruego dijo sobre esta serie que " La serie es divergente … es una verguenza demostrar algo a partir de ella".

Heaviside expresó distinto: " La serie es divergente. Por lo tanto debe poder hacerse algo con ella".

Dos modos opuestos de concebir un resultado matemático. ¿Qué podemos hacer de interesante con la serie armónica?

¿Cuántos términos de la serie deben sumarse para que la suma supere por primera vez a un número natural dado?

Utilice el operador suma, 4, y calcule el número de términos a utilizar para que la suma supere por primera vez los enteros de la tabla:

Suma parcial mayor que	**Número de términos** n_k
2	
3	
4	
5	
6	227
7	616
8	
9	4550

Calcule el cociente entre dos números de términos sucesivos. ¿Qué conjeturas pueden ser hechas? ¿Cómo es que la conjetura nos puede ayudar a ampliar nuestra tabla?

Actividad 3 : Proyectos

Objetivo : Utilizar la calculadora voyage 200 para hacer conjeturas o buscar solución para problemas relacionados con sucesiones y series.

1. Encuentre una fórmula que permite calcular el enésimo término de la sucesión que tiene n valores para el número n, es decir, $\{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,\cdots\}$
2. Verifique el posible comportamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$.

Actividad 4 : Métodos numéricos

Objetivo : Utilizar la calculadora voyage 200 para programar algunos algoritmos para determinar las raíces de ecuaciones algebraicas, e integrales definidas.

En esta actividad programaremos algunos de los algoritmos clásicos para determinar el valor aproximado de una raíz de una ecuación de la forma $f(x) = 0$.

1. **Método de bisección**.

Este método se basa en el teorema del valor medio (Bolzano): Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos (es decir, $f(a)f(b) < 0$) entonces existe (al menos) un número $p \in]a,b[$ tal que $f(p) = 0$. El método de bisección requiere dividir varias veces a la mitad los subintervalos de $[a,b]$ y, en cada paso, localizar la mitad que contenga p.

Para simplificar supongamos que existe una única raíz en $[a,b]$, y construyamos las siguientes sucesiones: $\{a_n\},\{b_n\}$ y $\{p_n\}$.

$a_1 = a, b_1 = b,\ p_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$

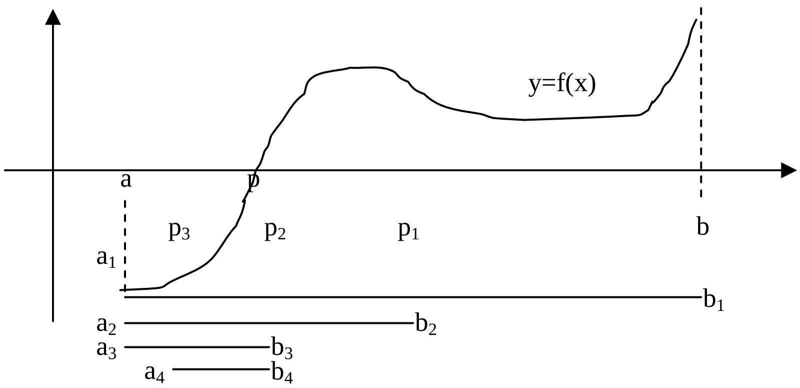
Si $f(p_1) = 0$ tome $p = p_1$. Caso contrario $f(p_1)$ tiene el mismo signo de $f(a_1)$ o de $f(b_1)$.

Si $f(p_1)\, f(a_1) < 0$ entonces $p \in \left]a_1, p_1\right[$. En este caso tomamos $a_2 = a_1, b_2 = p_1$. Repetimos el procedimiento en el intervalo $[a_2, b_2]$. Así $p_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$.

Caso contrario, $p \in \left]p_1, b_1\right[$. Entonces $a_2 = p_1, b_2 = b_1$, y repetimos el procedimiento en el intervalo $[a_2, b_2]$. Así $p_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$.

Podemos utilizar alguno de los siguientes criterios de paro. Dado $\varepsilon > 0$ detenga cuando:

1. $\left| p_n - p_{n-1} \right| \le \varepsilon$
2. $\left| \dfrac{p_n - p_{n-1}}{p_n} \right| \le \varepsilon,\ p_n \ne 0$
3. $\left| f(p_n) \right| \le \varepsilon$
4. Cuando se ha alcanzado un número máximo de iteraciones predefinido, $n = N$.



Código del programa bisección

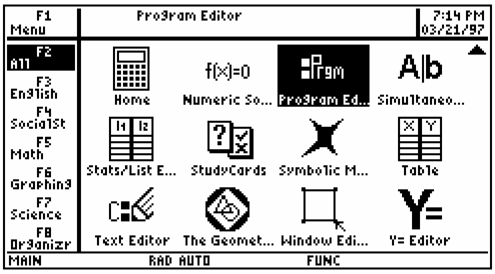
```
bisecar( )
Prgm
Local ex, aa, bb, ee, mm, n, p
Dialog
Title “bisección”
Request “función f(x)=”,ex
Request “extremo inferior a=”,aa
Request “extremo superior b=”,bb
Request “tolerancia e=”,ee
```

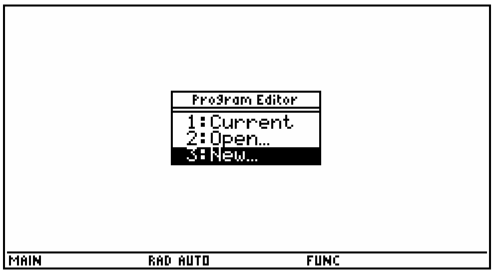
```
Request "Num. Máx. Iterac.=",mm
EndDlog
expr(ex)→ex
expr(aa) →aa
expr(bb) →bb
expr(ee) →ee
expr(mm) →mm
ClrIO
0→n
If (ex|x=aa)*(ex|x=bb)>0 Then
Disp "el método no se aplica en [a,b]"
Stop
EndIf
If abs(ex|x=aa)<ee Then
Disp "raíz aproximada"
SetMode("Exact/Approx","APROXIMATE")
Disp aa
Disp "Número de iteraciones"
Disp n
SetMode("Exact/Approx","AUTO")
Stop
ElseIf abs(ex|x=bb)<ee Then
Disp "raíz aproximada"
SetMode("Exact/Approx","APROXIMATE")
Disp bb
Disp "Número de iteraciones"
Disp n
SetMode("Exact/Approx","AUTO")
Stop
EndIf
(aa+bb)/2→p
While n<mm and abs(ex|x=p)>ee
If (ex|x=p)*(ex|x=bb)>0 Then
p→bb
Else
p→aa
Endif
(aa+bb)/2→p
n+1→n
EndWhile
If  abs(ex|x=p)<ee Then
Disp "raíz aproximada"
SetMode("Exact/Approx","APROXIMATE")
Disp p
Disp "Número de iteraciones"
Disp n
SetMode("Exact/Approx","AUTO")
Stop
EndIf
```

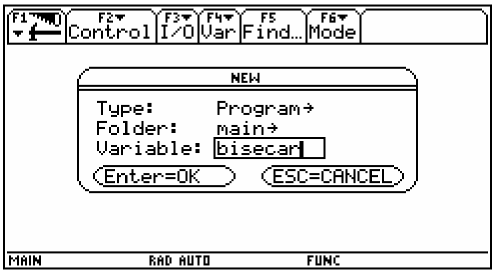
EndPrgm

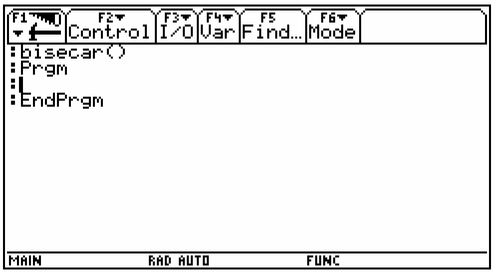
Pasos:

1. Abra el editor de programas. Presione la tecla O, seleccione el ícono correspondiente al editor de programas y presione ÷. Abra un nuevo programa, y digite el nombre del programa: bisecar

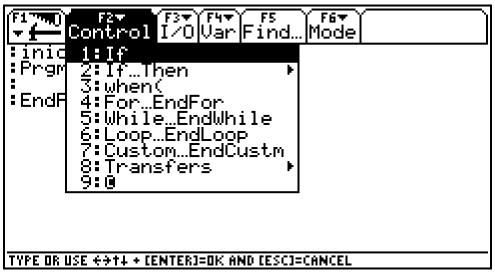


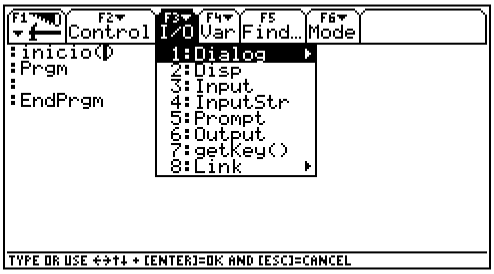






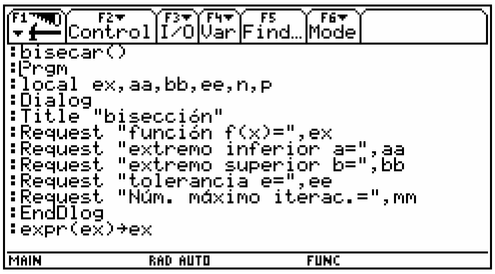
2. La barra de herramientas ha cambiado como en otros editores y ahora nos permite seleccionar las instrucciones de entrada salida o de control.



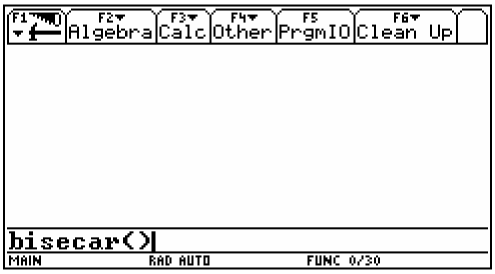


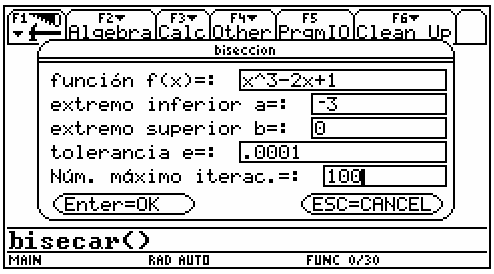
3. Digite el código del programa bisecar.

   El comando exp(string) $\Rightarrow$ expresión devuelve la cadena de caracteres contenida en string como una expresión y la ejecuta inmediatamente.
   El símbolo $\rightarrow$ se obtiene al presionar la tecla ♣
   Para poner comentarios presione 2 X. Aparecerá e símbolo de comentario f.
   El símbolo $\subseteq$, tal que, se obtiene al presionar 2 K.



4. Ejecutar el programa



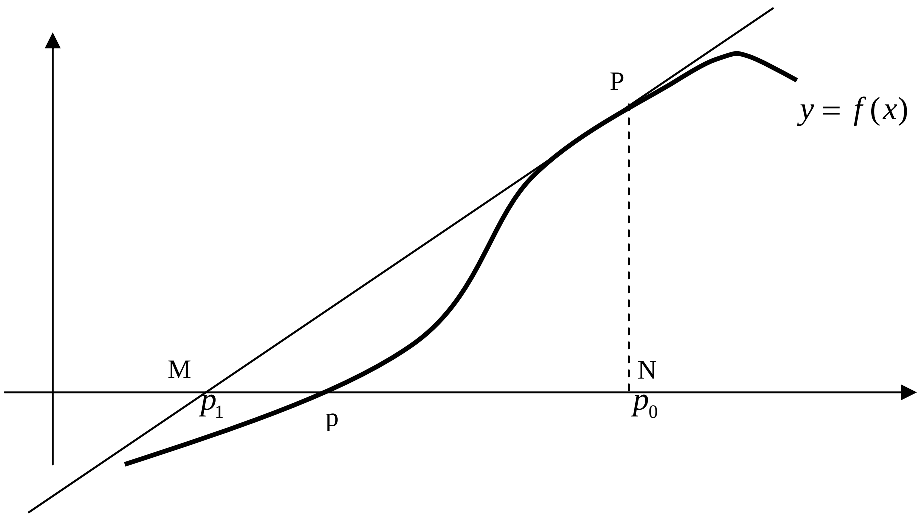


2. Método de Newton-Raphson

Para determinar una raíz de la ecuación $f(x)=0,\ x\in[a,b]$, con f diferenciable en $[a,b]$ consideremos la sucesión $\{p_n\}$ construida de la siguiente forma: Sea $p_0\in[a,b]$ una aproximación inicial para la raíz, y p_1 el punto en dónde la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $(p_0, f(p_0))$ corta el eje x.

Como en triángulo MNP es rectángulo y la pendiente de la recta tangente es $f'(p_0)$ entonces: $f'(p_0)=\dfrac{f(p_0)}{p_0-p_1}$, si $p_1\neq p_0$. Despejando p_1 obtenemos:

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \quad \text{si } f'(p_0)\neq 0.$$



Si repetimos el procedimiento y trazamos la recta tangente a la curva en el punto $(p_1, f(p_1))$ y si $f'(p_1) \neq 0$ entonces dicha recta tangente cortará el eje x en el punto p_2 tal que

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)}.$$

De esta forma construiremos la sucesión $\{p_n\}$ recursivamente:

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n - \dfrac{f(p_n)}{f'(p_n)} & \text{si } f'(p_n) \neq 0,\ n \geq 0 \\ p_0 \ \text{aproximación inicial} \end{cases}$$

Este es el método de Newton-Raphson para aproximar una raíz de la ecuación $f(x) = 0,\ x \in [a,b]$.

Teorema: Si f tiene derivada segunda continua en $[a,b]$ tal que $f(p) = 0,\ f'(p) \neq 0$ entonces existe un número real $\partial > 0$ tal que si $p_0 \in [p-\partial, p+\partial]$ la sucesión $\{p_n\}$ generada por el método de Newton-Raphson converge a p.

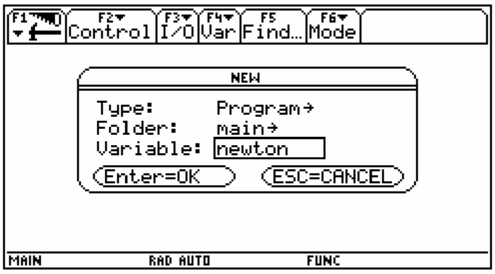
Código del programa Newton

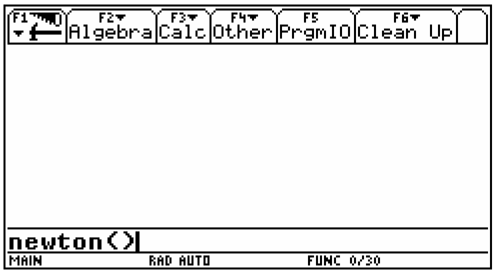
```
newton( )
Prgm
Local ex, x0, ee, mm,n, p
Dialog
Title “newton”
Request “función f(x)=”,ex
Request “valor inicial x0=”,x0
Request “tolerancia e=”,ee
Request “Num. Máx. Iterac.=”,mm
EndDlog
expr(ex)→ex
expr(x0) →x0
expr(ee) →ee
expr(mm) →mm
ClrIO
0→n
x0→p
While n<mm and abs(ex|x=p)>ee
x0-(ex|x=x0)/(nDeriv(ex,x)|x=x0) →p
n+1→n
If  abs(ex|x=p)<ee Then
p→x0
EndIf
EndWhile
Disp “raíz aproximada”
SetMode(“Exact/Approx”,”APROXIMATE”)
```

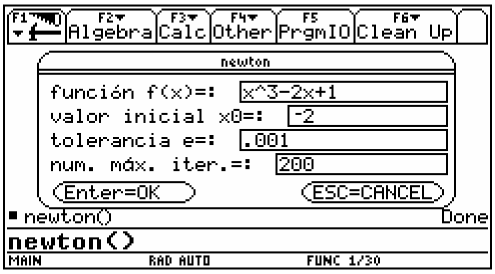
```
Disp p
Disp "Número de iteraciones"
Disp n
SetMode("Exact/Approx","AUTO")
Stop
EndPrgm
```

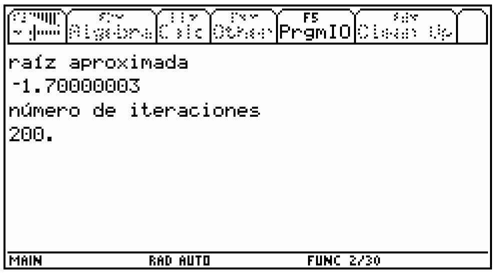
Pasos:

1. Abra el editor de programas. Abra un nuevo programa, y digite newton en el campo correspondiente al nombre del programa.
2. Digite el programa
3. Ejecute el programa.









.

3. **Sumas de Riemann**

Este programa es un poco más complejo que los dos anteriores. El usuario ingresa la función integrando, el intervalo de integración y el número de subintervalos de la partición del intervalo dado. Posteriormente el usuario escoge si el punto de cada subintervalo es e extremo izquierdo, el punto medio o el extremo derecho. Para lograr esto, se construye un menú con el comando **DropDown**. Este comando recibe como entrada un título (hilera de caracteres), una lista con las opciones a seleccionar, y una variable que contendrá los valores de los parámetros ingresados. Otros comandos importantes utilizados son:

line: Dibuja un segmento que une los puntos (x_0, y_0), (x_f, y_f). El modo es opcional.

stopic: var[,pxlrow,pxlcol][,width,lenght] almacena la figura en la variable var. Los otros parámetros son opcionales.

rclpic: picvar pxlrow,pxlcol] invoca la figura almacenada en picvar.

string(expr): convierte variables numéricas en alfanuméricas.

expr(string): convierte variables alfanuméricas en numéricas

PxlText: string, x,y Ubica un texto de nombre string en la posición xy de la pantalla.

&: string1&string2. Concatena las cadenas de caracteres string1 y string2.

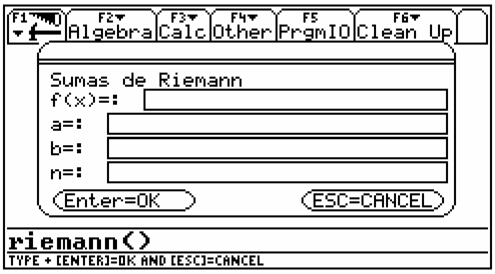
Código del programa riemann

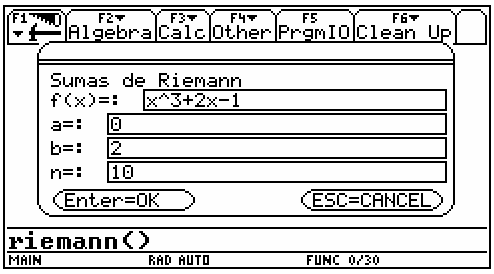
```
riemann( )
Prgm
local a,b,c,h,n,i,r,s,v,x,y,pic1,xf,xa,xb,xn
ClrHome
Dialog
Text "Sumas de Riemann"
Request "f(x)=", xf
Request "a=", xa
Request "b=", xb
Request "n=", xn
EndDlog
expr(xa) →a
expr(xb) → b
expr(xn) → n
expr("Define y1(x)="&xf)
FnOff
ClrDraw
a → xmin
b → xmax
(b-a)/n → h
h → xscl
FnOn
1:ZoomFit
min(0,ymin) → ymin
max(0,ymax) → ymax
DispG
stoPic pic1
While n>0
Dialog
Text "Número subdivisiones"
Request "n=", xn
Text "Seleccionar puntos"
DropDown "Posición", {"Inicio","Centro","Fin"},c
EndDlog
expr(xn) → n
setMode("Exact/Approx","APPROXIMATE")
FnOff
ClrDraw
RclPic pic1
(b-a)/n → h
```

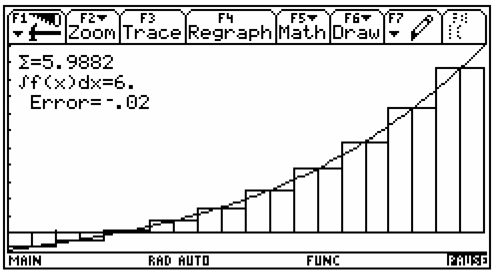
```
a → x
a+(c-1)*h/2 → v
0 → s
For i,1,n
y1(v) → y
s+y*h → s
Line v,0,v,y
Line x,0,x,y
Line x,y,x+h,y
Line x+h,y,x+h,0
PxlText "     ",5,5
PxlText "Σ="&string(s),5,5
x+h → x
v+h → v
EndFor
∫(y1(x),x,a,b) → r
PxlText "∫f(x)dx="&string(r),15,5
PxlText " Error="&string(s-r),25,5
setMode("Exact/Approx","AUTO")
Pause
EndWhile
EndPrgm
```

Pasos:

1. Abra el editor de programas. Abra un nuevo programa, y digite riemann en el campo correspondiente al nombre del programa.
2. Digite el programa.
3. Ejecute el programa.







Actividad 5 : Fractales
Objetivo : Utilizar el editor de programas para programar Sistemas de Funciones Iteradas (IFS)

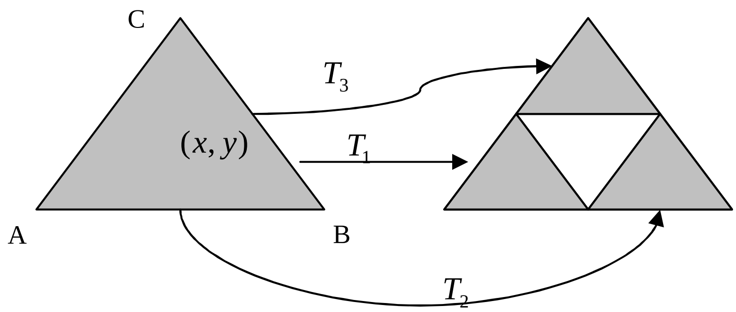
Un Sistema de Funciones Iteradas (Iterated Function System) es un conjunto de transformaciones afines contractivas. La forma de generar un fractal IFS es la siguiente: partiendo de una figura inicial en el plano (nivel de iteración 0), le aplicamos las transformaciones definidas (nivel de iteración 1). Una vez realizadas, sobre cada una de las figuras resultantes se vuelven a aplicar las transformaciones (nivel de iteración 2), y así sucesivamente.
La propiedad que caracteriza a los fractales IFS es su independencia del conjunto inicial, es decir, podemos aplicar las transformaciones sobre cualquier conjunto del plano con ciertas características y la figura resultante será la misma. Por tanto, cualquier conjunto inicial adecuado iterado por un IFS produce un único conjunto final denominado atractor del IFS. Por supuesto el atractor nunca podrá ser visualizado, debido a que necesitaremos infinitas iteraciones para obtenerlo, pero sí podremos visualizar distintas aproximaciones al mismo.
Otra característica interesante de estos fractales es la poca información con la que son generados. Necesitaremos únicamente algunos valores de ciertos parámetros, que son guardados en una matriz de tamaño relativamente pequeño. La riqueza de la imagen dependerá únicamente del nivel de iteración empleado.

La idea consiste en iniciar con un conjunto compacto $K_0 \in \Re^2$, definir un conjunto $T = \{T_1, T_2, \cdots, T_N\}$ de n transformaciones contractivas, $T_i : K_0 \to K_0$ tales que $|T_i(x) - T_i(y)| \le \alpha_i |x - y|, \forall x, y \in K_0,\ 0 \le \alpha_i < 1,\ i = 1,2,\cdots, N.$ Además, asociamos a cada T_i una probabilidad $0 < p_i$ con $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1.$
El sistema $\{K_0, T, P\}$ con $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_N\}$ se conoce como un IFS contractivo.
Sean

$$K_1 = T_1(K_0) \cup T_2(K_0) \cup \cdots \cup T_N(K_0) = T(K_0);$$
$$K_2 = T_1(K_1) \cup T_2(K_1) \cup \cdots \cup T_N(K_1) = T(K_1) = T(T(K_0)) = T^2(K_0);\ \cdots$$
$$K_n = T_1(K_{n-1}) \cup T_2(K_{n-1}) \cup \cdots \cup T_N(K_{n-1}) = T(K_{n-1}) = T^n(K_0).$$

Si $\lim_{n\to\infty} K_n$ existe y es igual a un conjunto K, decimos que K es el atractor del IFS (la convergencia de $\{K_n\}$ a K es en la métrica Hausdorff).

Por ejemplo, si empezamos con K_0 una región triangular cerrada con vértices $A = (0,0), B = (12,0), C = (6,12)$ y removemos la región triangular con vértices en los puntos medios de ABC tendremos tres transformaciones afines, T_1, T_2, T_3:



$$T_1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ T_2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix},\ T_3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

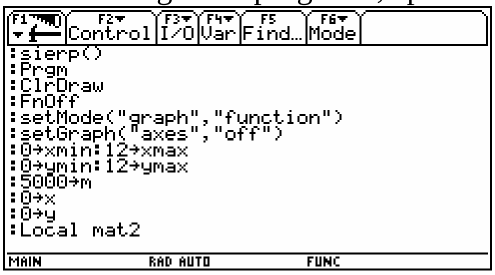
Si asumimos que las tres transformaciones ocurren con igual probabilidad entonces los os parámetros para el IFS son dados por la siguiente tabla:

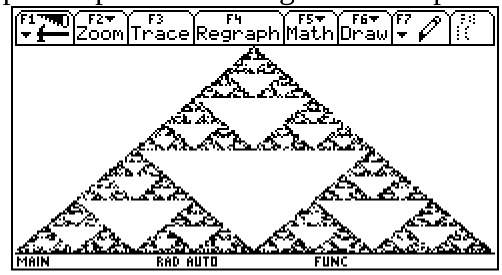
T	a	b	c	d	e	f	p
1	0.5	0	0	0.5	0	0	1/3
2	0.5	0	0	0.5	6	0	1/3
3	0.5	0	0	0.5	3	6	1/3

El código para el programa que denominaremos sierp es el siguiente:

```
Prgm
ClrDraw
FnOff
setMode("graph","function")
setGraph("axes","off")
Local k,x,y,m,n,mat2,r
0→xmin:12→xmax
0→ymin:12→ymax
5000→m
0→x
0→y
[.5,0,0,.5,0,0,1/3;.5,0,0,.5,6,0,2/3;.5,0,0,.5,3,6,1]] →mat2
For n,1,m
rand( )→r
1→k
  While r>mat2[k,7]
   k+1→k
  EndWhile
mat2[k,1]*x+mat2[k,2]*y+mat2[k,5] →z
mat2[k,3]*x+mat2[k,4]*y+mat2[k,6] →y
z→x
PtOn x,y
EndFor
EndPrgm
```

Para ejecutar el programa, digite desde la pantalla principal (Home) sierp( ) y si no hay errores al digitar el programa, aparecerá – poco a poco – el triángulo de Sierpinski.





Ejercicio: Hacer los cambios necesarios para construir el IFS, curva de Koch, con código dado por la siguiente tabla:

T	a	b	c	d	e	f	p
1	1/3	0	0	1/3	0	0	0.25
2	1/6	$-\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/6$	1/6	1/3	0	0.25
3	1/6	$\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/6$	1/6	1/3	$\sqrt{3}/6$	0.25
4	1/3	0	0	1/3	2/3	0	0.25

Ejercicio: Hacer los cambios necesarios para construir el IFS, helecho de Barnsley, con código dado por la siguiente tabla:

T	a	b	c	d	e	f	p
1	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
2	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
3	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07
4	0	0	0	0.16	0	0	0.01

Sugerencia para la ventana: $-3 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 11$

Actividad 6 : Simulando lanzamiento de una bola

Objetivo : Utilizar el editor de programas para simular el lanzamiento de una bola de basketball en un aro.

La trayectoria de una bola de basketball – sin resistencia del aire – es modelada mediante las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = v_0 t\cos(\theta);\ \ y(t) = y_0 + v_0 t\sin(\theta) - \frac{gt^2}{2}$$

siendo y_0 la altura inicial de la bola, θ el ángulo de lanzamiento respecto a la horizontal (en grados), v_0 la velocidad inicial de la bola. Si conocemos la altura del aro y la distancia horizontal del lanzador al aro entonces podemos seleccionar los valores de los parámetros y_0, v_0, θ para que la bola entre en la canasta.

El siguiente programa simula el lanzamiento de la bola. El usuario ingresa los valores de los parámetros y el programa se encarga de lanzar la bola y de felicitar a los que hacen lanzamientos certeros. Las unidades para los parámetros son: distancia (piés), tiempo (segundos), ángulo (grados).

```
lanzar()
Prgm
setMode("Graph","PARAMETRIC")
setMode("Angle","DEGREE")
v*t*cos(θ) →xt1(t)
-16*t^2+v*t*sin(ˆ)+h→yt1(t)
ClrHome
ClrIO
FnOff
PlotsOff
0→tmin
1.5→tmax
0.05→tstep
0→xmin
23.8*1.25→xmax
5→xscl
0→ymin
10.2*1.25→ymax
5→yscl
Line 13,10,15,10
Line 13,10,13.4,8.6
Line 14.6,10,14.2,8.6
Line 13.4,8.6,14.2,8.6
Line 13.2,9,14.2,9
Line 13.2,9.4,14.4,9.4
Line 13.8,10,13.8,8.6
Line 15,9.4,15,13
PxlText "Centro canasta", 80,150
PxlText "(x,y)=(13.8,10)", 90,150
Pause
Lbl aa
Prompt h,θ,v
0→t
Lbl bb
Circle xt1(t),yt1(t),0.35
0.05+t→t
If abs(13.75-xt1(t))≤0.35 and abs(10-yt1(t)) ≤0.25
PxlText "...Canasta. Felicitaciones!",60,60
If t≤tmax
Goto bb
Pause
Disp "¿Otro juego? (1=sí)"
Input s
If s=1
```

Goto aa
Text "Presione 2nd QUIT or ESC para finalizar."
EndPrgm

Nota: El centro del aro se encuentra a 10 pies de altura, y a una distancia horizontal de 13.8 pies. ¿Qué estrategia será útil para resolver el problema?

Actividad 7 : El método Simplex
Objetivo : Utilizar el programa Simplex para resolver problemas de programación lineal.

El objetivo de esta actividad consiste en utilizar el programa Simplex, creado por el costarricense Esteban Richmond Salazar, con direcciones papers@costarricense.com, ersiq@costarricense.com. El programa está compuesto por varios subprogramas, de los cuales algunos no son necesarios:

simplex()

Este programa llama a los distintos subprogramas según sea necesario, así no tendrá que conocer la sintaxis de cada uno.

simplxpp(mat,numvart)

Realiza simplex paso a paso sobre la matriz mat numvart le indica al programa el número de variables artificiales, de no existir debe ser 0.

El programa muestra el elemento pivote y las operaciones fila aplicadas. Note que las operaciones indicadas no son aplicadas a una misma matriz, sino que son aplicadas a la matriz que resulta de la operación elemental anterior, es decir a cada matriz se le aplica una sola operación elemental, la matriz mostrada es la que resulta de hacer un solo uno en la columna del elemento pivote.

Nota: mat debe estar en forma canónica. Las letras z y w no se muestran.

simplxsf(mat,numvart)

Muestra la solución óptima (si existe) al aplicar simplex sobre la matriz mat. numvart indica el número de variables artificiales, si no existen debe ser 0.

Nota: mat debe estar en forma canónica

tsimplex()

Le ayudará a crear la tabla del simplex sin necesidad de indicar las variables básicas ni las artificiales.

La función z debe introducirse así: [x1,x2,...,xn,-zø] y de manera similar las restricciones: [x1,x2,...,xn,bm] indicando si es una ecuación o el tipo de inecuación.

La función objetivo debe tener el mismo número de elementos que las restricciones, así que primero determine el número máximo de variables xn sin incluir variables básicas o artificiales y de ser necesario introduzca ceros para las variables correspondientes.

Las restricciones de tipo xi >= 0 no requieren ser incluídas.

EJEMPLOS

Ejemplo 1.

Min z = y - x + 1, sujeto a:

$$-2x + y \leq 2$$
$$x - 2y \leq 2$$
$$x + y \leq 5$$
$$x, y \geq 0$$

Al usar tsimplex() (o seleccionando Crear tabla desde simplex()) introduzca:

Núm de restricciones: 3
Función Objetivo : [-1,1,-1]
Problema : Min

Restricciones
1: [-2,1,2] ≤
2: [1,-2,2] ≤
3: [1,1,5] ≤

El programa creará la tabla:

-2	1	1	0	0	2
1	-2	0	1	0	2
1	1	0	0	1	5
-1	1	0	0	0	-1

llamada mat, con numvart=0

la solución al problema es [4,1,9,0,0]

El valor de z se obtiene al evaluar esta solución en la función z:
z = -(4)+(1)+1 = -2

Ejemplo 2. (Variables artificiales)

Max z = -2x + y + 1, sujeto a:

$$2x + y \geq 4$$
$$-x + y \leq 4$$

$-3x + y \geq -15$
$x \leq 7$
$x, y \geq 0$

Num de restricciones: 4
Función objetivo : [-2,1,-1]
Problema : Max

Restricciones
1: [2,1,4] ≥
2: [-1,1,4] ≤
3: [-3,1,-15] ≥
4: [1,0,7] ≤

tsimplex creará la tabla:

2	1	-1	0	0	0	1	4
-1	1	0	1	0	0	0	4
3	-1	0	0	1	0	0	15
1	0	0	0	0	1	0	7
2	-1	0	0	0	0	0	1
-2	-1	1	0	0	0	0	-4

con numvart=1

la solución óptima en este caso será: [0,4,0,0,19,7]

$z= -2(0)+4(1)+1 = 5$

Para utilizar el programa, consideremos el siguiente problema de optimización:

Problema

Un productor de alimentos para animales fabrica dos clases de grano: A y B. Cada unidad del grano A, contiene 2 gramos de grasa, 1 gramo de proteína y 80 calorías. Cada unidad del grano B contiene 3 gramos de grasa, 3 gramos de proteína y 60 calorías. Suponga que el productor desea que cada unidad del producto final tenga al menos 18 ramos de grasa, al menos 12 gramos de proteína y al menos 480 calorías. Si cada unidad de A cuesta 10 centavos y cada unidad de B cuesta 12 centavos, ¿Cuántas unidades de cada clase de grano debe usar para minimizar el costo?

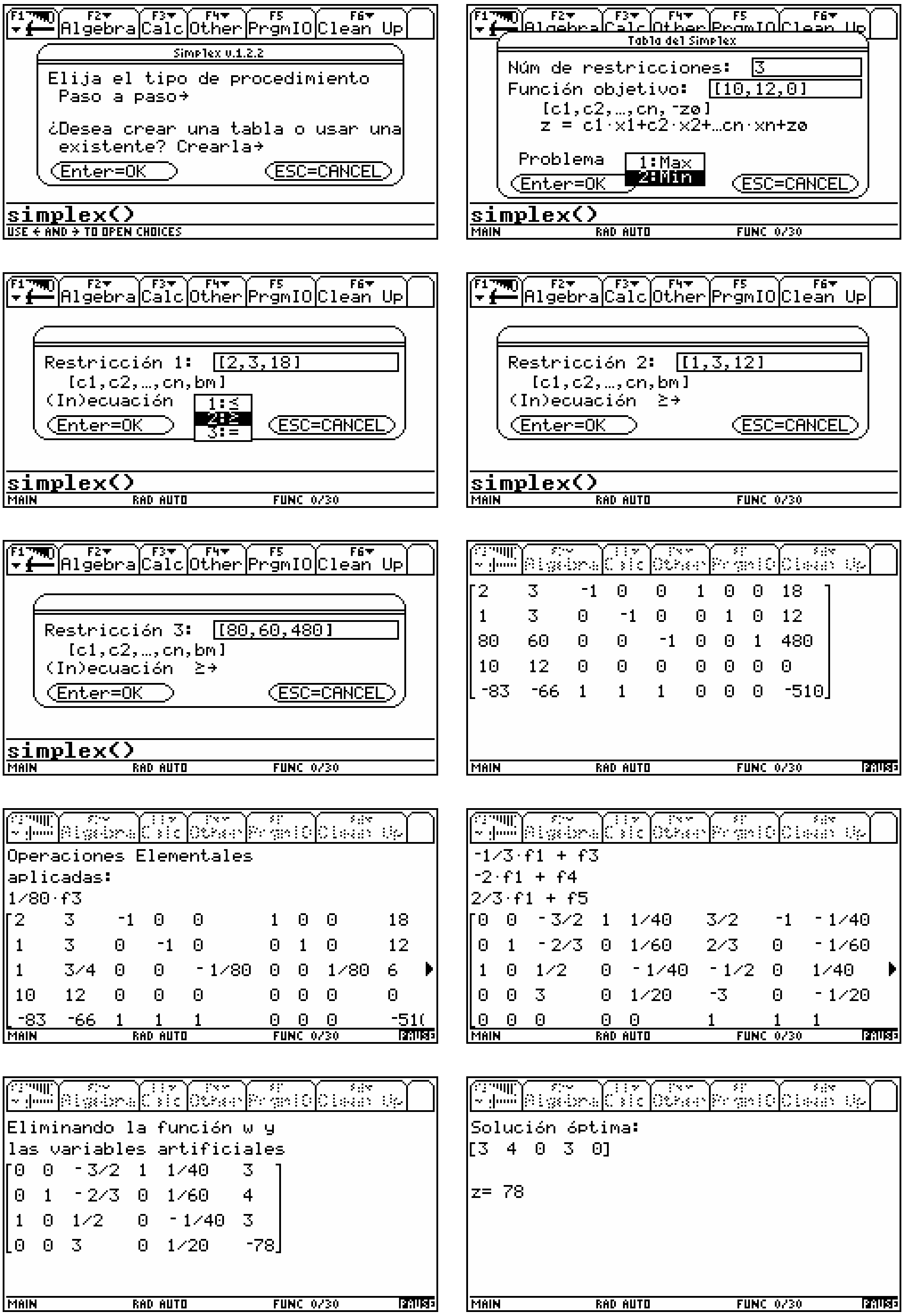
Solución

Sea x la cantidad (unidades) del grano A, y la cantidad del grano B. Nuestro problema consiste en

Minimizar $z = 10x + 12y$
Sujeto a:

$$2x+3y \geq 18$$
$$x+3y \geq 12$$
$$80x+60y \geq 480$$
$$x, y \geq 0.$$

Ejecutando el programa

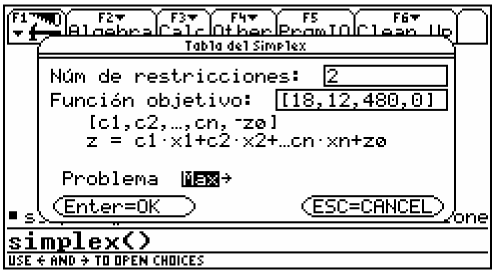


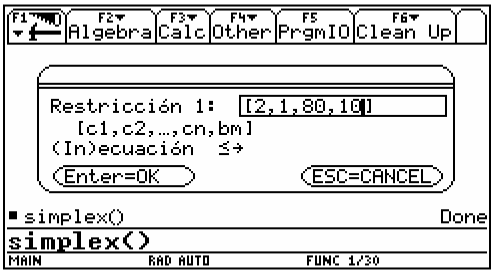
Otra forma de resolver el problema es mediante el planteamiento del problema dual:

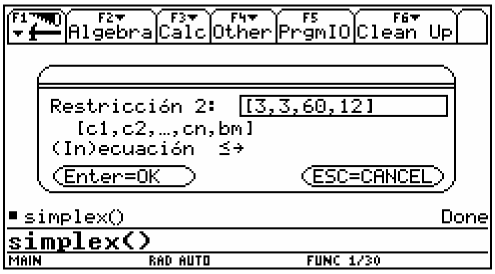
Maximizar $w = 18y_1 + 12y_2 + 480y_3$

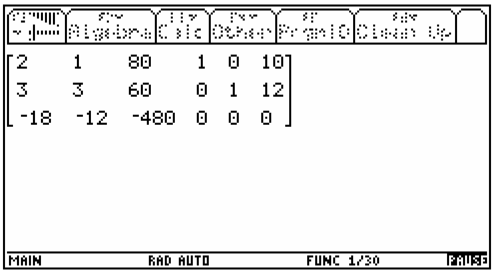
Sujeto a:

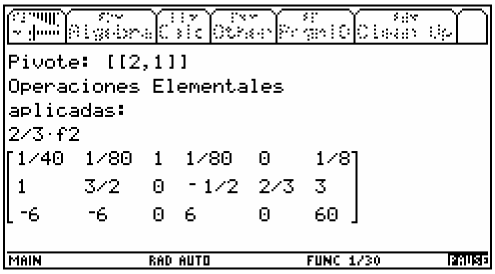
$$2y_1 + y_2 + 80y_3 \le 10$$
$$3y_1 + 3y_2 + 60y_3 \le 12$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0.$$

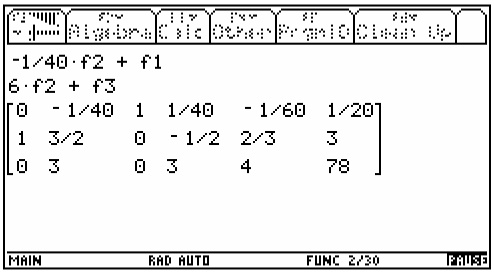












Actividad 8: Integración numérica por métodos de Monte Carlo
Objetivo : Utilizar la calculadora voyage 200 aproximar integrales mediante métodos de Monte Carlo (simulación)

Suponga que la integral $\int_a^b f(x)dx$ está dada por el área de una región **R**. Si encerramos la región **R** por un rectángulo de área **A** y escogemos al azar **N** puntos de **A** y si de ellos **m** puntos caen en la región **R**, entonces (para **N** grande)

$$\frac{m}{N} \approx \frac{Area(R)}{Area(A)} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{Area(A)}.$$

es decir, $\int_a^b f(x)dx \approx \dfrac{mArea(A)}{N}$.

De la misma forma, si $\int_D\int f(x,y)dA$ expresa un volumen de una región **R** sobre D y por debajo de la gráfica de z = f(x,y) y si podemos encerrar la región **R** con un palelepípedo **P** con base D entonces

$$\int_D\int f(x,y)dA \approx \frac{mVol(P)}{N}$$

El siguiente programa aproxima el valor de la integral $\int_0^1\int_0^1 e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ por el método de Montecarlo, encerrando la región de interés con un cubo de arista igual a 1.

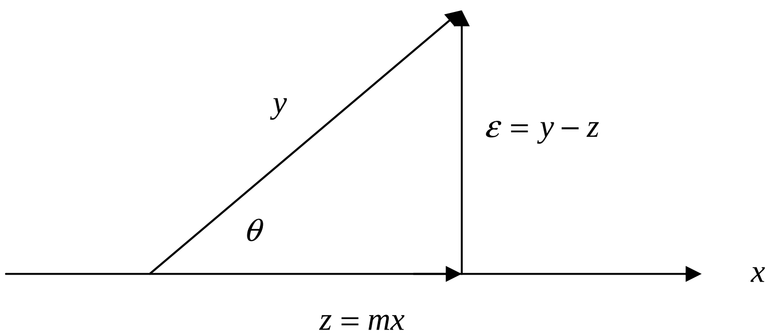
```
integral( )
Prgm
ClrIo
setMode("Exact/Approx", "approximate")
Dialog
Title "Digite el número de puntos"
Request "Número de puntos", N
EndDlog
Local  I, J, K, L, M
0 → M
expr(N) → N
RandSeed rand(2000)
For  I, 1, N
rand( ) → J
rand( ) → K
rand( ) → L
If  L  ≤   e^(-J²-K²)  Then
M+1 → M
EndIf
EndFor
SetMode("display digits", "fix 4")
Disp  M/N
EndPrgm
```

Ejecutar integral( ), para N=20, 30, 50. También podemos cambiar la función del integrando.

Actividad 9 : Regresión
Objetivo : Utilizar la calculadora voyage 200 para obtener curvas de mejor ajuste para un conjunto de datos.

En esta actividad describiremos primeramente el procedimiento para realizar una regresión lineal y posteriormente haremos algunos ejemplos de distintos tipos de regresión.

Supongamos que tenemos un modelo lineal bastante sencillo, con una variable explicativa x y una variable a explicar y, del tipo $y = mx.$ Los valores de x, y son experimentales y dados en una tabla que contiene n entradas. Como ocurre con todo conjunto de datos experimentales, existen errores de estimación, y el problema consiste en utilizar los datos para estimar el mejor valor de m según algún criterio. Para esto, sean x, y vectores de $\Re^n$ cuyas entradas son los datos experimentales, z vector de $\Re^n$ tal que $z = my$, y $\varepsilon = y - z$ el vector del error cometido.
El método de regresión lineal consiste en encontrar el valor de $m \in \Re$ que minimiza la magnitud del error $\|\varepsilon\| = \|z - y\|.$
El vector z más próximo a y es el vector proyección de y a lo largo de $x,$ es decir, el producto escalar $(y - z)\cdot x = 0$. De esta forma $y \cdot x = z \cdot x = mx \cdot x = m\|x\|^2$, y por lo tanto $m = \dfrac{y \cdot x}{\|x\|^2}.$ La medida de la calidad de la aproximación es dada por el escalar $\cos\theta = \dfrac{\|z\|}{\|y\|} = R$. El número $0 \le R \le 1$ se conoce como índice de calidad de la regresión.



El error es mínimo cuando el ángulo entre y y z es cero, es decir, $R = 1$ y es máximo cuando $R = 0.$

Si la relación entre las variables x, y es de la forma $y = mx + b\vec{1}$, con $\vec{1} = (1,1,\cdots,1)^t$, entonces podemos determinar los escalares m, b tomando la media aritmética en ambos lados de la ecuación vectorial del modelo: $\overline{y} = \overline{mx + b} = m\overline{x} + b$, y así

$$y - \overline{y}\vec{1} = m(x - \overline{x}\vec{1})$$

que tiene la misma forma del modelo visto anteriormente, y por lo tanto

$$m = \frac{(y - \overline{y}\vec{1})\cdot(x - \overline{x}\vec{1})}{\left\|x - \overline{x}\vec{1}\right\|^2}, \quad b = \overline{y} - m\overline{x}.$$

Ahora podemos generalizar. Supongamos que tenemos $k+1$ vectores de $\Re^n$: y variable a explicar, $x_1, x_2, \cdots, x_k$ variables explicativas, y que existen escalares $c_1, c_2, \cdots, c$ tales que $y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k$, o en forma matricial,

$$y = \vec{X}\,\vec{b} = (x_1, x_2, \cdots, x_k)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$$

Entonces podemos escribir: $y = \vec{X}\,\vec{b} + \varepsilon$, siendo ε un vector de error de $\Re^n$. Para determinar el vector $\vec{b}$ que minimiza el error, sea $z = \vec{X}\,\vec{b}$, W el subespacio vectorial de $\Re^n$ generado por todas las combinaciones lineales de los vectores $x_1, x_2, \cdots, x_k$. Entonces $z \in W$, y además $y = z + \varepsilon$. El problema consiste en determinar el vector $z \in W$ más cerca de y, es decir, que minimice $\|y - z\|$, y tal vector es la proyección ortogonal del vector y sobre el subespacio W.

Supongamos que los vectores $x_1, x_2, \cdots, x_k$ son linealmente independientes. Entonces tenemos que $(y - z)^t x_i = 0,\ i = 1, \cdots, k$, pues $y - z \perp W$.

Así, $(y - z)^t \vec{X} = 0 \Leftrightarrow \vec{X}^t (y - \vec{X}\,\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{X}^t \vec{X}\,\vec{b} = \vec{X}^t y$, y podemos concluir que $b = (\vec{X}^t \vec{X})^{-1} \vec{X}^t y$, y que $z = \vec{X}\,\vec{b} = \vec{X}(\vec{X}^t \vec{X})^{-1} \vec{X}^t y$.

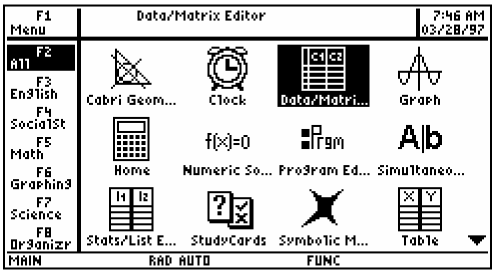
El índice de calidad de la regresión es $R_{yz} = \cos\theta = \dfrac{\|z\|}{\|y\|}$, siendo θ el ángulo entre los vectores y, z.

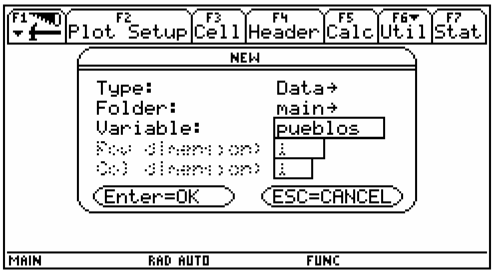
Problema: Estimar la población mundial en el año 2030, para los datos de la tabla

Año	Población mundial (billones)
1950	2.52
1960	2.02
1970	2.70
1980	4.45
1990	5.29

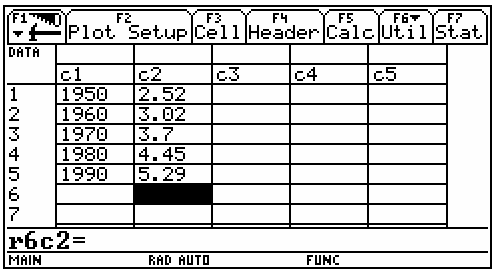
Pasos

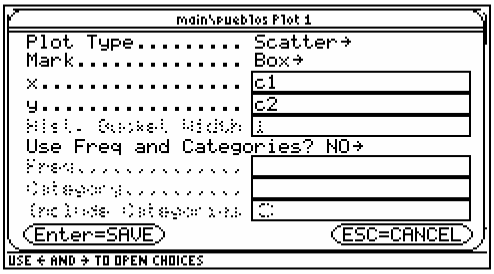
1. Ingrese al editor de datos y matrices presionando O, y seleccionando el ícono correspondiente. Abra un nuevo archivo con nombre **pueblos**.



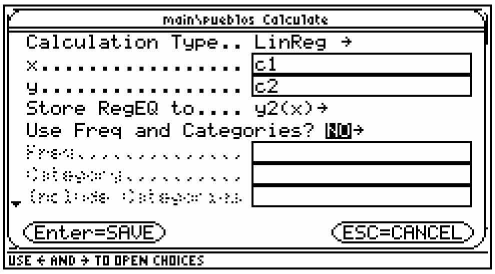


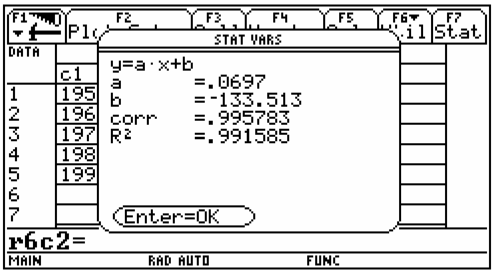
2. Digite los datos de la tabla. Presione Plot Setup, Define, seleccione Scatter, Box, c1 para x, c2 para y.



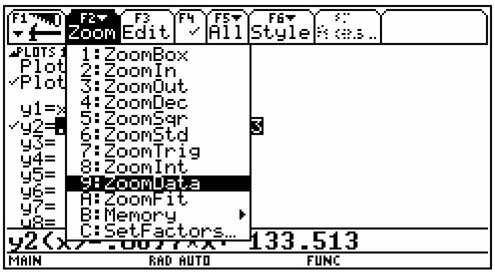


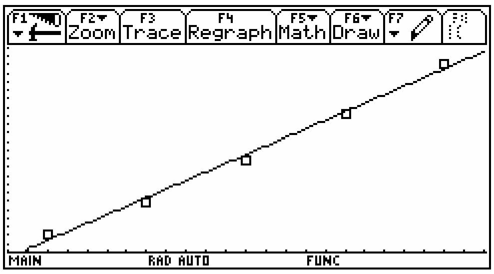
3. Presione N para regresar al editor de datos y matrices.
4. Presione Calc, seleccione LinReg, c1 para x, c2 para y, y2(x) para almacenar la ecuación de regresión obtenida. Los datos quedan almacenados en Plot1 y la ecuación de regresión en y2(x).



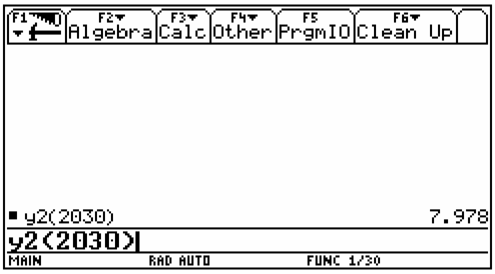


5. Presione ∞ W para ingresar al editor de ecuaciones. Presione 9: ZoomData para graficar los datos y la recta de regresión.





6. Para calcular el valor estimado de la población en el año 2030 podemos volver a la pantalla principal y digitar y2(2030), para obtener 7.982 billones de habitantes.



Actividad 10 : Curiosidades
Objetivo : Utilizar la calculadora voyage 200 para analizar algunas actividades curiosas o conflictivas.

1. Grafique $|x|^{|x|}$, $\left|(x+iy)^{x+iy}\right|$
2. Calcule mod(11,3), mod(11,4), mod(11,0). ¿Alguna sorpresa?
3. ¿Es $\ln x^2 = 2\ln x$? Grafique ambas funciones en una ventana estándar.
4. ¿Es $\sin(\arcsin x) = \arcsin(\sin x)$? Grafique ambas para $-5 \le x \le 5$.
5. ¿Son iguales las gráficas de las funciones dadas parametricamente por
   $x = \cos t,\ y = \sin t$
   $x = \cos t^2,\ y = \sin t^2$?
6. Calcule 0^0.
7. Determine el volumen de la esfera de radio 1 centrada en el origen (mediante integración triple)
   $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx$.

Referencias

De Faria, E. (2000). La tecnología como herramienta de apoyo a la generación de conocimiento. Revista Innovaciones Educativas. Editorial EUNED, año VII, número 12, p. 79-85.

De Faria, E. (2002) Simulación: Un recurso didáctico para la construcción de conceptos matemáticos. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. México, Grupo Editorial Iberoamérica, Vol. 15, año 2002, Tomo 2, p. 821-825.

De Faria, E. (2002). Calculadoras graficadoras: Herramientas útiles en la corrección de errores algebraicos. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. México, Grupo Editorial Iberoamérica, Vol. 15, año 2002, Tomo 2, p. 849-860.

De Faria, E.; Castro A. (2002) La investigación sobre el uso de la calculadora en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Memoria digital VIII Encuentro Nacional de Investigadores en Educación. Costa Rica, Universidad Estatal a Distancia.

Duval, R. (1992) Registres de representation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM Strasbourg.

Gómez, P. (1998). Tecnología y educación matemática. *Revista de Informática Educativa*. Vol.10, No. 1, Colombia.

Martínez C. (1996) Explorando transformaciones de funciones con una calculadora gráfica. Memoria Décima Reunión Centroamericana y Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Puerto Rico.

Professional Standards for Teaching Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics, Octubre 1996.

Ramirez B., Wayland K. (1996). La calculadora TI-92 y su impacto en la enseñanza de ciencias y matemáticas. Memoria Décima Reunión Centroamericana y Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Puerto Rico.

Enseñanza de tópicos de funciones con el uso de la calculadora TI-92

Ricardo Poveda Vásquez[1]
Yuri Morales López[2]

Resumen

Este taller pretende incentivar al profesor de matemáticas para el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la matemática con la calculadora TI-92. A través de guías didácticas de algunos tópicos de funciones procuramos hacer de la clase de matemática una experiencia constructivista. También se discutirá los posibles alcances que pueden tener este tipo de guías didácticas en el sistema educativo costarricense. Además buscamos una concientización del participante en la necesidad de implementar nuevas metodologías en la clase de matemática.

Palabras Claves

Educación matemática, tecnologías modernas, calculadora TI-92, guías didácticas.

Introducción

La globalización y el desarrollo de nuevas tecnologías han causado efectos en todos los campos de la sociedad actual. Algunas veces tienden a confundirse globalización con desarrollo tecnológico. Pero estos términos o movimientos no son sinónimos, aunque la tecnología si tiene un impacto profundo en el desarrollo de la globalización.

La tecnología, en el marco de la globalización, genera oportunidades como: comodidad, comunicación, transporte, agilidad, etc., pero además, ha causado ciertas amenazas como lo es el desempleo e inseguridad.

La educación, no se escapa de los efectos (positivos o negativos) de la alta tecnología. Entendemos por la aplicación de la tecnología en el aula como la implementación de las llamadas “tecnologías modernas” [3]

En particular, la enseñanza de la matemática se ha visto repercutida por los efectos de estas tecnologías. El costo y la accesibilidad de las calculadoras, computadoras, software y

[1] UNA y Liceo Nocturno Alfredo González Flores. Costa Rica. e-mail: rpoveda@costarricense.cr
[2] UNA. Costa Rica. e-mail: yurimoralesl@yahoo.com
3 El término nuevas tecnologías... se trata de sistemas mecánicos, electromecánicos o informáticos que contienen y reproducen información y de sus aplicaciones en los distintos campos y procesos de comunicación. (Medrano Basanta, en Palacios G., 2001).

acceso a Internet a una gran masa de personas, hacen que la cultura y la educación matemática vaya siendo víctima de cambio. Podemos pensar que de la misma manera en que la calculadora científica dejo atrás el uso de las tablas de logaritmos y razones trigonométricas, las calculadoras graficadoras permitirán realizar cambios en el currículo de matemática en el ámbito de secundaria. Por lo anterior se hace indispensable que como educadores nos capacitemos en este tipo de calculadoras.

Este taller busca que los participantes aprendan a manejar los comandos básicos de la calculadora TI-92, principalmente los referentes a la graficación de funciones. Posteriormente los participantes se familiarizarán con la calculadora a través de guías didácticas del tema de funciones.

Metodología

Se trabaja en parejas, cada pareja con su calculadora.

Sesión 1

1. Bienvenida y presentación de los expositores
2. Descripción de la calculadora TI-92
3. Manejo de comandos básicos de graficación con la TI-92.

Sesión 2

1. Entrega de guías didácticas.
2. Desarrollo de las guías didácticas por parte de los participantes.
3. Discusión sobre la actividad.

Sesión 3

1. Entrega de guía didáctica “Resolución de problemas interesantes con la TI-92”
2. Desarrollo de las guías didácticas por parte de los participantes
3. Discusión sobre la actividad y del taller.
4. Cierre del Taller

Bibliografía

De la Rosa, A (2001). La calculadora y los sistemas semióticos de representación. Hacia un aprendizaje de los conceptos matemáticos. En: Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas. Año2. No 1.

Medrano Basanta, G. (1993). Nuevas tecnologías en la Formación. Madrid: Ediciones de la Universidad Complutense.

Poveda, R. y Salas, O. (2002). Uso de la TI-92 en la enseñanza del tema de funciones. En: Memorias del III Festival Nacional y I Festival Internacional de Matemática. Costa Rica. Pp 212-216.

La Incorporación de Tecnologías: el caso de la Inteligencia Artificial como un agente innovador en la enseñanza.

Yuri Morales López.[1]

Abstract: Desde hace bastante tiempo, en nuestro medio se habla de la computadora como herramienta para la innovación El uso de la computadora ha mostrado un efecto positivo en la motivación y aprendizaje de nuestros estudiantes. Uno de nuestros grandes retos es buscar y valorar los posibles empleos que nos ofrece esta herramienta. Una de nuestras tareas es analizar cual es papel que puede jugar la inteligencia artificial en el entorno educativo.

El siglo XX podría describirse como el periodo histórico en el que se han experimentado cambios en todos los planos, pero especialmente en lo que a tecnologías se refiere. Esta ha transformado, y continuará haciéndolo, el campo educativo; de ahí que resulte de particular trascendencia que analicemos las múltiples caras del trinomio educación, matemática y nuevas tecnologías de la información, así como, su relación e impacto.

Una de nuestras más grandes preocupaciones como docentes es la implementación de tecnología en la enseñanza matemática para mejorar la calidad de la educación. Notemos que la incorporación de la tecnología debe responder a la necesidad de propuestas didácticas de mayor calidad y a la tecnología como una herramienta facilitadora para la aprehensión del conocimiento y no a la implementación de la tecnología por sí misma.

> “En lo general, la investigación internacional relacionada con el uso de la educación asistida por computadoras ha arrojado resultados preliminares alentadores: los estudiantes experimentan logros significativos en su aprovechamiento y mejoran su disposición hacia el aprendizaje.”
>
> Organista, J. y Backhoff, E. (2002).

Además, concuerdo con Beirute, L., Amador, M. (2002) al afirmar que “La computadora es el escenario de aprendizaje que ofrece más posibilidades de vías de acceso a la comprensión.”

[1] Profesor Universidad Nacional, Costa Rica. yurimoralesl@yahoo.com

Esto es, desarrollar una práctica educativa de calidad en nuestros colegios y darnos a la tarea conjunta de propiciar un aprendizaje más significativo. Omitir la incorporación de tecnologías es negarnos la oportunidad de decidir por nosotros mismos ¿qué? ¿Cómo? ¿Con qué? Y ¿para qué enseñar?.

En la actualidad no existen muchos estudios en el uso de ciertas tecnologías. Por ejemplo: la inteligencia artificial en la enseñanza dado que este tema es omitido por desconocimiento en nuestro sistema educativo.

Adoptando como marco las ideas anteriores, el presente artículo tiene como objetivo realizar una aproximación para conocer los posibles de la inteligencia artificial en nuestro sistema educativo. Este artículo busca analizar cuales son los resultados obtenidos en pruebas con inteligencia artificial y las posibles aplicaciones en educación, y de qué forma dichas conclusiones pueden contribuir a una toma de decisiones más informada por parte de quienes tienen la responsabilidad definir las rutas de las políticas nacionales e institucionales particularmente en educación; y sobre todo, el docente, quien llevará la tecnología al aula.

Debemos apuntar que la tecnología computacional es solo una herramienta. Por si misma es un gran almacén de información y de algoritmos ejecutables con interfases para el usuario. Que el trabajo que se desarrolle con ella es producto meramente intelectual de quienes la manejan. Por un lado, los profesores deben tener conciencia de que la maquina puede facilitar el acceso al conocimiento e incluso crear situaciones de aprendizaje pero por el momento no podrá desplazar el componente humano de la enseñanza. Por otro lado, no debemos colocar a la computadora a en un pedestal; Existen muchos otros tipos de tecnologías y además se pueden lograr muchas propuestas bajo innovaciones que no involucran un tipo de tecnología especifica. Muchos profesores son herméticos; creen que con la tecnología no se hace matemática sino que se crean vicios. Esta apatía por la tecnología puede deberse a la falta de criterio sobre las mismas.

Sobre Inteligencia Artificial (AI)

Mucho antes del nacimiento de la computadora, nuestros antepasados presagiaron la utilidad de ciertos tipos de tecnologías en la enseñanza. La tecnología juega un gran papel en nuestra vida diaria. ¿Qué podemos esperar si el desarrollo de la tecnología incrementa o disminuye? La respuesta es muy complicada pero afirmaremos por el momento que el desarrollo de las Ciencias de la Computación definirá esta variación.

Hoy en día, La Inteligencia Artificial (IA) es un campo casi virgen dentro de las Ciencias de la Computación. Empecemos definiendo que entenderemos en este artículo como IA; Podemos definir la **inteligencia artificial** como la disciplina cuyo objetivo es lograr que las computadoras actúen con inteligencia y razonamiento humano. "Computadoras con mentes propias". Recordemos que en el desarrollo histórico-filosófico de la humanidad existen diferentes nociones de la inteligencia, así que significado de este término es en sí, relativo.

Estos factores son muy importantes generan una gran cantidad de elementos a considerar, pero el más significativo puede ser ¿cómo valoramos si la computadora obtiene conocimiento? Mas adelante discutiremos el papel de la evaluación en la adquisición de conocimientos por parte del estudiante. El papel actual de la IA en la enseñanza es nulo, esto por lo menos en nuestro país; como afirmamos anteriormente esta disciplina está "en pañales" en el ámbito mundial.

Algunas consideraciones sobre los recursos educacionales que genera la AI.

Empecemos denotando la corriente común en la creación de software en las tecnologías computacionales. Si miramos hacia el futuro no es difícil imaginar una versión muy amplificada del Geometer Skechtpad donde este programa a pasado muchas veces por las manos de su programador para realizarle modificaciones y aumentar las herramientas y utilidades del software. Pero que pensaríamos de un software capaz de auto actualizarse; un software que escoja razonablemente las preguntas que debe realizar a una persona para medir su conocimiento en una o varias áreas y que sea capaz de mejorar esas preguntas.

Veamos ahora varios posibles modelos de simulación de situaciones de la IA orientados a la enseñanza. Esta orientación es una interpretación propia de la realidad; así, deben existir otras orientaciones.

El primer modelo es el de Tests Adaptativos Informatizados (TAI) diseñado para la realización de test donde el programa lo aplica decidiendo si es mejor un test grupal o individual, decida además las preguntas que debe realizar y según los resultados decidir si el test debe ser modificado. El SIETTE es un programa destinado a test que permite al profesor la definición sencilla de test adaptativos, permite a los estudiantes la realización de los mismos a través de la Web y evaluar los tests de manera precisa por el sistema. Por otro lado, completan el artículo con un algoritmo de diagnóstico multidimensional basado en redes bayesianas. Es importante señalas que este programa es poco preciso.

El segundo modelo es el de simulación de alumnos, un software que simule situaciones de aprendizaje donde el desarrollo de la clase sea decidido por el profesor y permita tener la gama de posibilidades que ocurren en el aula. Es posible controlar totalmente las condiciones de la clase; permite comparar los resultados obtenidos con los resultados reales, dado que es imposible disponer del verdadero estado cognitivo de un alumno real y permite evaluar las técnicas antes de ser utilizadas con personas.

El tercer modelo de simulación de situaciones que mencionamos como agente innovador en la enseñanza es el Sistema Tutor Inteligente (STI) que además de cumplir con todos los objetivos del primer modelo debe ser instructor, debe decidir cual método debe aplicar para llenar los espacios cognitivos no alcanzados por medio de ejemplos, ejercicios, problemas o decidir dar una tutoría de la materia enfatizando en los conceptos que lo requieran.

El alcance de STI se proyecta en educación, según McArthur D., Lewis M., Bishay M. (1992) en los primeros pasos este se proyectó en temas simples en matemática de la escuela secundaria, y recientemente en temas más avanzados en matemática y ciencia. STI también ha crecido más allá de la matemática y otros asuntos más formales, para incluir temas en historia, idioma, sociología, la electrónica.

STI puede almacenar gran cantidad de situaciones que representarán decisiones pedagógicas de cómo enseñar con el conocimiento que se debe aprender. Es muy importante aclarar que los STI tienen un sistema de razonamiento lógico y además tiene incorporado operaciones y resultados matemáticos.

Según Beck. J, Stern. M, Haugsjaa E. (1996) el STI debe tener integrado varios componentes:

Modelo de estudiante

El modelo de estudiante recoge información de cada individuo. El propósito es proveer de información al cubo o tomador de decisiones incorporado en el módulo pedagógico.

Módulo pedagógico

Este componente provee un modelo de proceso de enseñanza. Por ejemplo, las decisiones de cuando iniciar un nuevo tema, realizar una práctica, o que tipos de ejercicios se deben presentar. Como mencionamos, el módulo pedagógico decidirá en base con las diferentes necesidades descritas en el modelo de estudiante.

Dominio del conocimiento.

Este componente contiene información del conocimiento que el tutor enseña. Generalmente, este componente enviará información de conocimiento. El cubo de decisiones decidirá las posibles formas de representación de conocimiento.

Módulo de comunicación

Las interacciones con el individuo. Representa el controlador de diálogo, material visual y además, formas de comunicación con personas con necesidades especiales definidas en el modelo de estudiante. El cubo de decisiones, junto al módulo pedagógico tomará decisiones; por ejemplo: ¿Cómo podría presentar el material para lograr un aprendizaje significativo?

Modelo experto

El modelo experto es muy parecido al dominio de conocimiento, sin embargo es mucho más que el almacenamiento de conocimiento, este módulo será capaz de resolver problemas de varias formas posibles. Por ejemplo: mediante representaciones de la vida real con condiciones atractivas en el entorno que se desarrolla el estudiante, con base en aproximaciones y la interacción de varias representaciones o modelos.

Podemos mencionar que los STI pueden estar dirigidos a varias áreas: creación de ambientes de aprendizaje e instructivos. Este último es el más comúnmente utilizado en los sistemas tutores actuales.

Aunque estos sistemas serian muy útiles presentan varias desventajas como la dificultad de realizarlos, los recursos económicos y la mayor de las dificultades es que el programa deben permitir al estudiante la reconstrucción de la matemática.

Además, Según McArthur D., Lewis M., Bishay M. (1992).

- El STI debe tener un dominio relativamente completo del área sujeta. Incluso una comprensión de conceptos erróneos probables generados por el estudiante.

- Los STI tienen un componente pedagógico muy empobrecido. Generalmente, les falta la habilidad de enseñar flexiblemente para adoptar métodos diferentes en situaciones circunstanciales, y para permitirles a los estudiantes usar estilos de aprendizaje diferentes.

Un modelo de simulación alternativa a los STI son los Agentes Tontos; este enfoque en la simulación de situaciones se basa en la situación de: nadie nace aprendido o nadie aprende a caminar sin caerse. En realidad estos son programas de inteligencia artificial muy básicos con una estructura "sí-entonces" en donde los nuevos algoritmos son creados a partir de las soluciones que encuentre el sistema. El dominio de los problemas actualmente investigados en la Universidad de Indiana incluyen el control sensorial y motriz, el estudio del comportamiento social, el modelado de estilos cognitivos interactivos (como el lenguaje) e, incluso, la resolución de problemas complejos integrando a dichos agentes.

Para finalizar, El menor de los mitos y la más grande preocupación del profesor es el temor al desplazamiento del educador por las maquinas, este temor no es nuevo; como la computadora, la radio y la televisión en su momento generaron estos pensamientos. La diferencia de estos avances y la computadora es el componente de inteligencia aprendida. Debemos ser francos, los programas educacionales basados en la inteligencia artificial están siendo probados y es posible que en la próxima década, los alcances sean los esperados y podremos vislumbrar software de IA en las aulas dentro de muy poco.

Hemos mostrado como varios posibles modelos de simulación podrían formar parte de las innovaciones que podemos aplicar en el aula. Antes de acabar debemos advertir dos últimos puntos. Primero que la IA no solo sería un elemento innovador sino un agente innovador que mediante un modelo de simulación decida que tipos de innovación debe realizar a sus métodos de enseñanza para lograr el acto educativo y segundo pero no menos importante es la necesidad de que los profesores formemos parte del equipo que desarrolle este tipo de software y que seamos capaces de integrarnos a la investigación en el área de innovación.

Bibliografía.

Beck. J, Stern. M, Haugsjaa E. **Applications of AI in education.**
Visitado, 23-Junio-2002 15:19:13
Location: www.acm.org/crossroads/xrds3-1/aied.html

Beirute, L. Amador, M. **La computadora: su impacto en el mejoramiento de la autoestima y el rendimiento académico en matemática**. III Festival Nacional y I Festival Internacional de Matemática. San José 2002.

Ferrero B, Arruarte A. , Fernández-Castro, I. , Urretavizcaya, M. **Herramientas de autor para enseñanza y diagnóstico: iris-d**. Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos. Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea. Apdo. 649

Memorias Tercer Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora
Donostia {jibfemab, jiparlaa, jipfecai, jipurlom}@si.ehu.es, 1999

McArthur D., Lewis M., Bishay M. **Some possible futures for artificial intelligence in mathematics education.** Fifth International Conference on Technology in Collegiate Mathematics, Chicago, November 1992.

McArthur D., Lewis M., Bishay M. **The roles of artificial intelligence in education: current progress and future prospects.** Fifth International Conference on Technology in Collegiate Mathematics, Chicago, November 1992.

Montes H., Álvarez F. **¿inteligencia artificial (AI) o razonamiento simulado?** Visitado 09-agosto-2003, 11:45:29
Location: http://www.uaa.mx Profesor Investigador.

Organista, J. y Backhoff, E. **Opinión de estudiantes sobre el uso de apoyos didácticos en línea en un curso universitario**. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 4 (1). Visitado 19-febrero-2002.
Location en el World Wide Web:http://redie.ens.uabc.mx/vol4no1/contenido-organista.html

Programación Utilizando el Software Matlab 5.0

Enrique Vílchez Quesada[1]
Universidad Nacional
Escuela de Matemática

Resumen: El presente trabajo, busca exponer los comandos más importantes del software Matlab 5.0 y su utilidad en la creación de archivos de programación con aplicaciones en cálculo, álgebra lineal y métodos numéricos.

1 Introducción

Hoy en día muchos colegas en las áreas de la enseñanza de la matemática, la matemática pura y sus aplicaciones, utilizan diversos tipos de software como importantes recursos didácticos o de investigación. El Matlab 5.0 es un programa diseñado para realizar múltiples tareas en ambos ámbitos.

Mi intención es presentarle a usted, una parte específica de este software; el diseño de archivos M, utilizados para programar tareas directamente relacionadas con campos en el área de la matemática.

Oros lenguajes de programación que también posibilitan la creación de este tipo de archivos, tales como Pascal y C se diferencian del Matlab, por las grandes dificultades que presentan cuando el programador desea realizar funciones meramente matemáticas.

2 Comandos Básicos

A continuación se resumen algunos comandos básicos del software, que se utilizan en el diseño de archivos M.

2.1 Generales

1. Help: brinda una ayuda al usuario acerca de los comandos del programa.

2. Clock: da información del año, mes, día y hora actuales, con un formato decimal.

3. Fix(clock): da información del año, mes, día y hora actuales, con un formato entero.

4. Date: brinda la fecha actual con el formato día-mes-año.

5. Demo: realiza diferentes demostraciones de la capacidad del Matlab, con respecto a un menú que se le ofrece al usuario.

6. Clc: borra el contenido de la ventana de comandos.

7. =: operador de asignación, se utiliza cuando se desea asignar a una variable un espacio en la memoria.

8. Format long *x*: genera un formato en el cual la respuesta de cualquier variable numérica *x* involucra a lo sumo dieciséis dígitos, por defecto el programa utiliza a lo sumo cinco dígitos. Su sintaxis es la siguiente:

Format long Nombre de la Variable

9. Fprintf: imprime en pantalla mensajes y resultados con un formato especificado por el programador, más adelante, explicaremos cuáles son los tipos de formatos que se pueden utilizar y cuál es su sintaxis.

10. Input: imprime en pantalla cualquier mensaje elegido por el programador. Se diferencia del comando fprintf ya que éste se puede combinar con el operador de asignación "=". Este comando permite generar en un programa datos de entrada. En algunos guiones, suele ocurrir que el usuario debe digitar un dato de entrada que es una cadena alfabética, en este tipo de casos se utiliza $'s'$ dentro del input para indicarlo.

11. %: permite en un guión realizar comentarios, es decir, enunciados aclaratorios de los pasos que se realizan en un programa, sin que sean interpretados como instrucciones. Los comentarios son muy importantes en un guión, pues mejoran la legibilidad del código que se utiliza para su diseño.

12. %*n.mf*: se utiliza para obtener una respuesta numérica con "*n*" dígitos en su parte entera y "*m*" dígitos en su parte decimal. Este comando se combina con el fprintf.

13. *n*: indica un cambio de línea cuando se imprime un mensaje en pantalla. Este comando se combina con el fprintf.

14. !: cancela cualquier tarea que realice el software, puede ser utilizado para depurar un programa.

2.2 Matemáticos

Generales

Se describen en seguida los comandos matemáticos más usuales.

1. Disp: comando que permite imprimir en pantalla cualquier estructura matemática (un número, un vector, una matriz, entre otras).

2. *i*,*j*: símbolos que utiliza el programa para representar el número complejo imaginario puro (0,1)

3. * ,+,-, /, \: operadores aritméticos de multiplicación, suma, resta, división y división inversa respectivamente.

4. >, >=, <, <=, ==, ~ =: operadores condicionales de mayor, mayor o igual, menor, menor o igual, igual y diferente respectivamente.

5. &,|: conectivas lógicas "o" e "y" respectivamente.

6. Feval: comando que permite evaluar una función (del programa, o una creada por el usuario) en los valores que se especifiquen.

Álgebra de Polinomios

El matlab presenta también distintos comandos para realizar operaciones con polinomios, tanto de coeficientes reales como imaginarios. Un polinomio en este software, se representa por medio de un vector fila que contiene sus coeficientes numéricos ordenados de forma decreciente.

Consideremos a continuación algunos comandos básicos en esta línea.

1. Roots(*P*) : calcula todas las raíces del polinomio *P* y las resume en un vector columna.

2. Poly(*r*) : dado un vector columna que contiene todas las raíces de un polinomio, este comando permite recalcular el polinomio expresado como un vector fila.

3. Polyval(*P*, x_0) : evalúa un polinomio *P* en un valor x_0.

4. Polyfit: una función polinómica de grado "*n*" está determinada de forma única si se conocen de ella "*n*+1" pares ordenados. Este comando permite encontrar esta función dados los "*n*+1" puntos correspondientes.

5. Poly_itg(*P*) : calcula la integral de un polinomio *P*.

6. Polyder(*P*) : calcula la derivada de un polinomio *P*.

7. Poly_add(*P*,*Q*) : suma dos polinomios *P* y *Q*.

8. Conv(*P*,*Q*) : multiplica dos polinomios *P* y *Q*.

9. Deconv[*P*,*Q*] : calcula el cociente y el residuo respectivamente, de la división de *P* entre *Q*.

Vectores y Matrices

Los siguientes comandos se utilizan particularmente para realizar diversos tipos de tareas con vectores y matrices.

1. $x \pm y$: suma o resta los vectores o matrices *x* y *y*.

2. *x* .* *y*: es un vector o matriz cuyas componentes son el resultado de los productos de las componentes correspondientes.

3. *x*./*y*: es un vector o matriz cuyas componentes son el resultado de las divisiones de las componentes de *x* entre las componentes de *y* de forma correspondiente.

4. *x*.^*n*: eleva a la *n* cada componente del vector o matriz *x*.

5. x' : determina la matriz transpuesta de *x*.

6. Lenght(*x*) : brinda el tamaño del vector *x*.

7. Size(*x*) : brinda el tamaño de la matriz *x*.

8. * : operador para multiplicar matrices o bien un escalar por una matriz.

9. A= zeros(n,m) o A= zeros(n) : crea una matriz nula A de tamaño $n \times m$ o bien $n \times n$ respectivamente.

10. A= eye(n) : genera en espacio de memoria una matriz A identidad de orden n.

11. A= ones(n,m) : crea una matriz de tamaño $n \times m$ donde todas sus entradas son unos.

12. Rand(n,m) : genera una matriz de entradas seudo aleatorias de tamaño $n \times m$.

13. Inv(A) : calcula la matriz inversa de A, en caso de ser singular el programa lo indica al usuario.

14. Det(A) : calcula el determinante de la matriz cuadrada A.

15. Poly(A) : determina el polinomio característico de la matriz A.

16. Eig(A) : calcula los eigenvalores o valores propios de A.

Tanto los comandos zeros como ones aceptan como argumento el comando size.

La mayor parte de los comandos que utiliza el Matlab, pueden terminarse con “,” o “;". Con “,” si se desea imprimir la ejecución de la instrucción, “;” si no se desea dicha impresión. Además los puntos suspensivos, permiten separar comandos de instrucción cuando estos se escriben en una misma línea.

3 Funciones del Matlab

El Matlab es un software diseñado principalmente para cumplir dos tipos de tareas globales; las de cálculo matemático directo y las tareas de programación. Éste desempeña sus tareas de cálculo matemático utilizando una serie de funciones internas que se pueden clasificar en dos grupos, las matemáticas y las funciones que realizan una tarea.

3.1 Matemáticas

Estas se pueden resumir en la siguiente tabla:

Tipo	Comando	Función
Trigonométricas	sin (x)	Seno de x
	cos (x)	Coseno de x
	tan (x)	Tangente de x
	*a*sin (x)	Arco seno de x
	*a*cos (x)	Arco coseno de x
	*a*tan (x)	Arco tangente de x
Elementales	*abs*(x)	Valor absoluto de x
	sqrt(x)	Raíz cuadrada de x
	real(x)	Parte real de un número complejo x
	imag(x)	Parte imaginaria de un número complejo x
	round(x)	Redondea x al entero más cercano

	fix(*x*)	Redondea *x* hacia cero
	floor(*x*)	Redondea *x* hacia $-\infty$
	ceil(*x*)	Redondea *x* hacia $+\infty$
	exp (*x*)	e^x
	log (*x*)	ln *x*
	log 10(*x*)	$\log_{10} x$

3.2 Tareas

Comando	Función
sort(*x*)	Ordena en forma creciente las componentes de un vector *x*
sum(*x*)	Suma las componentes de un vector *x*
max(*x*)	Halla la componente máxima de un vector *x*
min(*x*)	Halla la componente mínima de un vector *x*
rand(*x*)	Genera números seudo aleatorios
num2str(*x*)	Transforma un número *x* a una cadena de caracteres
int2str(*x*)	Transforma un valor a una cadena que solo contiene la parte entera del número *x*

4 Archivos M y Estructuras de Control

Un archivo M es un tipo de archivo propio de este software, que permite ejecutar una tarea o una secuencia de tareas programadas principalmente en base a los comandos que utiliza el Matlab.

Existen dos tipos de archivos M; los de guión y los de función. Un archivo M de guión se define como un programa principal, en tanto que uno de función corresponde a un subprograma, subrutina o función en los lenguajes de programación tradicionales.

En el diseño de cualquier archivo M además de utilizar comandos propios del Matlab, el programador puede recurrir a archivos de función que ha creado con anterioridad.

Para correr un archivo M, el usuario debe escribir en la ventana de comandos el nombre que se le dió al archivo y teclear la instrucción enter.

El software también dispone de una serie de estructuras de control condicionales y de repetición. El uso de estas estructuras en el diseño de un archivo M, es fundamental para programar con mayor eficiencia las tareas de interés.

4.1 Estructuras de Control Condicionales

1. If (Si)

   Sintaxis:

   If <u>Condición</u>
           Argumentos;
   end

2. If, else (Si, sino)

Sintaxis:

if Condición

    Argumentos;

Else

    Argumentos;

end

4.2 Estructuras de Control de Repetición

1. While (Mientras)

Sintaxis:

While Condición

    Argumentos;

end

2. For (De)

Sintaxis:

For Variable de la Condición = Valor inicial *a* : Valor final del ciclo *b*

    Argumentos;

end

3. Break: comando que se utiliza para terminar la ejecución de un ciclo for o while.

5 Archivos M para Resolver Problemas en Cálculo, Álgebra Lineal y Métodos Numéricos

A continuación se brindan algunos ejemplos de archivos M que resuelven problemas relacionados con diversas áreas de la matemática.

1. La distribución de un fluido cerca de una superficie plana está dada por:

x mm	*y mm*
0	0
2	9.8853
4	15.4917
6	18.2075
8	19.0210

Halle un polinomio $P(x)$ que estime la posición del fluido. Evalúe todas las derivadas de $P(x)$ en x=0.

Solución:

Un guión para resolver este problema se detalla a continuación:

```
%Interpolación de un conjunto de pares ordenados.

%Datos de interpolación.

x=[0 2 4 6 8];

y=[0 9.8853 15.4917 18.2075 19.0210];

%Interpolación polinómica de la función.

p=polyfit(x,y,length(x)-1);

%Cálculo de las derivadas de p.

k=p;

A=zeros(4);

for i=1:4

k=polyder(k);

for j=i:4

A(i,j)=k(j+1-i);

end

end

%Evaluación de las derivadas.

for i=1:4

B(i)=polyval(A(i,:),0);

end

%Impresión de las derivadas.

fprintf(' Las aproximaciones de las derivadas del orden 1 hasta el orden 4

de la \n función; evaluadas en cero son:\ n\ n' )

disp(B)
```

2. Elabore un guión para resolver un sistema de ecuaciones lineales cuadrado de cualquier tamaño, mediante el método de eliminación de Jordan-Gauss, además el programa debe calcular el determinante de la matriz de coeficientes.

Solución:

Un guión para resolver este problema es el siguiente:

```
%Resolución de un sistema de ecuaciones cuadrado.

clear

%Ingreso del sistema de ecuaciones.

n=input(' Digite el número de ecuaciones del sistema cuadrado: ');

fprintf(' \ n\ nDigite la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones:\ n')

for i=1:n

for j=1:n

A(i,j)=input(' ');

end

end

fprintf(' \ nDigite la matriz de términos constantes del sistema de ecuaciones:\ n')

for i=1:n

B(i)=input(' ');}

end

%Declaración de la matriz aumentada, que se utiliza en el método

%de eliminación de Jordan-Gauss.

for i=1:n}

for j=1:n+1

if j~ =n+1

E(i,j)=A(i,j);

else

E(i,j)=B(i);

end

end

end

%Ejecución del método de Jordan-Gauss.

n1=0;

r=1;

for j=1:n

%Método del pivoteo.

w=E(:,j);

T=w(j:n);

k=max(abs(T));

for i=j:n

if k==abs(T(i+1-j))

m=i;

break;

end

end

%Conteo del número de operaciones de pivoteo.

if m~ =j

n1=n1+1;

%Intercambio de filas.

y=E(j,:);

E(j,:)=E(m,:);

E(m,:)=y;

end

if E(j,j)~ =0

if j>1

for i=1:j-1
```

```
E(i,:)=((-E(i,j)/E(j,j))* E(j,:))+E(i,:);
end
end
if j<n
for i=j+1:n
E(i,:)=((-E(i,j)/E(j,j))* E(j,:))+E(i,:);
end
end
else
fprintf(' La matriz de coeficientes es singular por lo tanto su determinante
es cero.\ n' )
r=0;
break;
end
end
if r~ =0
%Determinante de la matriz de coeficientes.
w=1;
for i=1:n
w=E(i,i)* w;}
end
determ=(-1)^n1* w;
%Solución del sistema de ecuaciones.
for i=1:n
x(i)=(E(i,i)\ 1)* E(i,n+1);
end
fprintf(' El determinante de la matriz de coeficientes es: %7.5f\ n' ,determ)
fprintf(' \ nLa solución del sistema de ecuaciones es:\ n\ n' )
for i=1:n
fprintf(' %7.5f' ,x(i))
end
end
```

3. Elabore un guión que calcule la inversa de cualquier matriz cuadrada invertible, o bien, indique que la matriz es singular.

Solución:

Un posible guión es el siguiente:

```
%Guión para calcular la matriz inversa de una matriz.
clear
r=1;
%Almacenamiento de la matriz.
n=input(' Digite el tamaño de la matriz para la cual usted desea hallar
su inversa: ' );
fprintf(' \ n\ nDigite las entradas de la matriz:\ n' )
for i=1:n
for j=1:n
A(i,j)=input(' ' );
end
end
Id=eye(n);
```

%Declaración de la matriz aumentada, utilizada en el método de elimi-

nación de Jordan-Gauss.

```
for i=1:n
for j=1:2* n
if j<=n
E(i,j)=A(i,j);
else
E(i,j)=Id(i,j-n);
end
end
end
%Ejecución del método de Jordan-Gauss.
for j=1:n
%Método del pivoteo
w=E(:,j);
T=w(j:n);
k=max(abs(T));
for i=j:n
if k==abs(T(i+1-j))
m=i;
break;
end
end
%Intercambio de filas.
if m~ =j
y=E(j,:);
E(j,:)=E(m,:);
E(m,:)=y;
end
if E(j,j)~ =0
E(j,:)=(1/E(j,j))* E(j,:);
if j>1
for i=1:j-1
E(i,:)=(-E(i,j)* E(j,:))+E(i,:);
end
end
if j<n
for i=j+1:n
E(i,:)=(-E(i,j)* E(j,:))+E(i,:);
end
end
else
fprintf('\ nLa matriz no es invertible.\ n')
r=0;
break;
end
end
%Matriz inversa.
if r~ =0
for i=1:n
for j=n+1:2* n
invA(i,j-n)=E(i,j);
end
end
%Impresión de la matriz inversa.
fprintf('\ n\ nLa matriz inversa es:\ n\ n')
for i=1:n
```

```
for j=1:n
fprintf(' %7.4f ',invA(i,j))
end
fprintf('\n')
end
end
```

6 Conclusiones

El uso de software matemático se está convirtiendo en casi una necesidad para docentes e investigadores, la programación en particular ocupa un lugar preponderante en esta línea. Con este trabajo, se ha presentado una opción más, con que pueden contar los colegas involucrados con tareas propiamente en el área de la matemática o sus aplicaciones.

7 Bibliografía

1. Barrantes, H. (1993) *Elementos de Álgebra Lineal*. Editorial: EUNED.
2. Faires B. (1996) *Análisis Numérico*. Editorial: Iberoamericana. México.
3. Golubitsky, M. & Dellnitz, M. (2001) *Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales, con uso de Matlab*. Editorial: Thomson. México.
4. Grossman, S. (1996) *Álgebra Lineal*. Editorial: McGraw-Hill.
5. Hoffman, K., & Kunze, R. (1971) *Álgebra Lineal*. Editorial: Prentice-Hall Hispanoamericana.
6. Kolman, B. (1997) *Álgebra Lineal con Aplicaciones y Matlab*. Editorial: Pearson.
7. Nakos, G. (1999) *Álgebra Lineal con Aplicaciones*. Editorial: Thomson.
8. Nakamura, S. (1997) *Análisis Numérico y Visualización Gráfica con Matlab*. Editorial: Prentice Hall. México.
9. Soto, M. & Vicente, J. (1995) *Álgebra Lineal con Matlab y Maple*. Editorial: Prentice Hall. México.

Sólido manía Desarmable

Johanna Brenes Ortega

Ana Magali Salazar Ávila

El presente taller, basado en la construcción de poliedros utilizando ligas y cartulina satinada, sirve para ilustrar hasta qué punto los poliedros están próximos a nosotros y siguen siendo objetos matemáticos fascinantes sobre los que merece la pena seguir avanzando en su estudio y utilización. Al finalizar la actividad se pretende favorecer la discusión y el análisis de los resultados obtenidos así como posibles usos en el trabajo de aula que contribuya a cambiar el estereotipo tan negativo que se tiene sobre la matemática. "*La matemática no es aplicable a la vida cotidiana, es difícil y aburrida.*"

El propósito fundamental de esta actividad es facilitar la capacidad de identificar los modelos geométricos tridimensionales, así como sus partes, de una forma significativa y diferente a lo que tradicionalmente se hace en el aula. Con esta actividad se logra abrir camino a la imaginación para crear y dar utilidad a dichas creaciones, resaltando la importancia de estos modelos en la vida diaria. Y más generalmente en aspectos como: desarrollar habilidades intelectuales y motoras, compartir y transmitir nuestra emoción y amor hacia la matemática educativa, interacción del conocimiento del educando y del educador.

Sabemos que el mundo bidimensional (ancho y altura) de la geometría plana no es suficiente para explicar el mundo en que vivimos, pues éste posee tres dimensiones. Debemos considerar no sólo el norte, sur, este y oeste, sino, también arriba y abajo. Para explicar este mundo tridimensional (ancho, altura y largo) se ha desarrollado la geometría del espacio, más concretamente la estereometría, la cual es usada en la construcción de maquinaria, rascacielos, aeroplanos, puentes y automóviles, por ejemplo, pero también para explicar los fenómenos del Universo.

Los poliedros regulares, por ser figuras tridimensionales concretas que se encuentran fácilmente en el entorno y que se pueden presentar de distintos colores, además de ofrecer un ambiente más atractivo para que los estudiantes disfruten de su construcción, son los de mayor interés para ellos. Por tal razón, es conveniente que se introduzca su uso en el aula

Universidad Nacional, Costa Rica
gatijoy@yahoo.com
asalazaravila@yahoo.com

para facilitarles un mayor interés, pero sobre todo, un aprendizaje más contextualizado y por tanto más significativo.

De experiencias anteriores se tienen evidencias de que cuando se usan construcciones de modelos tridimensionales, la mayoría de los estudiantes muestran fascinación inmediata por este tipo de actividad, sorprendiendo al docente por la calidad de trabajos que son capaces de realizar con los modelos y de las relaciones matemáticas que logran establecer en el proceso. Además, proporciona un alto nivel de abstracción, y por ende, mejora y amplía el conocimiento, al visualizar el espacio tridimensional que muchas veces es difícil de percibir en forma abstracta. También enfatiza el desarrollo de construcciones mentales más creativas, así como mayor exactitud y precisión. Aún más, fomenta la perseverancia, la dedicación y la concentración continua, la iniciativa, la cooperación, el compañerismo, la solidaridad, la creatividad, y la imaginación, entre otros valores, cualidades y destrezas. Al mismo tiempo contribuye en el desarrollo de destrezas psicomotoras, que generalmente son pocos enfatizadas en el contexto de aula.

Es muy sencillo dar al estudiante simplemente una hoja donde el educador muestre los "dibujos" de cuerpos sólidos, sus partes, fórmulas y una lista de ejercicios. Pero no nos cuestionamos ¿cuánto pueden aprender? O si ¿aprendieron realmente?. El aprendizaje se vuelve más significativo cuando el educando tiene una interacción más directa con el sólido, en el momento de construirlo y de interactuar con sus compañeros, de generar "discusión matemática" y de evidenciar lo que realmente significan esas fórmulas, memorizadas generalmente.

Debe reconocerse que actividades de este tipo requieren de mayor tiempo para su preparación por parte del docente, sin embargo brinda ventajas al ofrecer un aprendizaje significativo y recíproco, pues no sólo los estudiantes adquieren grandes beneficios, también nosotros como educadores. No debemos olvidar nuestra misión de ser guías en el desarrollo de conocimiento de los estudiantes y por ende a un aprendizaje más duradero.

Universidad Nacional, Costa Rica
gatijoy@yahoo.com
asalazaravila@yahoo.com

Contamos con una "matemática viva" la cual aplicamos, tocamos, sentimos y disfrutamos; recordemos que una herramienta importante es la práctica en casa, pero no del tipo tradicional y monótono, sino de una manera creativa, atractiva e interactiva por parte del estudiante, utilizando el entorno. Por ejemplo, utilizando cajas de cereal o latas de atún para calcular áreas y volúmenes, entre otros.

Los textos de apoyo y tecnología son muy útiles para facilitar el conocimiento, pero no son las únicas herramientas disponibles para alcanzar el aprendizaje, nos corresponde a los docentes buscar esas diversas maneras y la forma de relacionarlas logrando la motivación del estudiante. El logro de los objetivos depende del amor y de la disposición con que desempeñemos nuestra labor. ¿por qué seguir "enseñando" tradicionalmente, si existen tantas otras formas más efectivas?

"Un alumno se supera en base, a lo que se le exija" Profesor Jaime Escalante
"Y un profesor en base a lo que se proponga" Johanna Brenes

Materiales

Cartulina satinada de diversos colores	Tijeras
Lápiz	Reglas
Borrador	Ligas

Bibliografía

Meneses Rodríguez, R. Matemática 10: Enseñanza – Aprendizaje. Tercera edición, San José, Costa Rica. Ediciones FARBEN, 1998.

Salsa, F.; Ulate, M. Camino al éxito: Matemática 9. Primera edición, San José, Costa Rica. Mcgraw – Hill Interamericana, 2002.

Enciclopedia Audiovisual – Educativa. Volumen 2, Barcelona España. OCEANO MULTIMEDIA, 1995.

Software Poly 1.07

Universidad Nacional, Costa Rica
gatijoy@yahoo.com
asalazaravila@yahoo.com

Ambientes de geometría dinámica en actividades de planteamiento y justificación de conjeturas

Christian Enrique Páez Páez
Estudiante de Maestría del CINVESTAV, México
Octubre del 2003

Preámbulo

De investigaciones realizadas con software de geometría dinámica, Kaput (1992) indica que programas como *Sketchpad* o *Cabri* permiten: (***i.***) realizar construcciones geométricas de manera sencilla que proporcionan una fácil revisión, (***ii.***) realizar cálculos sencillos, además de propiciar formas idóneas para comparar y recordar medidas y (***iii.***) capturar construcciones de figuras particulares como un procedimiento general, que puede ser repetido en otras figuras que sean de la misma clase que la original (*macros*).

Asimismo, otras características son: (***iv.***) realizar representaciones tabulares (Santos, 2001), (***v.***) efectuar representaciones gráficas de funciones (Balacheff y Kaput, 1996) y (***vi.***) experimentar con lugares geométricos de puntos en algunas transformaciones geométricas (NCTM, 2000).

Descripción del taller

El taller tiene como objetivo principal iniciar a educadores en el uso de nuevas tecnologías como herramienta de enseñanza y aprendizaje en Educación Matemática; específicamente, se considera la incorporación de software de geometría dinámica en esta disciplina, por una parte, en el diseño de actividades que promuevan la formulación de conjeturas y, por otra parte, en la introducción y fortalecimientos del razonamiento deductivo en estudiantes de secundaria.

Durante el desarrollo de las sesiones del taller no sólo se busca el diseño de actividades sino que, además, se intenta discutir la pertinencia de la incorporación de dichas tareas en el salón de clases; para esto se toman en cuenta las posibles estrategias que los estudiantes pueden realizar, y el tipo de argumentos que los profesores consideran como válidos en la solución de algunas actividades dentro del campo educativo.

Pertinencia en el y uso de software de geometría dinámica

El software de geometría dinámica es un recurso innovador e importante en el proceso de aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes, este tipo de software permite la exploración, la construcción de figuras con ciertas propiedades, la visualización de estas propiedades y la posibilidad de transformar las construcciones en tiempo real, de esta manera se logra que los estudiantes investiguen y aprendan matemáticas (Arcavi y Hadas, 2000, p. 25).

El desarrollo de recursos y estrategias propias del quehacer matemático, como descubrir relaciones, generalizar resultados, plantear conjeturas y argumentar para explicar resultados, entre otros, es una tarea que se puede favorecer con el empleo de software de geometría dinámica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, Santos y Moreno (2001) resaltan que el uso de la tecnología con el tiempo se va convirtiendo en una herramienta poderosa para que los estudiantes: a) le den sentido a la información, b) realicen conjeturas y c) examinen diferentes estrategias en la resolución de problemas.

Por otra parte, Fey (1990) concluye que el uso de nuevas herramientas tecnológicas puede mejorar la comprensión conceptual del estudiante, la resolución de problemas y las actitudes con respecto a las matemáticas, sin aparente perjuicio al aprendizaje de destrezas tradicionales.

Tiempo

El taller consta de 6 horas distribuidas en 3 sesiones (2 horas cada sesión).

Público

Profesores de enseñanza secundaria en adelante; no es necesario conocimientos previos en el uso de software de geometría dinámica (como *Sketchpad* o *Cabri*).

Requerimientos

Laboratorio equipado con microcomputadoras que tengan instalado el programa *The Geometer's Sketchpad 4.05*, preferiblemente una computadora por participante; proyector de imagen de computadora y pizarra.

Programa de trabajo

En la siguiente tabla se resume el trabajo a realizar en las seis horas del taller; algunas actividades se pueden consultar en *de Villiers (1999)*.

Sesión	Objetivos	Ejemplos del tipo de actividades	Tiempo (*horas*)
1	**a)** Iniciación en el uso de software de geometría dinámica. **b)** Familiarización en relación con los comandos y las herramientas de *Sketchpad*. **c)** Realizar construcciones geométricas básicas.	**a)** Trazar círculos, segmentos, rectas, rayos. **b)** Trazar rectas paralelas y perpendiculares. **c)** Determinar puntos medios de segmentos. **d)** Construir rectas notables en triángulos. **e)** Calcular medidas de segmentos y de ángulos. **f)** Determinar relaciones con algunas medidas utilizando la calculadora del software.	**2**
2	**a)** Desarrollar actividades que involucren construcciones geométricas avanzadas. **b)** Discutir algunas actividades de resolución de problemas que se pueden favorecer con el uso de software de geometría dinámica.	**a)** Construir un rectángulo de perímetro fijo. **b)** Construir un cuadrado dado un segmento que represente su diagonal. **c)** Realizar la construcción de un triángulo isósceles utilizando al menos cuatro procedimientos diferentes. **d)** Construir dos segmentos que sean tangentes a una circunferencia y que se intersequen; demostrar que dichos segmentos son congruentes.	**2**
3	**a)** Diseñar actividades que promuevan el planteamiento de conjeturas por parte de los estudiantes. **b)** Analizar algunas estrategias que pueden ayudar a los estudiantes en la justificación de resultados.	**a)** Construir un triángulo en el que, al arrastrar uno de sus vértices, su área sea invariante. **b)** Determinar el polígono que se obtiene al unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera. **c)** Construir segmentos paralelos a los lados de un rectángulo, desde un punto cualquiera de su diagonal. **d)** Construir el cuadrilátero que se forma con las intersecciones de las bisectrices de un paralelogramo.	**2**

Referencias

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer Mediated Learning: An Example of An Approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5*, 25-45.

Balacheff, N. y Kaput, J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education,* pp. 469-501. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fey, J. (1990). Quantity. En L. Steen (Ed.), *On the Shoulders of Giants. New Approaches to Numeracy*, pp. 61-94. Washington, DC, USA: National Academy Press.

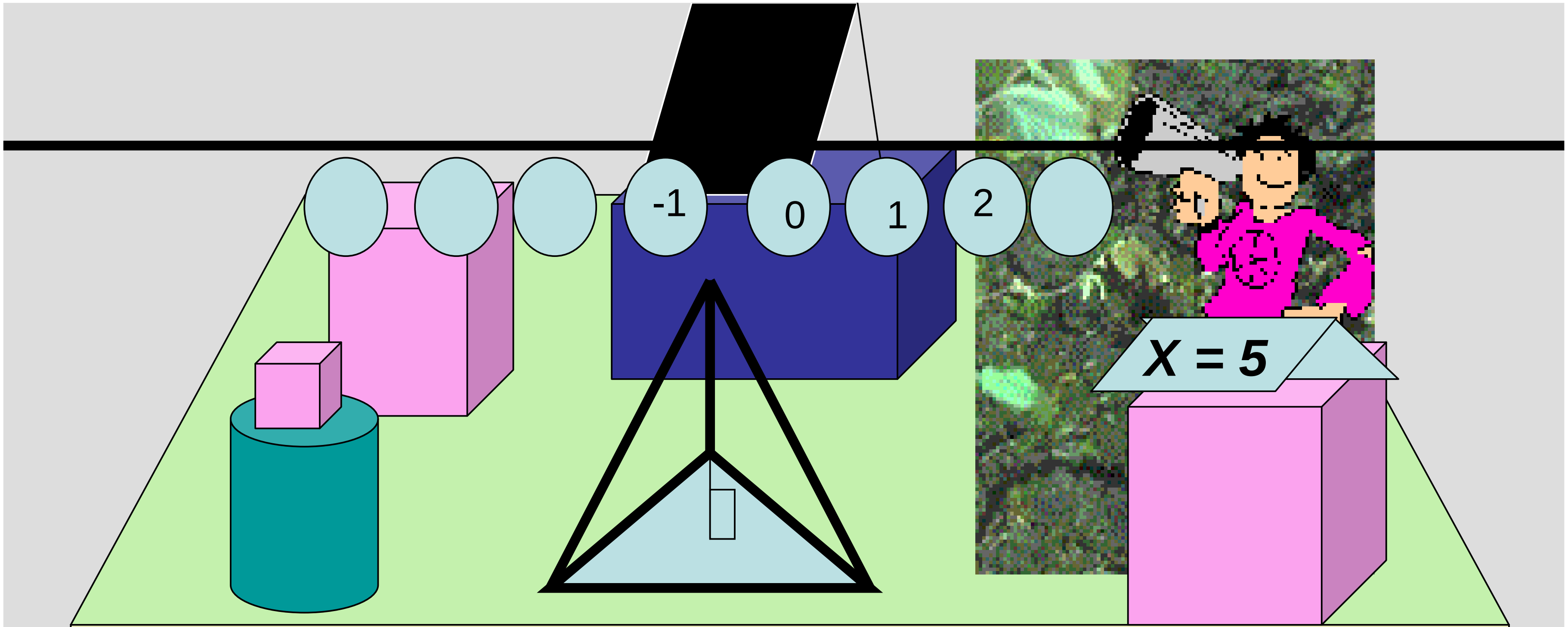
Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En D. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 515-556. New York, USA: Macmillan.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA, USA: National Council of Teacher of Mathematics.

Santos, M. (2001). Potencial Didáctico del Software Dinámico en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Avance y Perspectiva, 20,* 247-258.

Santos, M. y Moreno, L. (2001). Proceso de Transformación del Uso de Tecnología en Herramientas para Solucionar Problemas de Matemáticas por los Estudiantes. *Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

de Villiers, M. (1999). The Role and Function of Proof with Sketchpad. En M. de Villiers (Ed.), *Rethinking Proof with The Geometer's Sketchpad*, pp. 3-10. Emeryville, CA, USA: Key Curriculum Press.



LA MATEMATICA LLENA DE MOVIMIENTO MÚSICA Y COLOR

CADA LECCIÓN SERA COMO ORGANIZAR UNA FIESTA. POR SUPUESTO SIN MUCHO GASTO, PERO ENTRE TODOS PODEMOS HACER DE LA CLASE UN LUGAR DE ENTRETENIMIENTO Y APRENDIZAJE AL MISMO TIEMPO.

LOS NÚMEROS, LAS FIGURAS , LAS OPERACIONES Y LAS REGLAS COBRAN VIDA CON EL TALENTO Y EL CONOCIMIENTO DEL MAESTRO.

TODOS LOS PROFESORES Y MAESTROS DE MATEMÁTICA TENEMOS UN RETO MAYOR QUE EL DE ENSEÑAR FÓRMULAS , OPERACIONES, PROCEDIMIENTOS O LO QUE TENGA QUE VER CON LA MATERIA.

ES EL DESAFÍO DE MOTIVAR PERMANENTEMENTE Y AL MISMO TIEMPO CONVENCER DE LA NECESIDAD E IMPORTANCIA DE SABER BIEN SOBRE LAS APLICACIONES Y UTILIDADES DE ESTA DISCIPLIN A.

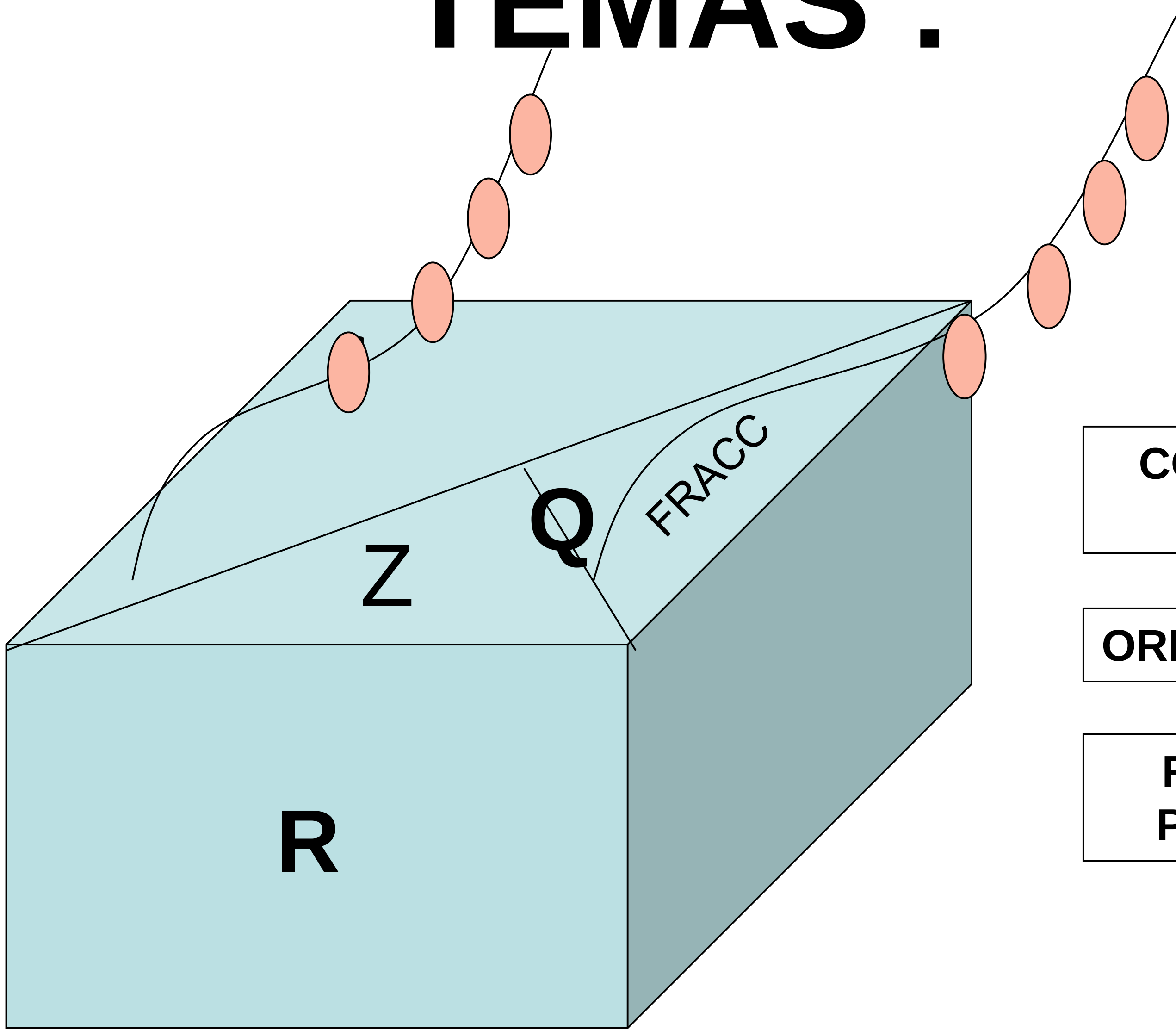
PERO NO NOS BASTA CON EL CONOCIMIENTO ADQUIRIDO A LO LARGO

DE NUESTRA FORMACIÓN EN LAS UNIVERSIDADES. TENEMOS QUE SEGUIR INVESTIGANDO Y DESCUBRIENDO FORMAS QUE NOS AYUDEN A LOGRAR NUESTROS OBJETIVOS DIDÁCTICOS; A DISMINUIR LA FRUSTRACIÓN QUE PRODUCE EL BAJO RENDIMIENTO Y LA ACTITUD DE RECHAZO A UNA RAMA DE CONOCIMIENTO TAN IMPORTANTE EN EL DESARROLLO DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS; COMO ES LA MATEMÁTICA.

POR ESO ESTAMOS AQUÍ. DESEOSOS DE VER ,CONOCER, APRENDER Y EXPLORAR NUEVAS O VIEJAS ALTERNATIVAS QUE FORTALEZCAN ESTE AFAN POR MEJOR EN TODAS LAS IMPLICACIONES QUE NOS GENERA LA BENDITA Y SIEMPRE UTIL …MATEMÁTICA.

ELMER RAMÍREZ CHAVES DE COSTA RICA.   TELEFONO: 396-07-92.

TEMAS :

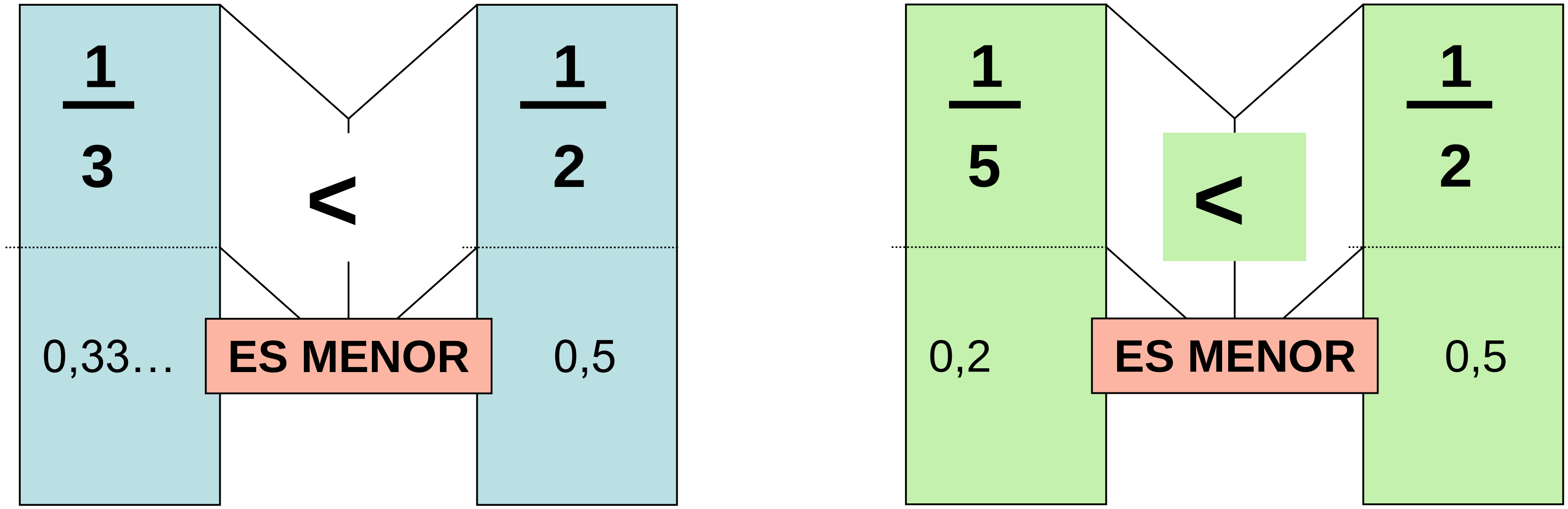


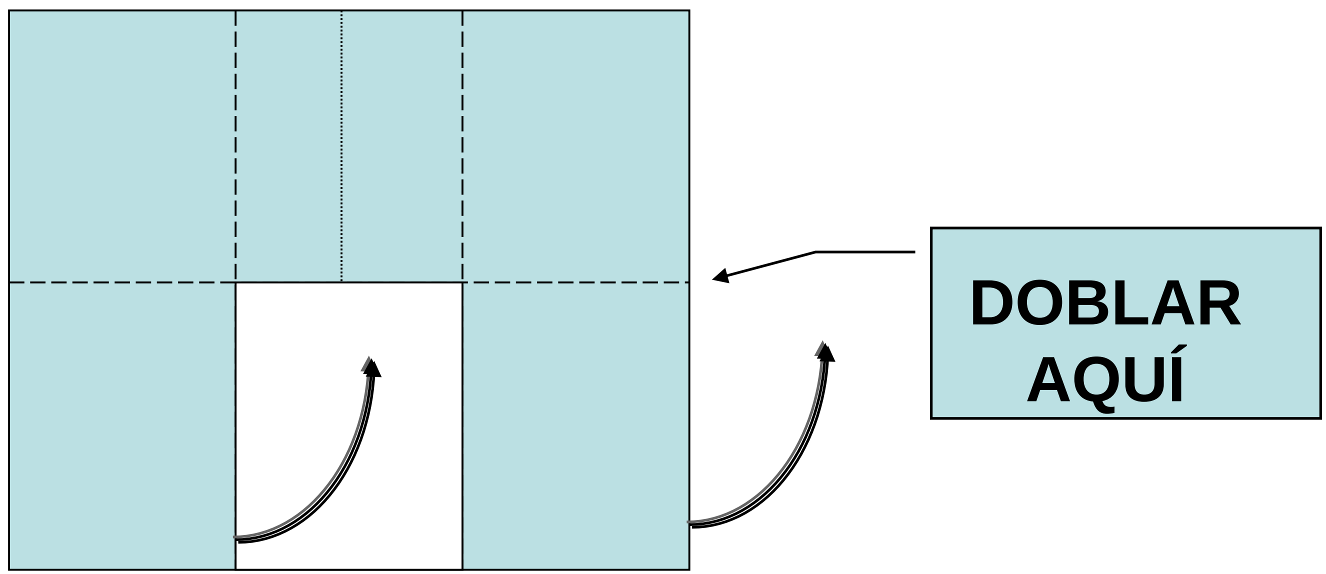
CONJUNTOS DE NÚMEROS

ORDEN NUMÉRICO

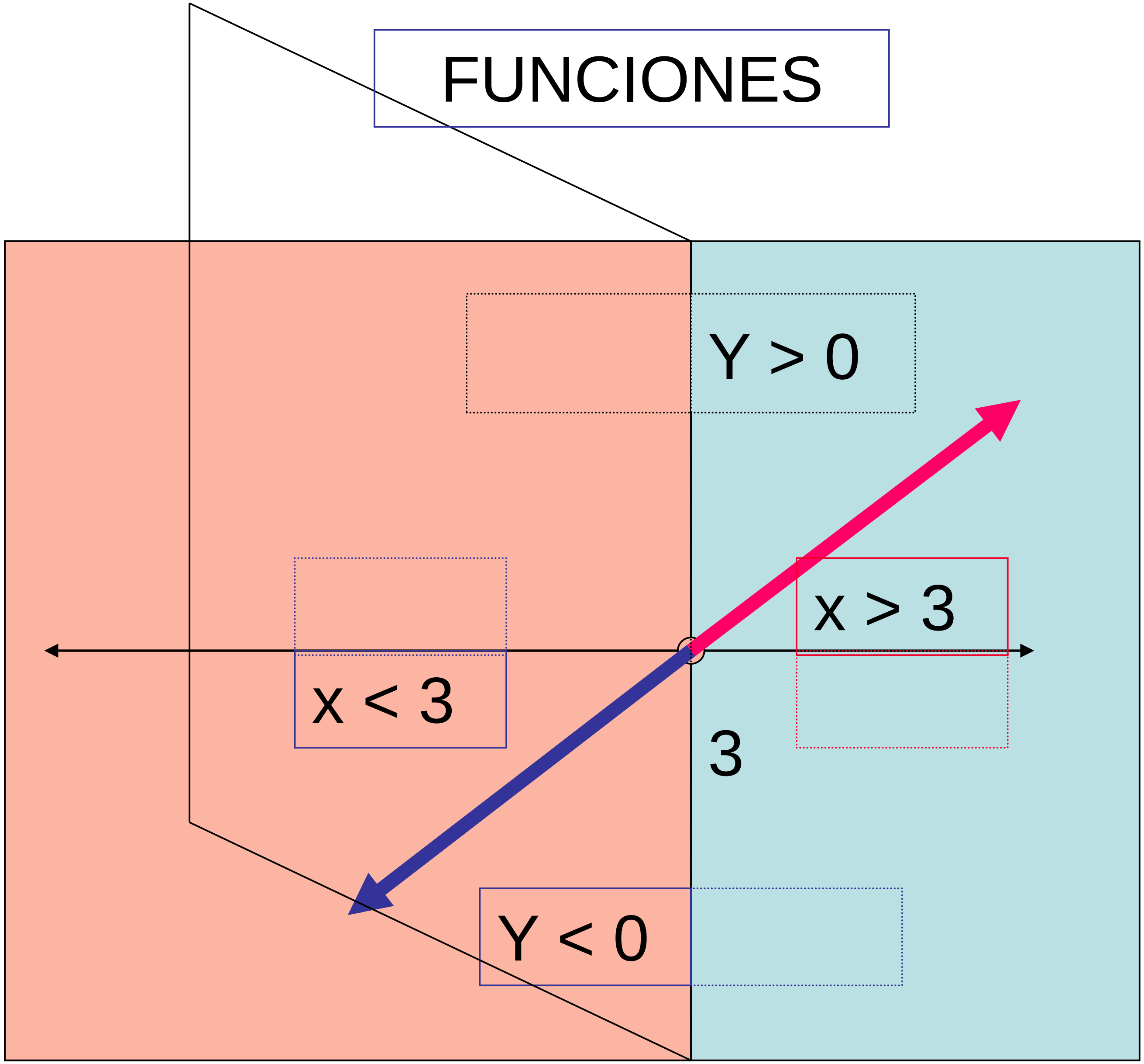
RELACIÓN DE PERTENENCIA

FORMA DECIMAL Y FRACCIONARIA Y RELACIÓN DE ORDEN EN Q

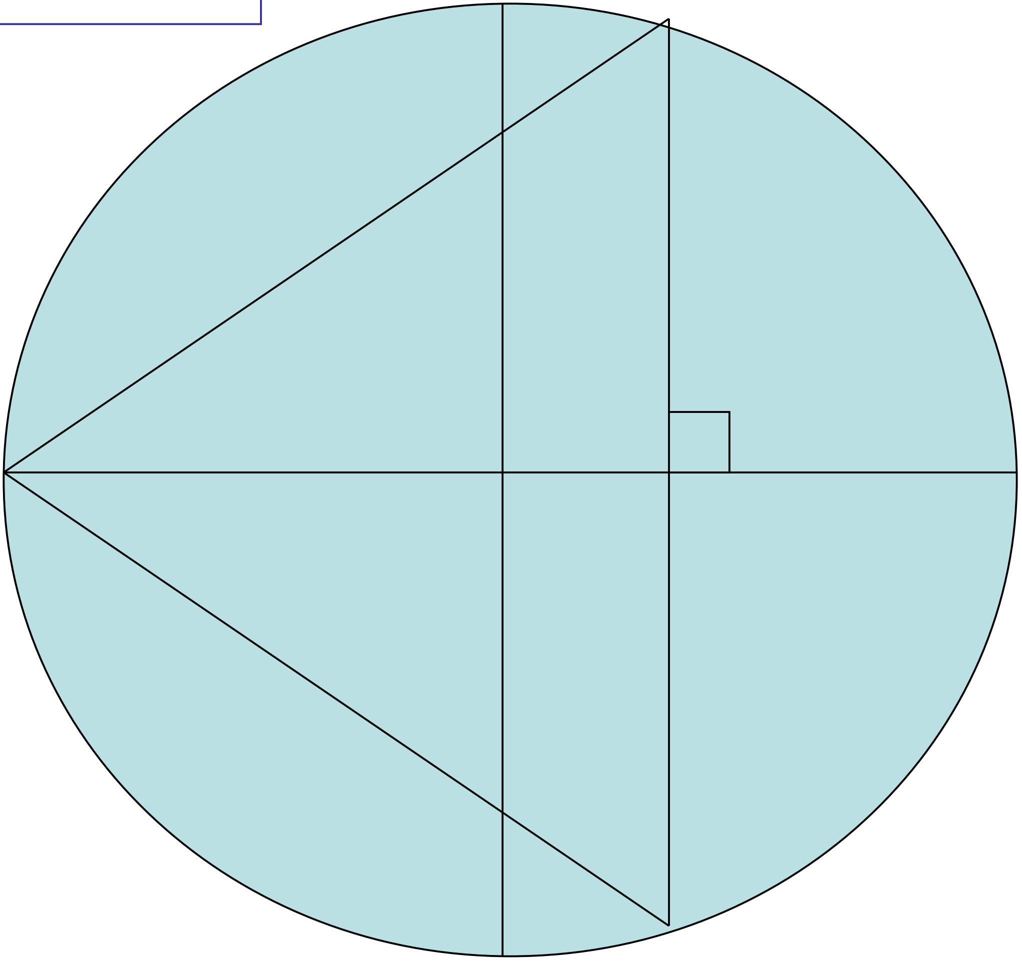


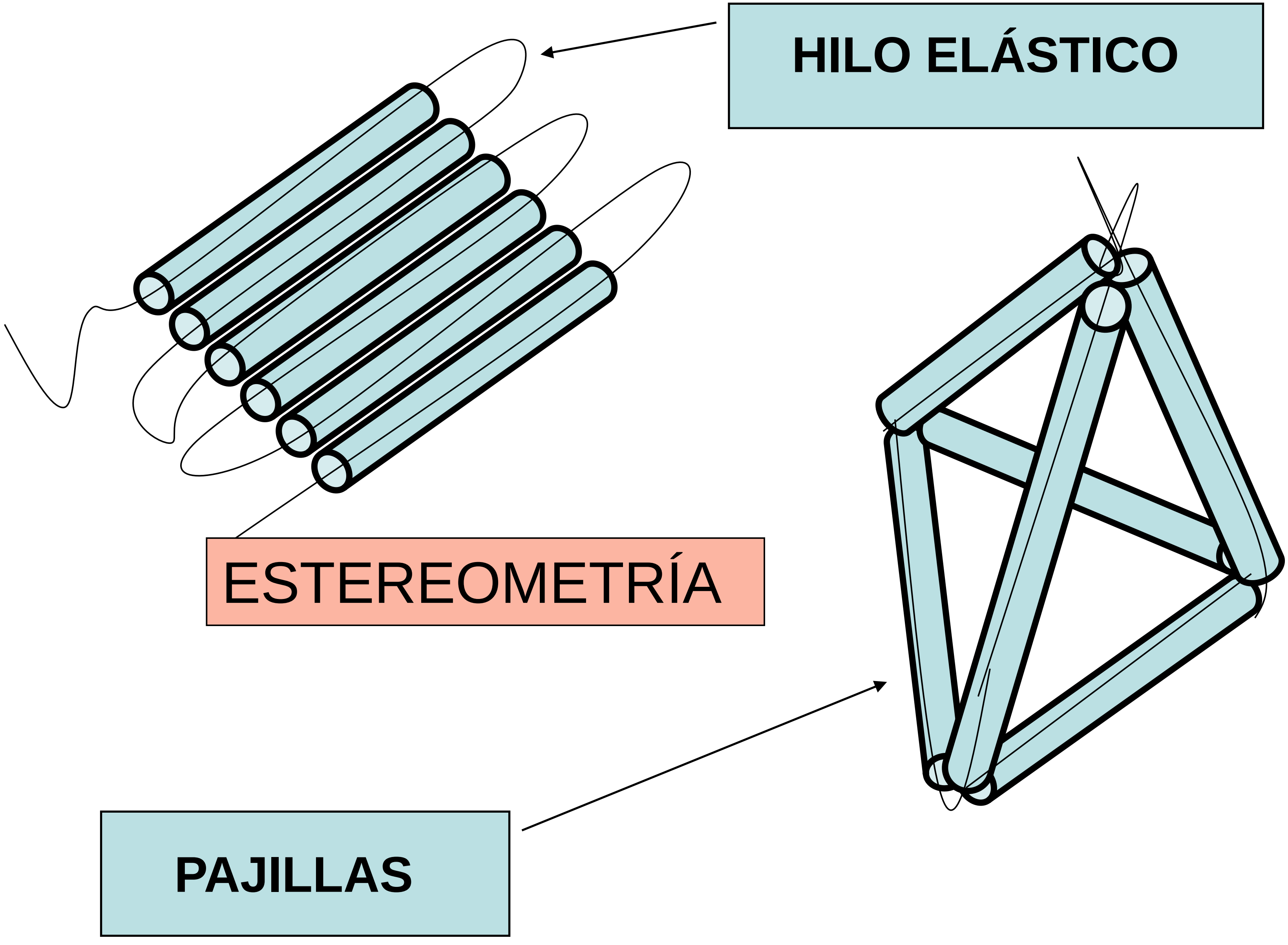


FUNCIONES



GEOMETRIA




HILO ELÁSTICO
ESTEREOMETRÍA
PAJILLAS

Taller basico sobre uso de tecnología (TI-92 PlUS)en la enseñanza de la matemática

Objetivos:

1. Informar, desarrollar y apoyar la reflexión y la discusión sobre el papel que las calculadoras han jugado y pueden jugar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel tanto de primaria como de secundaria.
2. Mostrar por qué y cómo los profesores pueden tener interés en que sus estudiantes usen la tecnología portátil.
3. Concientizar a las y los participantes sobre las oportunidades y sobre los retos que plantea la incorporación de estas tecnologías como elemento didáctico en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática.
4. Propiciar el acercamiento de las y los participantes al empleo de diversas tecnologías en el desarrollo de procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática.
5. Analizar el impacto social del empleo de tecnología en los procesos educativos.
6. Introducir la calculadora grafica con sistema algebraico computacional (CAS) TI-92 plus como medio para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.
7. Utilizar la TI-92 como vehículo para la enseñanza y aprendizaje de funciones, gráficos y geometría analítica.

Descripción:

El avance tecnológico de los últimos años nos obliga a cambiar la forma en que la matemática esta siendo enseñada en las escuelas primaria y secundaria. En el mercado de trabajo se abren ahora oportunidades para personas que sean independientes y que tengan capacidad para razonar en una forma lógica y ordenada, que sean capaces de tomar decisiones y de trabajar en grupos. El uso de tecnología como las calculadoras TI-92 les permite a los jóvenes el poder discutir acerca de situaciones que seria muy tedioso discutir si lo hicieran trabajando solo con lápiz y papel. En este sentido la matematica nos ofrece la oportunidad de preparar a TODOS los estudiantes para hacerle frente a esta necesidad tecnologica y a la vez a motivarlos para aprender topicos que antes estaban reservados para los estudiantes mas aventajados.

Software gratuito en Internet: Una propuesta didáctica con el programa "Regla y Compás"

Paulo García Delgado[1]
Zuleyka Suárez Valdés-Ayala[2]

Resumen

Existen diversos programas computacionales que sirven para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Algunos de éstos pueden ser adquiridos de forma gratuita en INTERNET. En este taller exploraremos el programa "Regla y Compás" y trabajaremos con algunas guías que nos permitirán desarrollar temas, en el área de geometría, planteados en los temarios vigentes del Ministerios de Educación Pública.

Objetivo General: Explorar con los participantes el programa "regla y Compás". Discutir criterios para su uso en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Nivel: Básico

Requisitos: Conocimientos básicos de matemática.

Público al que se dirige: Docentes de nivel medio o superior.

Materiales y recursos: Un laboratorio de computadoras, fotocopias con las sesiones de trabajo, programa "Regla y Compás".

Justificación

El proceso de globalización actualmente abarca campos como el económico, el político, el cultural, el tecnológico y el educativo entre otros; transformando los paradigmas existentes en cada uno.

La globalización, de acuerdo con Meza (2003), compromete a la educación a adoptar posiciones con respecto a temas como los valores y definir nuevos enfoques para tratar las actitudes, habilidades y contenidos necesarios para integrarse a un mundo que evoluciona rápidamente. Es por esto que a través de la educación se debe buscar que las personas sean capaces de actuar de forma crítica, conscientes de su propia cultura y analizar el contexto social del cual forma parte para que logren responder a los retos que surgen en su diario vivir.

[1] Escuela de Matemática ITCR, correo electrónico: pgar@costarricense.cr

[2] Colegio Santa Cecilia.

Por tal motivo se requiere que los profesores y profesoras, en tanto actores decisivos del proceso educativo, se formen y apliquen en el aula enfoques metodológicos y estrategias didácticas actuales que permitan lograr una educación de calidad, estructurada en los cuatro aprendizajes fundamentales, planteados por Delors (1997).

Computadoras en la Educación

La incorporación de la tecnología y en particular de las computadoras como un recurso didáctico en la enseñanza de la matemática pueden ayudar a enriquecer nuestra labor docente pues como lo señala Maldonado (1991) la estructura de un aula computadorizada tiende a facilitar tipos de interacciones que no se dan en n aula tradicional como la interacción constructiva entre estudiantes. Por otra parte Rodríguez, Figueroa y Mora (1997), consideran que el y la estudiante asimilan mejor los conceptos, pueden resolver mayor cantidad de ejercicios y con distinto grado de dificultad.

El aprendizaje con la computadora presenta algunas ventajas tales como:

- La posible integración de varios contenidos en una actividad.
- La enseñanza cooperativa. Varios alumnos y alumnas pueden hacer uso de la computadora a la vez, realizando trabajos en conjunto.
- Promueve habilidades de pensamiento crítico, no memorización de contenidos.

La introducción de las computadoras en el aula, por si misma, no es la solución a los problemas de la enseñanza y aprendizaje de la matemática pues puede resultar ineficaz si no la utilizamos adecuadamente.

La computadora es una herramienta importante que puede provocar una serie de cambios en la enseñanza, para trabajar con ella contamos con programas computacionales algunos de los cuales pueden ser adquiridos libremente en INTERNET.

Metodología de trabajo

Este taller está diseñado para trabajar en dos sesiones con el programa gratuito “Regla y Compás”.

Cada participante trabajará en una computadora y se utilizarán guías para trabajar temas específicos del temario vigente del Ministerio de Educación Pública.

Primer Sesión:

- Uso del programa “Regla y Compás”.
- Descripción de los comandos básicos del programa.
- Elaboración de algunas construcciones.

Segunda Sesión:

- Elaboración de Macros.
- Desarrollo de sesiones de trabajo.

Bibliografía

Avolio, S (1980). La tarea docente. Buenos Aires. Ediciones Marymar. S.A.

Delors, J (1996). La educación encierra un tesoro. Santillana, Madrid.

Gallego, M (1998) Investigación en el uso de la informática en la enseñanza. En Revista Píxel-Bit De Medios y Educación No.11, Universidad de Granada.

Jonassen, D (2003). Modelos de uso de la computadora. INTERNET. Disponible en http://www.guanajuato.gob.mx/seg/innova/MODEL_USO.htm

Meza, G (2000) Elementos para … enseñar matemática. Cartago, Costa Rica. Editorial Tecnológica.

Meza, G (2000) Sobre el papel de las computadoras en el proceso educativo. En Revista virtual “Matemática, educación e Internet”. Vol.1 No.1

Meza, G (2003) Enseñanza de la matemática complementada con estudios de computadoras. Un estudio de caso en sétimo año de un colegio público urbano. UNED, Sistema de estudios de postgrado, Doctorado en Educación.

Rodríguez, Figueroa y Mora, (1997) Cálculo con Derive, una experiencia en el ITCR. En Memorias del V Encuentro Centroamericano de Investigadores en matemática, Liberia, Costa Rica.

Fathom: Estadística y más

M. Sc. Luis A. Acuña

Diciembre, 2003

Fathom es un programa orientado a la enseñanza de la Estadística. Ofrece muchas facilidades en las áreas de simulación, gráficos, estimación de parámetros, pruebas de hipótesis y análisis de regresión.

En Fathom los datos se organizan en *colecciones*, que pueden visualizarse como tablas en las que cada fila representa un individuo (también denominado *caso*) y cada columna representa una propiedad (o *atributo*). Por ejemplo, el archivo EstudiantesTec contiene una colección, llamada `Estudiantes`, con datos sobre más de 2000 estudiantes del ITCR. Cada caso o individuo es un estudiante; los atributos incluyen `Carnet`, `Provincia`, `Estatura` y otros.

Cada colección tiene, además de la tabla de casos, una tabla de *medidas*, que generalmente son el resultado de aplicar una función a toda la colección. En el archivo mencionado podría definirse una medida `EstaturaPromedio` con fórmula `mean(Estatura)`, o una medida `PropMujeres` como `proportion(sex="F")`. Para ver y definir las medidas debe abrirse el *inspector* de la colección, lo cual se hace con un doble click sobre el ícono de la colección, o seleccionando la colección y escogiendo la opción **Edit | Inspect Collection** o presionando `[Ctrl+I]`.

En este taller estudiaremos los aspectos fundamentales del uso de Fathom, incluyendo la creación de tablas, medidas y gráficos; el editor de fórmulas, las colecciones derivadas y otros aspectos.

El programa Fathom es publicado por la editorial Key Curriculum Press, especializada en libros y materiales didácticos. Usted puede investigar más sobre el programa y conseguir una versión de demostración en la dirección `www.KeyPress.com/Fathom`.

1 Tablas, gráficos, resúmenes

Objetivos: Abrir archivos, crear y ordenar tablas de datos, crear y manipular distintos tipos de gráficos, crear tablas de resumen y editar fórmulas básicas.

1. Abrir el archivo EstudiantesTec.ftm.

2. Seleccionar la colección. Ver el número de casos en el borde inferior. Agrandar la colección para ver cada caso.

3. Hacer doble click en alguno de los casos para abrir el inspector. Ver los comentarios de la colección. Cerrar el inspector e "iconizar" la colección (volverla a su tamaño original).

4. Con la colección seleccionada, crear una tabla (`[Ctrl+T]`, **Insert** | **Case table**, o arrastrar el ícono de tabla desde la barra de objetos). Arrastrar el borde derecho para que todos los atributos sean visibles. Ordenar por estatura, descendente (click derecho sobre el encabezado, **Sort descending**).

5. Insertar un gráfico (`[Ctrl+G]`, **Insert** | **Graph**, o arrastrar el ícono de gráfico)). Arrastrar la palabra "Estatura" de la tabla al eje horizontal del gráfico. Cambiar el tipo de gráfico a histograma. Hacer más grande el gráfico. Ver otros tipos de gráfico: "Ntigrama", diagrama de caja, gráfico de cuantil normal.

6. Regresar al tipo Histograma. Arrastrar los bordes del eje horizontal hacia fuera para que los límites sean aproximadamente 140 y 200 (cm). Hacer doble click en el eje e indicar: grupos de ancho 3 empezando en 150, eje horizontal de 140 a 200, eje vertical de 0 a 300. Borrar los detalles del eje (click en la barra superior, `[Supr]`). Arrastrar una de las divisiones verticales en el gráfico para cambiar el ancho de los grupos.

7. Arrastrar "Provincia" al eje vertical, y la distribución de estaturas se dividirá por provincia. Arrastrar "Provincia" al eje vertical y cambiar el tipo de gráfico a Diagrama de caja.

8. Arrastrar "Peso" al lugar de "Provincia" en el gráfico. Se nota una tendencia creciente entre estatura y peso, pero no es muy determinante. Ver algunos de los casos extremos; notar los datos principales (carné, estatura y peso) en el borde inferior de la pantalla; hacer doble click sobre el punto para abrir el inspector.

9. Arrastrar "Sexo" al área del gráfico, y se usarán distintos colores para los distintos sexos. Arrastrar "Ingreso" al área del gráfico.

10. Insertar una tabla de resumen ((`[Ctrl+U]`, **Insert** | **Summary table**, o arrastrar el ícono de tabla de resumen desde la barra de objetos). Arrastrar "Estatura" al margen izquierdo y "Provincia" al superior.

11. Insertar otra tabla de resumen. Arrastrar "Sexo" al margen izquierdo e "Ingreso" al superior. Conseguimos el promedio de ingreso por sexo, lo cual no está bien porque "Ingreso", aunque es numérico, es discreto. Des-seleccionar la columna y volver a arrastrarla pero *sosteniendo la tecla* `[Mayús]`. Eliminar `mean()` (click derecho, **Clear formula**). Ahora tenemos los números de hombres y mujeres por año de ingreso. Para conseguir las proporciones, editar la fórmula `count()` (click derecho, **Edit formula**, o simplemente doble click) y cambiarla

por $\frac{\texttt{count()}}{\texttt{columnTotal}}$, o simplemente `columnProportion`. ¿Puede concluirse que la proporción de mujeres ha aumentado en los últimos años?

2 Entrada de datos, predicción

Objetivos: Digitar datos, ajustar líneas, graficar residuos, mínimos cuadrados, arrastrar datos.

1. Crear un nuevo archivo e insertar una colección (`[Ctrl+L]`, **Insert** | **Collection**, o arrastrar el ícono de colección)).
2. En Excel, abrir el archivo EstaturasNiños.xls. Seleccionar y copiar el rango con los datos (`[Ctrl+C]` o **Edición** | **Copiar**).
3. En Fathom, seleccionar la colección y pegar los datos (`[Ctrl+V]` o **Edit** | **Paste cases**). Crear una tabla para ver los datos.
4. Digitar los nuevos pares $(4.3, 112)$, $(6.3, 117)$, $(8.6, 139)$, $(10.1, 140)$. Borrar uno de los casos (seleccionarlo y `[Ctrl+X]`, o click derecho y **Delete case**). Deshacer el borrado con `[Ctrl+Z]`.
5. Crear un gráfico con $x = \texttt{Edad}$, $y = \texttt{Estatura}$. Ver cómo los puntos se pueden arrastrar y la tabla se actualiza. Regresar a los valores originales. (**Data** | **Lock collection** impide cambios.)
6. Añadir una recta móvil al gráfico (menú **Graph** con el gráfico seleccionado o click derecho en el gráfico, **Movable line**). Moverla y observando la ecuación y tratando de aproximar los puntos.
7. Añadir cuadrados (**Graph** | **Show squares**). Mover la recta tratando de minimizar la suma de cuadrados. ¿Se puede hacer menor que 325?
8. Añadir la recta de cuadrados mínimos (**Graph** | **Least-squares line**). Mover algunos puntos y ver cómo la recta se ajusta. Regresar los valores originales.
9. Quitar la recta móvil y añadir residuos (**Graph** | **Make residual plot**). Ver cómo la estaturas varían en el rango $6.23\,\texttt{Edad} + 81 \pm 8\,\text{cm}$. ¿Cuál sería el rango esperado de estaturas para un niño de ocho años?

3 Análisis de grupos

Objetivos: Comparar grupos. Distinguir grupos en gráficos. Hacer estadísticas de resumen por grupo. Aplicar filtros. Usar el editor de fórmulas.

1. Abrir el archivo EstudiantesTec.ftm.

2. Seleccionar la colección y aplicar un filtro ([Ctrl+F]) con fórmula `(carrera = "AdmEmp") or (carrera = "Compu") or (carrera = "EnsMate")`. Ver en el borde inferior de la pantalla: 2067 casos y 877 filtrados.

3. Crear un gráfico con `Carrera` en el eje horizontal y `Sexo` en el área de gráfico (no en el eje vertical). Cambiar a gráfico de cinta (*ribbon chart*). Este tipo de gráfico muestra barras con altura constante y base proporcional al tamaño del grupo (en un histograma la base es constante y la altura es proporcional al tamaño). Señalar las distintas partes del gráfico y leer las descripciones en el borde inferior de la pantalla.

4. Crear una tabla de resumen con sexo en el margen izquierdo y carrera en el superior. Para ver las proporciones de hombres y mujeres dentro de cada carrera, editar la fórmula (haciendo doble click en la palabra `count()`) y cambiarla a `count()/columnTotal`.

5. En la tabla de resumen, añadir `Provincia` debajo de `Sexo` (soltando el encabezado del atributo en la flecha que apunta hacia abajo). Curiosamente, casi la mitad de los estudiantes de Administración son de Cartago, mientras que alrededor de la mitad de Computación o Enseñanza de la Matemática son de San José.

6. Crear otra tabla de resumen con `Provincia` en el margen superior y `Estatura` en el izquierdo, para ver los promedios de estatura por carrera. ¿Por qué son tan distintos?

7. Hacer un gráfico tipo diagrama de caja con $x =$ `Estatura` y $y =$ `Carrera`. Al gráfico aplicarle el filtro ([Ctrl+F]) `sexo = "F"`. Crear otro gráfico como el anterior pero para los hombres. ¿Puede contestar la pregunta del paso anterior?

4 Fórmulas, funciones y datos

Objetivos: Definir atributos con fórmulas. Graficar funciones. Definir deslizadores.

1. Abrir el archivo Planetas.ftm, seleccionar la colección y crear una tabla.

2. A la derecha de la última columna, crear un atributo `Volumen` (hacer click en *New* y digitar el nombre). Abrir el editor de fórmulas (click derecho en el encabezado, **Edit formula**, o [Ctrl+E]) y escribir $\frac{4}{3}\pi \mathtt{R\_Mm}^3$ (`R_Mm` es el radio del planeta, en megámetros).

3. Crear otro atributo a la derecha del anterior. Llamarlo `Densidad` y darle la fórmula `M_Earths/Volumen` (`M_Eartsh` es la masa, en múltiplos de la masa de la Tierra).

4. Crear un gráfico con `Densidad` en el eje horizontal. ¿Cuáles planetas tienen mayor/menor densidad? (Hacer click sobre los puntos extremos.) ¿Qué tienen en común los cuatro planetas a la derecha?

5. Crear un gráfico con $x =$ `orbit_AU` (radio de la órbita, en múltiplos de la órbita de la Tierra), $y =$ `year` (duración del año, en años terrestres). La duración del año es una función potencial de la órbita, $y = x^r$. Vamos a estimar r.

6. Insertar un deslizador (`[Ctrl+Mayúsc+D]`, **Insert** | **Slider**, o arrastrar el ícono de deslizador desde la barra de objetos) y cambiar su nombre de `V1` a `r`.

7. En el gráfico, añadir la función $y = x^r$ (click derecho en el gráfico, **Plot function**, digitar x^r.

8. Probar varios valores de r hasta encontrar uno tal que la función pase cerca de los puntos. La escala del deslizador (y la de un gráfico) puede amplificarse con `Ctrl`+click o reducirse con `Ctrl+Mayúsc`+click.

5 Simulación

Objetivos: Números aleatorios, medidas, colecciones derivadas.

Vamos a investigar si el globo tiene aproximadamente la mitad de su superficie pintada.

1. Lanzar el globo n veces, tomando nota del número de veces en que el dedo índice cae en una parte pintada.

2. En Fathom, crear una colección con un atributo, `Pintado`, con fórmula `randomPick("S", "N")`. Crear n casos (click derecho en la colección, **New cases...**). Eso es una simulación de n lanzamientos del globo. Cambiar el nombre de la colección a "Simulación".

3. En el inspector de la colección, definir una medida (pestaña `Measures`) llamada `NumPintado`, con fórmula `count(Pintado = "S")`. Ese es el número de veces en que el globo marcó "pintado" en la simulación.

4. Generar otra simulación con **Analyze** | **Rerandomize** o `Ctrl+Y`. Generar varias simulaciones sucesivamente. Notar cómo varía el número de "pintados": oscila alrededor de $n/2$. ¿Qué tan frecuentemente se aleja tanto de $n/2$ como el número notado en el paso 1?

5. Seleccionar la colección y escoger la opción **Analyze** | **Collect measures**. Eso genera cinco simulaciones (cinco por defecto; luego podemos tomar más) y para cada una recoge la medida `NumPintado`. Esas cinco medidas se guardan en una colección derivada, que por defecto se llama `Measures from Simulación`.

6. Crear una tabla para la nueva colección y ver las cinco medidas recolectadas. Abrir el inspector de la nueva colección y en la pestaña `Collect Measures` pedir 95 medidas más (desactivar "Empty this collection first" y "Animation on").

7. Ahora tenemos 100 simulaciones de n lanzamientos cada una, con el número de "pintados" en cada simulación. Crear un histograma con el atributo `NumPintados` de la nueva colección.

8. ¿Qué porcentaje de las 100 simulaciones dio un número de pintados tan alejado de $n/2$ como el experimento del paso 1? (Si no es evidente en el gráfico, ordenar la tabla de la segunda colección.) ¿Es verosímil que el globo tenga la mitad de su superficie pintada, o es obvio que la proporción pintada es distinta a 50%?

6 Más allá de esta introducción

Algunas características de Fathom que no llegamos a estudiar son algunos de los tipos de gráficos disponibles (de línea, percentiles, de cuantil normal), muestreo a partir de colecciones, desordenamiento de atributos, estimación de parámetros (promedios, proporciones y variancias) y pruebas de hipótesis (sobre parámetros, de independencia, de bondad de ajuste).

Estrategias metodológicas para fomentar en los niños (as) el trabajo en grupo dentro de las Salas de Robótica

Licda. Karolina Piedra Segura[1]

1. Resumen

El acelerado crecimiento tecnológico y la necesidad de competir en un mundo tan globalizado como en el que estamos viviendo actualmente, han llevado a que muchos sectores de la humanidad sientan que la mejor forma de salir adelante es trabajando en forma aislada e individualista. Así mismo, la constante perdida de valores y el intenso deseo de sobresalir y cumplir con ciertos programas establecidos, han repercutido en que la sociedad trate de ignorar la necesidad del individuo de convivir como parte de un grupo, hecho que se refleja desde el momento en el que el ser humano nace y forma parte del núcleo familiar, del que recibe poderosas influencias que modifican sustancialmente su personalidad integral.

Partiendo de esto y del hecho de que el centro educativo es quizás el lugar donde los niños (as) tienen que convivir en sociedad por "obligación" es que se considera que podría ser un punto ideal para iniciar un proceso de formación de valores y actitudes que conlleven a un mejor desenvolvimiento del educando en el trabajo grupal y por ende en los resultados que se esperan obtener de sus trabajos.

Es necesario que nosotros como educadores estemos consientes de que la parte social es uno de los puntos más difíciles de formar, sin embargo, es quizás el área más importante que como seres humanos debemos desarrollar, por lo cual es un reto y casi un deber inculcarla a nuestros estudiantes desde muy temprana edad.

Por ello, éste trabajo pretende dar una visión de algunos de los problemas que actualmente se viven en los salones de clases de los centros educativos y

[1] Profesora de Robótica en la Escuela Ricardo Jiménez Oreamuno, Tejar, Cartago. karo7@costarricense.cr

específicamente en las salas de robótica, con respecto a la poca integración de los niños y niñas al trabajo en grupos.

Esta investigación se ha desarrollado durante casi dos años en la Sala de Robótica de la escuela Ricardo Jiménez Oreamuno, donde cada dos meses se realizan talleres de exploración y aprendizaje, en los cuáles los niños (as) que ahí asisten tienen la posibilidad de aprender principios de construcción, programación, mecánica y otros, a partir del juego; lo más interesante es el hecho de que el ambiente que ahí se genera es 100% social, pues los niños (as) trabajan en pequeños subgrupos. Además se le suma la variable de que los grupos son muy heterogéneos no solo en edades sino en gustos e intereses.

2. Objetivos

2.1. General

Implementar estrategias didácticas y metodológicas que promuevan la incorporación de todos los niños(as) en el trabajo de grupo, para lograr la resolución de problemas tanto de construcción como de programación de una manera más efectiva.

2.2. Específicos

- Fomentar el trabajo en grupo de manera participativa.
- Formar distintos valores morales que permitan a los educandos enfrentarse a diferentes situaciones grupales de manera más enriquecedora.
- Reconocer la importancia del trabajo armonioso y colaborativo.

3. Situaciones problema

Son muchas las situaciones de conflicto que se viven dentro del proceso de interacción, programación y construcción que se da en la Sala de exploración de Robótica, sin embargo, es importante mencionar aquellas que sobresalen por su frecuencia y reincidencia en los diferentes grupos, independientemente de la manera como está constituido el mismo. Dentro de éstos el que más sobresale y por lo tanto el que se tratará en la presente investigación es que: Ciertos grupos de trabajo no logran concretizar un buen proyecto por la falta de comunicación, coordinación y cooperación tanto a la hora de plantearlo como de desarrollarlo.

4. Elementos teóricos

Desde el momento en que somos concebidos en el vientre de nuestras madres, estamos rodeados de personas que nos enseñan, guían y se preocupan por nosotros. Poco a poco conforme vamos creciendo, nos percatamos de que en todo momento tenemos a alguien a nuestro lado, ya sea para enseñarnos, corregirnos o simplemente acompañarnos; sin embargo, esto muchas veces se nos olvida y consideramos que somos autosuficientes, capaces de seguir formándonos de manera aislada.

Es necesario mencionar que el programa de robótica, meditado por la Fundación Omar Dengo, propone un aprendizaje interactivo y dinámico, donde el estudiante tiene la oportunidad de interactuar y conocer conceptos de física, ciencias, mecánica, matemática y otras materias a través de la manipulación y la vivencia, no obstante la riqueza más grande de éste programa es que le permite al educando trabajar en grupos, con niños (as), que no son de su misma edad ni nivel, es decir, que es un espacio apto para formar valores a partir de la vivencia diaria dentro del aula.

Partiendo de esto, es que durante el año 2002, se pretendió iniciar un proceso de observación y documentación que pudiera guiar de manera más certera a qué cosas se deben hacerse en las salas de robótica, para mejorar las relaciones de grupo y de ésta forma, favorecer el modo en cómo se resuelven los conflictos que ahí se presentan.

Es importante iniciar mencionando: ¿qué es el trabajo en grupo?, ¿Cuál es su importancia? y algunos de los aspectos fundamentales que se requieren para aplicarlo.

Además se deben describir ciertas actividades que se pilotearon dentro de las salas de Robótica durante éste tiempo.

4.1. Antecedentes de los grupos

Es importante recordar que desde la prehistoria el hombre se ha desarrollado de manera grupal, es decir que a lo largo de su vida siempre se ha visto en la necesidad de compartir con otras personas ya sea de manera obligatoria, ocasional o espontánea. Según Miguel González, el vocablo grupo se empleó por primera vez en Francia para designar un conjunto de personas reunidas y su origen se atribuye a la palabra “grupo” que significa “nudo”.

Cirigliano Villaverde, considera que la Dinámica de grupos es un instrumento del educador. Que requiere de varias exigencias: que el educador conozca y se entrene especialmente en su manejo, que el grupo de clase sea efectivamente considerado como un grupo y que funcione como tal, además, se deberán abandonar prejuicios y tradiciones rutinarias en cuanto al concepto de educación.

4.2. ¿Qué es un grupo?

Newcomb (1964) dice que: “Un grupo consiste en dos o más personas que comparten normas con respecto a ciertas cosas y cuyos roles sociales están estrechamente ínter vinculados”.

4.3. Elementos del grupo

Según Miguel González, un grupo está constituido por diferentes elementos: objetivos, relaciones interpersonales, liderazgo y estructura. Según como se presente cada uno de ellos, podremos identificar frente a qué clase de grupo estamos.

1. **Objetivos:**

Son las metas que el grupo tiene y que guían sus actividades. Sirven de base en el momento de evaluar su progreso. Los objetivos pueden tener diversos orígenes. Hay casos en que son impuestos por el líder, en otros los propone el mismo líder.

Cuando se plantean los objetivos se tiene que tener en cuenta que:

- Deben ser definidos en forma clara y precisa.
- Si el grupo propone sus propios objetivos, está dando señales de madurez, sin embargo, estos deben responder a sus intereses y necesidades.
- Si los objetivos son propuestos por el mismo grupo es más probable que se logren porque cada integrante se sentirá identificado con ellos.
- Hay que plantear objetivos tanto a corto como a largo plazo.
- Los objetivos pueden ser cambiados sobre la marcha, si el grupo considera que no responden a sus necesidades o que son imposibles de alcanzar.

2. **Relaciones interpersonales:**

Éste aspecto se refiere a cómo se está dando el encuentro entre los integrantes del grupo, al grado de comunicación y de confianza que existe entre ellos, es decir a la "atmósfera del grupo". Hay grupos en los que resulta grato estar; en otros ocurre todo lo contrario.

Según como se presenten las relaciones interpersonales dentro de un grupo, se pueden clasificar en primarias y secundarias.

Relaciones primarias: es cuando los integrantes de un grupo se comunican sin temor, cara a cara, comparten sus experiencias de trabajo, de su vida personal y familiar. Dan a conocer sus gustos e intereses.

Relaciones secundarias: se dan cuando los integrantes de un grupo se comunican de forma impersonal, es decir superficialmente, se habla de deportes, programas televisivos, trabajo, etc.

3. **Liderazgo**

El término líder, hace referencia a la persona que dirige el grupo. En los grupos es posible distinguir tres tipos de líder: el autoritario, el comunitario y el liberal.

EL AUTORITARIO: Es aquel que toma las decisiones sin consultar a nadie, determina solo las actividades y cómo debe realizarlas el grupo, organiza, pero no participa en las tareas.

EL COMUNITARIO: es aquel que toma las decisiones con el grupo, deja que el grupo organice las actividades y la manera de realizarlas, estimula y refuerza a las personas por sus logros, acompaña y participa con entusiasmo en las actividades del grupo.

EL LIBERAL: Es aquel que casi no participa en cuanto a la toma de decisiones y organización del trabajo, en el mejor de los casos se limita a dar información y facilitar información cuando el grupo se lo solicita, nunca felicita a las personas por sus logros.

4. **Estructura:**

Se refiere a la organización del grupo, a sus normas, responsabilidades, roles, distribución de tareas. La estructura puede tener diferentes formas.

a. Estructura vertical: el líder ocupa el lugar más alto, y las personas de menor rango ocupan el lugar más bajo. En algunos casos hay personas en un mismo nivel, pero con diferentes rol.
b. Estructura horizontal: todas las personas gozan el mismo rango y la diferencia radica en sus roles y tareas.

c. Estructura vertical-horizontal: el poder reside en una oficina o un cargo, pero la actividad se desarrolla de manera horizontal.
d. Estructura de cadena: se funciona en forma circular, las decisiones, sugerencias y opiniones pasan por diferentes comisiones que componen la estructura global.

5. ¿Qué es la dinámica de grupo?

Según lo expresa Olmsted (1963) “la Dinámica de Grupo constituye el intento más difundido y de mayor influencia y de estos momentos, en el estudio de los grupos”.

Por su parte, el que inició estudio de la Dinámica de Grupo fue Kurt Lewin en la década de los treinta y su teoría es resumida por Filloux de la siguiente forma:

“-El grupo no es una suma de miembros; es una estructura que emerge de la interacción de los individuos y que induce ella misma a cambios.

- Entre los individuos que forman el grupo se producen múltiples fenómenos (atracción, repulsión, tensión, compulsión, etc.): las corrientes que se establecen entre los elementos y el grupo, determinan un movimiento, una “dinámica”, que proyecta en cierto modo al grupo hacia adelante, como si tuviera la facultad de crear su propio movimiento.

- La evolución dinámica del grupo cuenta como sustrato una suerte de espacio, que resulta ser el “lugar” de las interacciones, un verdadero “campo de fuerza social”.

Como consecuencia de lo expuesto puede afirmarse que “el comportamiento de un individuo en grupo está siempre determinado por la estructura de la situación presente.

6. Metodología

La metodología empleada fue básicamente el desarrollo de distintas estrategias y actividades, que fueron puestas en práctica durante dos años con diferentes grupos de

20 niños (as). También se debe aclarar que los grupos con los que se ha trabajado, han estado constituidos por una población muy heterogénea, tanto en edad (7, 9, 10 y 12 años), nivel que cursan (1º, 3º, 4º y 6º grado) y por lo tanto con diferentes intereses y necesidades.

Básicamente, se ha tratado de trabajar diferentes estrategias y actividades que le permitieran al estudiante conocerse a sí mismo y aceptarse como una persona con grandes virtudes, pero también con muchos defectos que lo hacen ser único, diferente y especial. Una vez que el niño se acepta a sí mismo, se trata de trabajar sobre la importancia de aceptar a los demás de igual forma, con todas sus virtudes, pero también con sus defectos; la idea es concluir que yo recibo de la gente únicamente lo que doy. Además, con esto se pretende analizar los pro y contras del trabajo en grupo, cuando se desea resolver una situación conflicto en cualquier circunstancia y más propiamente, dentro de la sala de robótica.

Las actividades propuestas giran en torno a juegos, dinámicas, lectura de cuentos y reflexiones, además, éste año se ha querido introducir la dramatización (obras de teatro) como una manera útil para que el niño de a conocer sus sentimientos y comprenda que es muy difícil trabajar de una manera asilada e independiente. También se ha tratado de profundizar bastante en los distintos valores, que como miembros de una sociedad debemos de practicar.

En resumen, se han trabajado actividades que contribuyan a:

- Elevar la autoestima.
- Fomentar valores para vivir mejor en sociedad.
- Reconocer la importancia del trabajo armonioso y colaborativo.

7. Descripción de las actividades.

7.1. Actividades para elevar el autoestima

El objetivo de estas actividades consiste en fortalecer la autoestima de los miembros del grupo, desarrollando el autoconocimiento, la autoaceptación y la autoconfianza. (González Javier, pág 35)

Actividad Nº 1

Nombre:

Lectura: "Cachorros para la venta"

(Se entregará en el taller)

Objetivo:

Hacer conciencia de que todos somos diferentes y que debemos aceptar a las personas con todos sus defectos y virtudes.

Fomentar el respeto hacia los compañeros cuando se trabaja en grupo.

Descripción:

Se hace lectura del cuento "Cachorros a la venta", luego se le pide a cada niño que dibuje en su portafolio lo que más le llamó la atención y que trate de rescatar cómo podría aplicar la enseñanza del cuento al trabajo que se realiza dentro del taller de Robótica.

Actividad Nº 2

Nombre:

Lectura: ¡Actitud!

(Anexo Nº 2)

Objetivo:

Reconocer el poder que tiene la actitud y empeño que pongamos al hacer y/o decir algo en el resultado que se pretende alcanzar con dicha acción.

Descripción:

Se hace la lectura de la reflexión "Actitud", y se invita a los niños a que escriban en su diario una frase en la que se encierre el mensaje y hagan un dibujo de la reflexión leída; luego, que cada uno la comparta, para sacar una conclusión final, en forma conjunta.

Actividad Nº 3

Nombre:

Reflexión "Ánimo"

(Digital)

Objetivo:

Reflexionar sobre el cuidado que hay que tener con lo que se dice y hace, pues muchas veces se puede perjudicar a las demás personas.

Descripción:

Se hace la lectura de la reflexión "Ánimo", y se invita a los niños a que escriban en su diario una frase en la que se encierre el mensaje de la reflexión leída; luego, que cada uno la comparta, para entre todos sacar una conclusión final.

Actividad Nº 4

Nombre:

Lectura “La esperanza de un sueño”

(Anexo Nº 3)

Objetivo:

Comprender que muchas veces las personas que nos rodean no nos apoyan positivamente en los proyectos que tenemos, sino, que por el contrario nos desmotivan y se tornan en un obstáculo para lograr dicho objetivo; no obstante uno no debe darse por vencido y debe seguir luchando por la meta que se ha propuesto.

Descripción:

- Lectura de la reflexión
- Confección de un dibujo o colage, sobre la enseñanza de la lectura
- Puesta en común de lo más importante que se puede rescatar de la misma.

7.2. Actividades para fomentar valores para vivir mejor en sociedad

Estas actividades persiguen inculcar distintos valores morales, que permitan al individuo actuar de manera más tolerante y respetuosa, cuando se relaciona en un medio social.

Actividad Nº 1

Nombre:

Reflexión “Es bueno pero es mejor”

(Digital)

Objetivo:

Reconocer la importancia de servir y ayudar a las demás personas, sin esperar nada a cambio.

Descripción:

- Presentación y lectura de la reflexión
- Se pide a cada niño que represente por medio de un dibujo o frase algún elemento de la reflexión que se pueda plantear como enseñanza para realizar dentro de la clase de Robótica.
- Compartir y retroalimentar las ideas.

Actividad Nº 2

Nombre:

Lectura "El niño de los clavos"
(Se entregará en el taller)

Objetivo:

- Hacer conciencia de que los conflictos no se resuelven con violencia, sino con diálogo.
- Hacer ver a los niños que hay que tener mucho cuidado en lo que se dice y en el tono en que se dice, pues se puede hacer un daño irreparable.

Descripción:

- Se hace lectura del cuento "El niño de los clavos".
- Se le pide a cada niño que dibuje en su portafolio lo que más les llamó la atención y que trate de rescatar cómo podría aplicar la enseñanza del cuento al taller que sé esta realizando.
- Se comparten algunos de los diseños y frases de los niños (as).

Es importante mencionar que también se desarrollaron diferentes obras de teatro, en las que con la ayuda de distintos títeres, se trabajaron distintos valores, con la ayuda de los fascículos publicados por La Nación.

7.3. Actividades para reconocer la importancia del trabajo armonioso y colaborativo.

El objetivo de estas actividades es lograr que el educando tome conciencia de la importancia de trabajar en grupo de una manera armoniosa y colaborativa.

Actividad Nº 1

Nombre:

Reflexión “La Carpintería”
(Digital)

Objetivo:

- Valorar las aptitudes y características de cada uno de los compañeros, para poder reconocer la importancia de su participación en la confección del proyecto final.
- Aprender a aceptar y valorar a los compañeros tal y como son.

Descripción:

- Por medio de una lluvia de ideas se rescata lo más importante de la reflexión, haciendo hincapié en que todos somos importantes e indispensables cuando se trata de confeccionar un proyecto.
- Se reflexiona sobre el hecho de que cada uno de nosotros tenemos características que nos hacen únicos e importantes a la hora de trabajar en grupos.

Actividad Nº 2

Nombre:

“Elefante - Jirafa”

Objetivo:

Valorar la importancia de la cooperación de todos los integrantes del grupo, así como la necesidad de prestar atención, ser creativos y estar dispuestos a cooperar en todo momento.

Descripción:

En círculo, un moderador en el centro va nombrando diferentes animales, los cuáles serán formados por tres niños, por ejemplo el elefante: el niño del centro hace la trompa con sus manos, mientras que los de lo lados le hacen las orejas.

Actividad Nº 3

Nombre:

“Conejitos a la madriguera”

Objetivo:

Valorar la importancia del trabajo en equipo y de que todos pongan su mejor esfuerzo para que las cosas salgan exitosamente.

Reconocer la importancia de aprender a respetar las reglas de un juego.

Descripción:

- Se dibujan en el suelo ruedas con tiza o se hace alguna marca que se pueda ver bien, y se llamarán madrigueras. Se hacen tantas madrigueras como niños haya jugando menos uno. O sea si juegan seis niños se hacen cinco.
- En cada madriguera se coloca un niño o niña. El que queda fuera dice “Conejito quiere su madriguera”.

- Todos los niños que también son conejitos, saltando como ellos cambian de lugar, mientras que el niño o niña que dijo “Conejito quiere su madriguera” trata también de llegar a una. El que quede sin madriguera dice: “Conejito quiere su madriguera” y vuelven a cambiar de sitio.
- El juego se repite tantas veces como los niños quieran...

Actividad Nº 4

Nombre:

“Pegando Rodillas”

Objetivo:

Valorar la importancia del trabajo en equipo y de que todos pongan su mejor esfuerzo para que las cosas salgan exitosamente.

Descripción:

Competencia de relevos, donde los participantes transportan una botella o barra con sus rodillas y llevan las manos sostenidas atrás. Se debe definir el punto de partida y de llegada de cada uno de los participantes, así como en número de viajes que debe de hacer cada integrante del grupo.

Actividad Nº 5

Nombre:

“Formando la hilera más larga”

Objetivo:

- Valorar la importancia de la cooperación de todos los integrantes del grupo, así como la necesidad de ser creativos a la hora de proponer y realizar los proyectos, pues de nada vale tener mucho materiales y recursos sino se le saca el máximo provecho.

- Rescatar cómo los niños reaccionan ante retos, donde existe una “competencia” de por medio.

Descripción:

Los niños con sus pertenencias, suéter, zapatos, fajas, binchas, cartucheras, etc., forman en grupos la hilera más larga que puedan.

Actividad Nº 6

Nombre:

“El Nudo”

Objetivo:

Valorar la importancia de la cooperación de todos los integrantes del grupo, así como la necesidad de ser creativos y prestar mucha atención en todo momento.

Descripción:

Se divide el grupo en dos y se les pide que se ubique en círculo, luego se les indica que le den cada mano a un compañero diferente que no esté al lado. Luego, deben de deshacer el nudo sin soltarse de las manos.

Nota:

Es importante mecionar que muchas de las reflexiones se pueden cambiar por otras o por cuentos, dependiendo del grupo con el que se está trabajando.

8. Recolección de la Información

La información se está recogiendo de una manera espontánea y continua por medio de observación y un registro anecdótico diario. Además, se toma en cuenta las observaciones que los niños (as) anotan en sus diarios del inventor.

9. Evaluación

La principal fuente de evaluación que se empleó en el desarrollo de las técnicas, fue el uso de preguntas estratégicas:

¿Te gusta estar sólo?
Cuando trabajamos en grupo ¿es importante que todos aportemos ideas?
¿Cómo nos incorporamos a un grupo?
¿Cómo nos sentimos cuando nos aíslan?
¿Cómo nos sentimos cuando estamos compitiendo por algo?
¿Todos los seres humanos somos "iguales"?
¿Es importante respetar las diferencias que existen entre las personas que nos rodean?
¿Cuáles son las características que debe tener el ídolo de nuestro grupo?

10. Resultados Alcanzados

- Es indispensable que los niños tengan una autoestima alta y "adecuada" para aceptarse a sí mismo con sus virtudes y defectos y de esta manera hacer lo mismo con las demás personas.

- El recalcar por medio de diferentes estrategias, la importancia de aceptar a las personas como son, para lograr a incorporar a los compañeros a las tareas del grupo, a pesar de sus limitaciones motoras o de programación.

- Los cuentos y reflexiones cortas, llama mucho la atención de los educandos, independientemente de la edad, por lo que se puede valer de éstas para transmitir algún mensaje.

- Se debe aprovechar cualquier ocasión para incorporar a varios niños en una actividad (leer, repartir, organizar, etc.), pues de esta manera se puede promulgar con el ejemplo que en realidad trabajar en grupo no es tan difícil.

- Las actividades dinámicas gustan mucho a todos los niños, por lo tanto se puede valer de esto para transmitir algún mensaje (importancia del respeto, de compartir, de colaborar, de escuchar antes de actuar, etc.).

- La mayoría de las actividades que se realizaron causaron un impacto positivo en el momento que se estaban desarrollando e incluso para la formación personal, pero una vez que se deben aplicar las enseñanzas al trabajo de grupo dentro del laboratorio, las cosas cambian un poquito, pues vuelven a prevalecer los deseos de imponer la voluntad y las ideas de cada cual.

- Es importante rotar frecuentemente los grupos de trabajo y variar la manera de formarlos, pues aunque el grupo se entienda muy bien, tienden a delegarse funciones específicas (acomodar, armar, buscar piezas, etc.) que conllevan involuntariamente a la individualización.

- Cuando hay un reto de por medio, se despierta el interés, los niños se esfuerzan por lograr la cooperación de todos para poder ganar.

- Los niños expresaron que lo bueno de que todos seamos diferentes es que nos podemos complementar, para hacer mejores trabajos. En robótica lo vemos muy claramente cuando formamos los grupos de trabajo y empezamos una construcción, pues a pesar de que somos de diferentes sexos y edades, algunas veces podemos hacer muy buenos proyectos, gracias a la colaboración de todos.

11. Conclusiones

Las técnicas grupales:

- Mantienen el interés y superan el aburrimiento, la rutina y la monotonía.
- Contribuyen a que el trabajo en grupo sea más eficaz.
- Promueven espacios para que el individuo exprese creativamente ideas y sentimientos.
- Desarrollan habilidades, actitudes y valores.

Promueven la participación activa de los educandos, convirtiéndolos en protagonistas de su propio aprendizaje.

12. Recomendaciones

Para elegir una actividad de trabajo en grupo específico, se deben tomar en cuenta lo siguiente:

- Definir los objetivos
- Dominar los pasos que se deben seguir para desarrollar exitosamente la actividad.
- Precisar el momento más oportuno para aplicarla.
- Considerar las características concretas de los integrantes del grupo con el que se va a aplicar la actividad.

12. Bibliografía

- González Ramírez, Javier. Las dinámicas en las catequesis. 1ª. Edición. San José, C.R.:CONEC, 2002.

- Cirigliano- Villaverde. Dinámica de grupos y educación. 21ª. Edición. Buenos Aires, Argentina: LUMEN-HVMANITAS,1997.

- Pérez Cordoba Rafael .../et al./ Los Procesos de enseñanza y aprendizaje en una sociedad democrática. San José, C.R.: Imprenta Nacional, 1991.

- Brown Guillermo. Qué tal si jugamos... Otra vez... 2ª. Edición. Caracas, Venezuela: ACCIÓN ECUMÉNICA, 1990.

- Gamboa de Vitellescbi. Juegos para convivencias. 4ª. Edición. Buenos Aires, Argentina: BONUM, 1995.

- La Nación, Colección de fascículos sobre valores. San José. Costa Rica, 2003.

- Olmsted, M. S. El pequeño grupo. Buenos Aires Argentina 1963; pág 132.

13. Anexos

Nº 2

La Actitud

Pepe era el tipo de persona que te encantaría ser. Siempre estaba de buen humos y siempre tenía algo positivo que decir. Cuando alguien preguntaba cómo le iba el respondía: “Si pudiera estar mejor, tendría un gemelo”.

Era un gerente único, porque tenía varias meseras que lo habían seguido de restaurante en restaurante. La razón porque las meseras seguían a Pepe era por su actitud. Él era un motivador un motivador natural: Si un empleado tenía un mal día, Pepe estaba ahí para decirle al empleado como ver el lado positivo de la situación.

Ver este estilo realmente me causa curiosidad, así que un día fui a buscar a Pepe y le pregunte: No entiendo... no es posible ser una persona positiva todo el tiempo: ¿Cómo lo haces?... Pepe respondió: “Cada mañana me despierto y me digo a mí mismo, Pepe tienes dos opciones hoy: Puedes escoger estar de buen humos o puedes escoger estar de mal humor”. “Escojo estar de buen humor”. “Cada vez que sucede algo malo, puedo escoger entre ser una víctima o aprender de ello”. “Escojo aprender de ello”. “Cada vez que alguien viene a mí para quejarse, puedo acepar su queja o puedo señalarle el lado positivo de la vida”. “Escojo el lado positivo de la vida”.

Si claro, pero no es tan fácil protesté. “Si lo es”, dijo Pepe. “Todo en la vida es acerca de elecciones. Cuando quitas todo lo demás, cada situación es una elección”. “Tu eliges como reaccionas ante cada situación, tu eliges como la gente afecta tu estado de ánimo, tu eliges estar de buen humor o mal humor”. En resumen, TU ELIGES COMO VIVIR LA VIDA.

Reflexione en lo que Pepe me dijo... Poco tiempo después, dejé la industria hotelera para iniciar mi propio negocio. Perdimos contacto pero con frecuencia pensaba en Pepe, cuando tenía que hacer una elección en la vida, en vez de reaccionar contra ella. Varios años más tarde, me enteré que Pepe hizo algo que nunca debe hacerse en un negocio de restaurante, dejó la puerta de atrás abierta y una mañana fue asaltado por tres ladrones armados. Mientras trataba de abrir la caja fuerte, su mano temblando por el nerviosismo, resbaló de la combinación. Los asaltantes sintieron pánico y le dispararon.

Con mucha suerte, Pepe fue encontrado relativamente pronto y llevado de emergencia a una Clínica. Después de ocho horas de cirugía y terapia intensiva, Pepe fue dado de alta, aún con fragmentos de bala en su cuerpo.

Me encontré con Pepe seis meses después del accidente y cuando le pregunté como estaba me respondió: “Si pudiera estar mejor, tendría un gemelo”. Le pregunté que pasó por su mente, en el momento del asalto. Contestó: Lo primero que vino a mi mente fue que debí haber cerrado con llave la puerta de atrás. Cuando estaba tirado en el piso, recordé que tenía dos opciones: podía elegir vivir o podía elegir morir. “Elegí vivir”.
¿No sentiste miedo?, le pregunté. Pepe continuó, los médicos fueron geniales, no dejaban de decirme que iba a estar bien, pero cuando me llevaron al quirófano y vi las expresiones en las expresiones en las caras de los médicos y las enfermeras, realmente me asusté. Podía leer en sus ojos: es hombre muerto. Supe entonces que debía de tomar una decisión. ¿Qué hiciste? Pregunté. Bueno, uno de los médicos me preguntó que si era alérgico a algo y respirando profundo grité: “Sí, a las balas”. Mientras reían, les dije “estoy escogiendo vivir, opérenme como si estuviera vivo, no muerto”. Pepe vivió por la maestría de los médicos, pero sobre todo por su asombrosa actitud. Aprendí que cada día tenemos una elección de vivir plenamente, la ACTITUD, al final lo es todo.

Nº 3

La Esperanza de un Sueño

Un pequeño gusanito caminaba un día en dirección al sol. Muy cerca del camino se encontraba un chapulín.
-¿Hacia donde te diriges?, le preguntó
Sin dejar de caminar, la oruga contestó: Tuve un sueño anoche; soñé que desde la punta de la gran montaña yo miraba todo el valle. Me gustó lo que vi en mi sueño y he decidido realizarlo.
Sorprendido, el chapulín dijo mientras su amigo se alejaba: - ¡Debes estar loco!, ¿Cómo podrás llegar hasta aquel lugar?, ¡Tu una simple oruga!
Una piedra será una montaña, un pequeño charco, un mar y cualquier tronco una barrera infranqueable.
Pero el gusanito ya estaba legos y no lo escuchó. Sus diminutos pies no dejaron de moverse.
De pronto se oyó la voz de un escarabajo:

- ¿Hacia donde te dirigen con tanto empeño?

Sudando ya el gusanito, le dijo jadeante: -Tuve un sueño, y deseo realizarlo, subiré a esa montaña y desde ahí contemplaré todo nuestro mundo.
El escarabajo no pudo soportar la risa, soltó la carcajada y le dijo:

- Ni yo con patas tan grandes, intentaría una empresa tan ambiciosa.

El se quedó en el suelo tumbado de la risa mientras la oruga continuo su camino, habiendo avanzado ya unos cuantos centímetros.

Del mismo modo, la araña, el topo, la rana y la flor aconsejaron a nuestro amigo a desistir.

¡No lo lograrás jamás! - le dijeron, pero en su interior había un impulso que lo obligaba a seguir.

Ya agotado, sin fuerzas y a punto de morir, decidió parar a descansar y construir con su último esfuerzo un lugar para refugiarse.

- Esteré mejor, fue lo último que dijo, y murió.

Todos los animales del valle por días fueron a mirar sus restos.

Ahí estaba el animal más loco del pueblo.

Había construido como su tumba un lugar para la insensatez.

Ahí estaba un duro refugio, digno de uno que murió por querer realizar un sueño irrealizable.

Una mañana en la que el sol brillaba de una manera especial, todos los animales se congregaron en torno a aquello que se había convertido en una advertencia a los atrevidos.

De pronto quedaron atónitos.

Aquella concha dura comenzó a quebrarse y con asombro vieron unos ojos y una antena que no podía ser la de la oruga que creían muerta.

Poco a poco, como para darles tiempo de reponerse del impacto, fueron saliendo las hermosas alas arco iris de aquel impresionante ser que tenía frente a ellos: una mariposa.

No hubo nada que decir, todos sabían lo que haría: se iría volando hasta la gran montaña y realizaría un sueño; el sueño por el que había vivido, por el que había muerto y por el que había vuelto a vivir.

Todos se habían equivocado...

Hemos sido creados para realizar un sueño, vivamos por él, intentemos alcanzarlo, pongamos la vida en ello y si nos damos cuenta que no podemos, quizá necesitemos hacer un alto en el camino y experimentar un cambio radical en nuestras vidas y entonces, con otro aspecto, con otras posibilidades, lo lograremos.

EL ÉXITO EN LA VIDA NO SE MIDE POR LO QUE HAS LOGRADO, SINO POR LOS OBSTÁCULOS QUE HAS TENIDO QUE ENFRENTAR EN EL CAMINO...

Nº 4

Una historia para meditar

Esta es la historia de un muchachito que tenía muy mal carácter. Su padre le dio una bolsa de clavos y le dijo que cada vez que perdiera la paciencia, debería clavar un clavo detrás de la puerta.

El primer día, el muchacho clavo 37 clavos detrás de la puerta. Las semanas que siguieron, a medida que el aprendía a controlar su genio, clavaba cada vez menos clavos detrás de la puerta.

Descubrió que era más fácil controlar su genio que clavar clavos detrás de la puerta. Llegó el día en que puedo controlar su carácter durante todo el día. Cuando informó a su padre, éste le sugirió que retirará un clavo cada día que lograra controlar su carácter. Los días pasaron y el joven pudo finalmente anunciar a su padre que no quedaban más clavos para retirar en la puerta. Su padre lo tomó de la mano y lo llevo hasta la puerta. Le dijo: “has trabajado duro, hijo mío, pero mira todos esos hoyos en la puerta. Nunca más será la misma. Cada vez que tu pierdes la paciencia, dejas cicatrices exactamente como las que ahí ves.” Tu puedes insultar a alguien, retirar lo dicho, pero el modo en como se lo digas lo devastara, y la cicatriz perdurara para siempre. Una ofensa verbal es tan dañina como una ofensa física.

Los amigos son joyas preciosas. Nos hacen reír y nos animan a seguir adelante. Nos escuchan con atención, y siempre están prestos a abrirnos su corazón.

PONENCIAS

Memorias Tercer Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora

AVANZANDO POR LA "ZONA DE RIESGO"

Etcheverry, Nilda[1]; Evangelista, Norma[1]; Reid, Marisa[1];
Torroba, Estela[1]; Villarreal Mónica[2]

Resumen

Al trabajar en un ambiente informático tenemos que estar dispuestos a lidiar con situaciones imprevisibles, enfrentando distintos tipos de riesgos: pérdida de control, pérdida de autonomía y obsolencia; que aparecen principalmente cuando ocurren problemas técnicos, cuando los alumnos eligen hacer cosas diferentes a las planificadas por el profesor usando la ayuda, diferentes softwares y descubriendo nuevas cosas que el profesor no puede imaginar que sean posibles.

Se presentan algunos episodios que ocurrieron en la sala de Computación durante los años 2002 y 2003 con diferentes grupos de alumnos que cursaban la asignatura Análisis Matemático I correspondiente a las carreras de Profesorado de Matemática y Profesorado de Computación de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (Universidad Nacional de La Pampa). Éstos resultaron interesantes a la hora de reflexionar sobre la ambivalencia entre distintos discursos acerca de la presencia de un nuevo actor, la computadora, en el escenario del proceso enseñanza aprendizaje.

Al trabajar en un ambiente computacional perdemos ese control y nos obliga a estar atentos para estas cuestiones, y aquí puede surgir la pregunta: ¿esto es un problema o una oportunidad más para realizar exploraciones matemáticas nuevas?.

Introducción

El objetivo de este trabajo es analizar y reflexionar sobre el papel de la computadora ante algunas situaciones de enseñanza aprendizaje y su implicancia en la práctica docente.

Al trabajar en un ambiente informático tenemos que estar dispuestos a lidiar con situaciones imprevisibles, enfrentando distintos tipos de riesgos: pérdida de control, pérdida de autonomía y obsolencia; que aparecen principalmente cuando ocurren problemas técnicos, cuando los alumnos eligen hacer cosas diferentes a las planificadas por el profesor usando la ayuda, diferentes softwares y descubriendo nuevas cosas que el profesor no puede imaginar que sean posibles. Muestra de ello son algunos episodios que ocurrieron en la sala de Computación durante los años 2002 y 2003 con diferentes grupos de alumnos que cursaban la asignatura Análisis Matemático I correspondiente a las carreras de Profesorado de Matemática y Profesorado de Computación de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (Universidad Nacional de La Pampa).

1. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNLPam. Argentina
2. Facultad de Ciencias Agropecuarias. UNCórdoba. Argentina. E-Mail: nildae@exactas.unlpam.edu.ar

Estos episodios resultaron interesantes a la hora de reflexionar sobre la ambivalencia entre distintos discursos acerca de la presencia de un nuevo actor, la computadora, en el escenario del proceso enseñanza aprendizaje. Dicha ambivalencia trata por un lado, el peligro que puede significar para el aprendizaje de los alumnos la utilización de la informática, en cuanto a que la máquina contribuye a que el alumno sea un repetidor de tareas, y estaría a cargo de la misma el razonamiento matemático. Por otro lado la creencia que la informática es la solución a los problemas educacionales. En ninguno de los dos casos se tiene en cuenta cual será la dinámica en el aula ante la presencia de este nuevo actor.

Es indispensable que el docente desempeñe su función en el sentido de orientar a los estudiantes en la investigación de nuevos conocimientos y administrar las dificultades que origina el uso de la tecnología como elemento facilitador o complicador del aprendizaje.

El modo en que una propuesta esté diseñada condiciona la manera en que un determinado conocimiento se ha de trabajar en el aula y al mismo tiempo produce modificaciones en la propia dinámica de las clases de Matemática (Borba, 1997, Noss & Hoyles, 1996). Al trabajar en un ambiente computacional con abordajes no tradicionales, con intervenciones del profesor como guía y auxilio y dejando que los estudiantes sigan sus propios caminos de exploración, dos procesos son favorecidos: la **visualización** y la **experimentación**.

Por **visualización** entendemos el proceso de formar imágenes, ya sea mentalmente o con el auxilio de lápiz y papel o tecnología. La visualización es empleada con el objetivo de estimular el proceso de descubrimiento matemático a fin de conseguir una mayor comprensión matemática. (Zimmermann & Cunninghan, 1991).

La **experimentación** está intrínsecamente ligada al empleo de recursos tecnológicos que permiten que los estudiantes realicen conjeturas matemáticas basadas en las exploraciones hechas individual o grupalmente. El trabajo experimental armoniza con los medios informáticos aprovechando las ventajas de sus potencialidades. Esas ventajas pueden ser vistas como una amplia posibilidad de experimentar, de visualizar y de coordinar de forma dinámica las representaciones algebraicas, tabulares y gráficas, desafiando la hegemonía de lo algorítmico y lo algebraico, que caracterizan la enseñanza matemática tradicional.

Seguidamente presentaremos un breve descripción de la experiencia, luego algunas de las situaciones que se presentaron en clases desarrolladas en la sala de computación y que ilustran la naturaleza de la práctica docente cuando se relaciona con la tecnología informática, y por último las conclusiones a las que arribamos.

Descripción de la experiencia

Las responsables del desarrollo de la propuesta didáctica fueron dos docentes-investigadoras que integran la cátedra Análisis Matemático I, durante el período que se realizó la experiencia. Para el análisis posterior de las actividades desarrolladas por los alumnos, los encuentros fueron registrados a través de filmaciones en cintas de video, grabaciones de audio y anotaciones que estuvieron a cargo de otras dos investigadoras del equipo, presentes en carácter de observadoras no participantes.

Se trabajó en la Sala de Computación, la cual dispone de 20 computadoras equipadas con el software Derive 5 pues presenta facilidad de uso sin necesidad de conocimientos previos de computación o programación y posibilita abordar los contenidos matemáticos propuestos. Las situaciones 1 y 2 se llevaron a cabo durante el año 2002 y las restantes durante el año 2003 con distintos grupos de aproximadamente 20 alumnos voluntarios, que cursaban la asignatura mencionada, en horarios extraclases.

Actividades

En las actividades que se llevaron a cabo en un ambiente informatizado, se procuró focalizar la atención en la naturaleza del contenido que puede ser estudiado, el conocimiento producido, la demanda para el trabajo del profesor y otras posibilidades educacionales que pueden ser exploradas. Reportaremos las situaciones que están ligadas al riesgo de pérdida control, pérdida de autonomía y la obsolencia de las prácticas tradicionales que obligan a buscar nuevas opciones de trabajo con los alumnos.

Situación 1.

Se plantea estudiar la influencia de los parámetros A y B en la clasificación de las cónicas a partir de la ecuación general $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$.

Durante estas exploraciones, una alumna, basándose en conocimientos previos escribió la ecuación correspondiente a la circunferencia: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$. Al graficarla obtuvo una elipse (ver Figura 1), por lo que consultó a una de las docentes pensando que no había incorporado bien la ecuación de la circunferencia o que había confundido las ecuaciones de la elipse y la circunferencia.

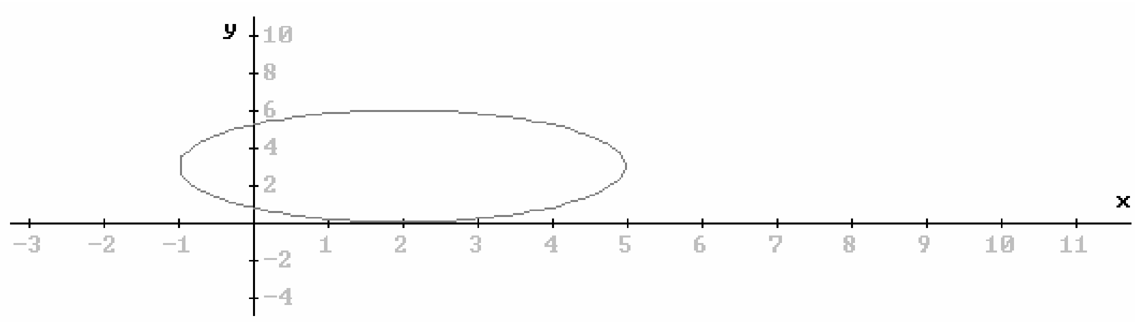


Figura 1.

La docente consultada verificó que la expresión que aparecía en la pantalla correspondía efectivamente a la ecuación de una circunferencia y juzgó oportuno aclarar al grupo que la gráfica de una circunferencia no se presenta como tal si se representa en un sistema de coordenadas donde las escalas son diferentes en cada eje.

En esta ocasión, la intervención docente se realizó para evitar una posible visualización incorrecta que pudiera conducir a errores, sea porque la figura nos puede sugerir una situación que en realidad no tiene lugar, como fue la situación planteada por la alumna, o porque la situación visual puede inducir a aceptar relaciones que son tan engañosamente transparentes que ni siquiera se nos ocurriría pensar en la conveniencia o necesidad de justificarlas.

Este episodio es útil para destacar algunos aspectos vinculados con las características del trabajo con software matemático en lugar de lápiz y papel. En la computadora las escalas están puestas de antemano y pueden ser diferentes en cada eje, esto no ocurre al trabajar con lápiz y papel ya que en este caso nosotros fijamos las escalas y generalmente las tomamos iguales en ambos ejes, lo que nos lleva a obtener el gráfico esperado.

Situación 2.

Durante el transcurso de la actividad planteada en la situación 1 surgió un hecho interesante que permitió desarrollar tareas no planificadas. La alumna A planteó que al intentar graficar la circunferencia: $x^2 + y^2 - x - y + 1 = 0$ no pudo obtener el gráfico entonces intentó justificar esta imposibilidad basándose en recursos algebraicos del software. Para ello resolvió la ecuación despejando la variable *y* considerando el dominio complejo obtuvo como solución una expresión donde aparecían números complejos por lo que dedujo que no se podía graficar.

En ese momento se les indicó que existen restricciones en los valores de los parámetros, y se invitó al grupo a realizar un análisis algebraico con papel y lápiz para determinar cuales deben ser las condiciones a cumplir por los parámetros para que la ecuación represente una curva.

Cuando parecía agotado el tema de la imposibilidad de graficar cónicas para determinados valores de los parámetros, la alumna B se planteó si el software "dibujaba" circunferencias de radio 0. Intentó hacerlo y verificó que no, entonces preguntó:

- *"¿Cómo distingo entonces, si el radio es cero o si la circunferencia no se puede dibujar?".*

Basándose en lo realizado por la alumna A, propuso su resolución algebraica utilizando ecuaciones de circunferencias, expresadas en forma canónica, en las que asignaba valor 0 al radio *r* y observaba que al resolver la ecuación, usando el software, con dominio complejo no obtenía el resultado esperado, las coordenadas del centro de la circunferencia. Las docentes no tuvieron respuesta a ello por lo que necesitaron experimentar con otros comandos y finalmente, recomendaron al grupo resolver las ecuaciones pero considerando que la variable independiente, *x*, tome valores reales. Así cuando se trata de circunferencias de radio cero, la solución es la deseada; y cuando no existen puntos en el plano que satisfagan la ecuación se obtiene una ecuación sin solución real.

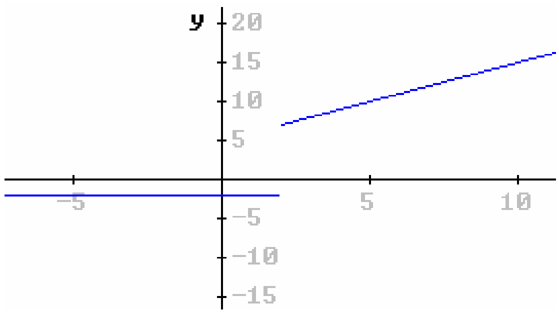
Tal lo expresado por Penteado, (Borba, Penteado 2001). Por más que el profesor sea experimentado siempre es posible que una nueva “combinación de teclas y comandos” lleve a una nueva situación que a veces requiere más tiempo para el análisis y la comprensión. Muchas de esas situaciones necesitan de una exploración cuidadosa y al mismo tiempo de la discusión con otras personas. A diferencia de lo que mucha gente piensa la computadora no siempre responde de forma explícita.

Situación 3.

Otro episodio interesante resultó cuando se presentó la función:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x+5 & x > 2 \end{cases} .$$

Mientras en algunas pantallas aparecía la gráfica representada en la Figura 2.



Otras mostraban lo siguiente:

Figura 2.

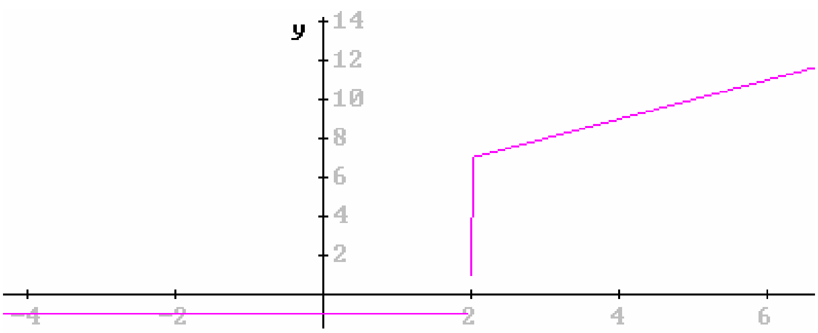


Figura 3.

Ante el convencimiento de los alumnos, que no mostraban asombro por las gráficas obtenidas, fue necesaria la intervención docente para precisar una discusión detallada y llegar a la conclusión que no tiene sentido el trazo vertical en la figura 3. y la falta de un punto importante en la figura 2.

Este tipo de ocurrencia se da por la propia configuración del software. No es de extrañar que en el trabajo matemático con tal herramienta así como en la comunicación con él se produzcan equívocos, confusiones y oscuridades que pueden conducir a error.

Situación 4.

En el estudio de funciones trigonométricas se utilizó el software para explorar la gráfica de la función tangente y su inversa.

Obtuvieron la gráfica presentada en la figura 4.

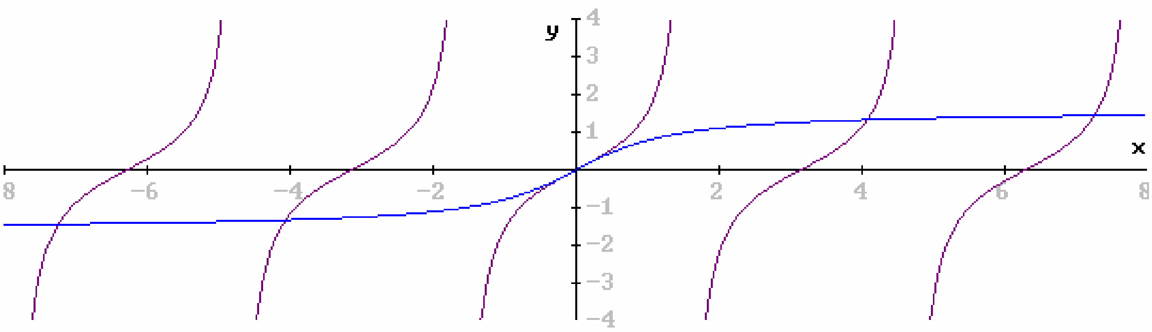


Figura 4.

Lo imprevisible está relacionado con el contenido matemático que hizo necesario reveer los conocimientos acerca de la existencia de la función inversa.

Después de analizar estas situaciones, colocándonos ahora como investigadoras, podemos preguntarnos si las situaciones de incertidumbre que condujeron intervenciones preventivas del docente, podrían haber sido exploradas y explotadas de otra manera. Al trabajar en un ambiente computacional perdemos ese control y nos obliga a estar atentos para estas cuestiones, y aquí puede surgir la pregunta: ¿esto es un problema o una oportunidad más para realizar exploraciones matemáticas nuevas?. Eso dependerá de la manera en que trabajemos con los estudiantes. Quizás este tipo de situaciones nos desoriente, por su imprevisibilidad y nosotros como docentes intentemos sortear ese "obstáculo" dando explicaciones relacionadas con el manejo del software, pero también podríamos usarlas como un disparador para nuevas exploraciones. La cuestión es cómo y cuáles intervenciones sacan provecho de los medios informáticos. En qué cosas conviene llamar la atención y en cuáles nos conviene dejar seguir la exploración por caminos que no sabemos a donde nos llevan. Todas estas cuestiones se enmarcan en lo que Penteado (Borba Penteado, 2001) llama "zona de riesgo" y que está vinculada con lo que significa para los docentes trabajar en ambientes informatizados con todas las inseguridades que nos invaden y el miedo de que el conocimiento que se produzca sea erróneo.

Conclusiones

Sabíamos, que la presencia de la computadora en la sala de aula constituye un nuevo escenario que afecta la forma como los alumnos y los profesores se comunican entre sí, provocando situaciones inesperadas con problemas que muchas veces no se sabe como resolver exigiendo para su solución acciones no convencionales. Nuestra tarea debe estar direccionada a cómo integrar las situaciones nuevas que se nos presentan a la dinámica del aula prevista a priori. . ¿Cómo integrar las situaciones nuevas que se nos presentan a la dinámica del aula prevista? Una posibilidad puede ser tener en cuenta que el contrato didáctico ente alumno y profesor gana fuerza en estos ambientes, donde el profesor debe reconocer ante ellos que las informaciones están disponibles en diferentes fuentes, que se renuevan con mucha velocidad y que si bien es importante que todos tengan acceso a ellas, es preciso priorizar y establecer relaciones con los objetivos que se pretenden en el aula, como contribuir a que los alumnos adquieran el sentido de los conceptos.

Nuestra posición es, que la relación entre la informática y la educación matemática no debe ser pensada en forma dicotómica, sino que debe conducirnos a reflexionar acerca de la transformación de la propia práctica educativa en un ambiente computacional, teniendo en cuenta la posibilidad de que la visualización pueda conducir a error pero no invalida su eficacia y su potencia en los diferentes procesos del quehacer matemático.

Este trabajo revela que la computadora en el aula provoca un cambio en la dinámica de la misma, exigiendo al profesor nuevos conocimientos y acciones animándolo a transitar por la “zona de riesgo”.

Bibliografía:

Borba,M., Penteado, M., Da Silva, H. & Gracias, T. (2000) *A Informática em açăo*. Editora Olho d'Água.

Borba, M. (1997) Graphing calculator, functions and reorganization of the classroom. En: *Proceedings of Working Group 16 at ICME 8: the role of technology in the Mathematics classroom*. Rio Claro: UNESP. p.53-62.

Borba,M., Penteado M. (2001) *Informática e Educaçăo Matemática*. Autentica

Noss, R. (1998) New numeracies for a technological culture. *For the learning of Mathematics*. V. 18, n. 2, p.2-12.

Noss, R., Hoyles, C. (1996) *Windows on mathematical meanings:* learning cultures and computers. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Memorias Tercer Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora

Características de una clase basada en talleres

Ricardo Poveda Vásquez[1]

Adrián Sánchez Godínez[2]

Resumen

En el Seminario de Graduación de la Universidad Nacional: "Hacia una didáctica del álgebra y las funciones", se ha hecho concientización sobre la necesidad de desarrollar los diferentes temas de álgebra y funciones desde una perspectiva de una clase-taller.

A continuación se presentan algunas de las consideraciones, características y limitaciones de la clase-taller.

Palabras Claves

Taller, Metodología en la Enseñanza de la Matemática.

Introducción

Coincidiendo con Artavia (2000) una clase taller es aquella en donde "se fomente el trabajo en equipo, de manera que permita el intercambio de puntos de vista y la confrontación de ideas, este tipo de confrontación favorece, no sólo a que los alumnos aprendan a expresar sus ideas, sino también a realizar demostraciones que apoyen sus puntos de vista". Además, uno de los objetivos de los talleres es la de incentivar al estudiante a que descubra por sus propios medios (con la guía del profesor) conceptos matemáticos, situación que no se logra con una clase expositiva.

Consideraciones

Antes de la aplicación de un taller se debe de considerar algunos aspectos como:

- El o los materiales a utilizar en un taller debe de pedirse con anticipación.
- Se debe de prevenir el caso de que algún estudiante falte con el material solicitado.
- El taller debe estar bien estructurado y bien realizado (no puede ser algo que al docente se le ocurra 10 minutos antes de la clase).
- La guía debe estar bien clara, esto para que no existan errores de comprensión por parte del estudiante.

[1] UNA y Liceo Nocturno Alfredo González Flores. Costa Rica. e-mail: rpoveda@costarricense.cr
[2] UNA y Liceo Regional de Flores. Costa Rica. E-mail: asgodinez1@hotmail.com

- El profesor debe de realizar el taller con antelación a su aplicación al grupo de estudiantes.
- El tiempo en el que se debe de desarrollar la actividad debe ser bien medido, esto para evitar que no se pueda concluir en el tiempo que le asigna el docente.
- El docente debe estar preparado para situaciones como la siguiente : Un estudiante termina el taller en media hora mientras que los demás compañeros tardan 60 o 70 minutos, por lo que se debe contar con material extra para hacerle frente a dicha situación.
- Prepararse para trabajar con estudiantes que tengan necesidades educativas especiales, a los cuales la actividad se les deba plantear de manera que logren alcanzar el objetivo deseado.

Características

También, durante la aplicación del taller podemos encontrarnos algunas situaciones que caracterizan a este tipo de actividad. Por lo que el taller es un trabajo que el docente puede aplicar en el aula, considerando ciertos acontecimientos que pueden surgir durante la aplicación del mismo. Algunos son:

- <u>El profesor es un guía</u>: La función del profesor en los talleres es de guía para el estudiante. Éste debe de limitarse a lo que el estudiante le consulta. También debe velar para que el alumno no se desvié del concepto al que se quiere llegar con la actividad.
- <u>Clase activa</u>: La lección de matemática se vuelve activa, en donde los estudiantes consultan al profesor o entre ellos mismos. Es normal que haya ruido.
- <u>Estudiantes ágiles y lentos</u>: Podemos encontrarnos con estudiantes que realizan la actividad muy rápido y otros que durarán mucho en la realización de la actividad. Por ejemplo en una actividad en donde hay que realizar cortes con tijeras o doblados de papel, no todos los estudiantes tienen la misma capacidad psicomotora. Este tipo de situaciones se deben de resolver, de ser posible, antes de la aplicación.

- No es atractiva para todos: Los docentes al aplicar un taller no podemos pretender que a todos los estudiantes les guste la actividad a realizar.
- Atención individualizada: Se debe de atender individualmente a cada estudiante o subgrupo.

Limitaciones

Por otro lado, los talleres tienen algunas limitaciones que debemos de tomar en cuenta, principalmente si se desean implementar a nivel de secundaria, algunas, son:

- Tiempo: esta es una de las principales limitaciones que se tienen pues, al implementar un taller, no es recomendable hacerlo en varias sesiones (por el manejo de los materiales, olvido de conceptos, entre otros). En general, a nivel de secundaria las lecciones semanales están fraccionadas en dos lecciones por grupo (1 hora y 20 minutos), aspecto que debemos de considerar al planear un taller.
- Materiales: El costo de los materiales (si se necesitaran) no debe ser muy alto.
- Cantidad de participantes: Otro de las limitantes que tienen los talleres, es la cantidad de personas, pues para un buen manejo del grupo y de la actividad el grupo debe de ser pequeño y normalmente a nivel de secundaria éstos son de 35 a 40 estudiantes.

En resumen, en las lecciones de matemática se puede implementar el taller, siempre que se realice una actividad seria, responsable y planeada. Además durante la aplicación pueden surgir ciertos inconvenientes que no se pueden prevenir, pero si se les puede enfrentar si se ha realizado un buen planeamiento. Además es importante la evaluación del taller, pues es indispensable para el mejoramiento de la misma actividad, para su aplicación a otros grupos.

Bibliografía

Artavia, E. (2000). Reflexiones en Torno a la metodología en la enseñanza de la Matemática en primero y segundo ciclo. En : Memorias de II Festival de Matemática. Costa Rica. Pp 11-14.

CALCULO DE LA SUPERFICIE DE UN CASQUETE ESFÉRICO

Allan Gen Palma

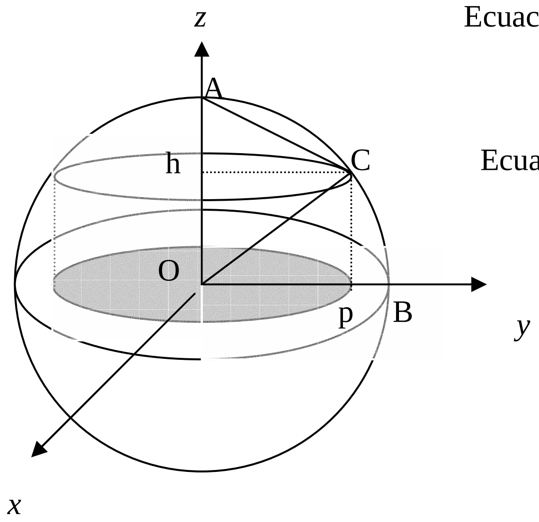
I. Introducción

Este artículo presenta una nueva forma de calcular el área de un “casquete esférico” , utilizando conocimientos geométricos básicos impartidos en secundaria, para ello se establece una equivalencia de una superficie redonda en el espacio a una figura plana, procedimientos que hace más de dos mil años utilizaba Arquímides, actualmente este problema que se encuentra restringido a estudiantes con conocimientos de Cálculo diferencial e integral.
Para verificar la validez de este procedimiento se utilizará el Cálculo diferencial e integral.

II. Desarrollo

Es común en un primer curso de Cálculo en varias variables, efectuar el ejercicio del cálculo de la superficie de un “casquete esférico”. Dicho ejercicio con lleva a la aplicación de integrales dobles sobre una región plana $\mathcal{R}$ entre otras cosas. Como ejemplo se propone el cálculo de la superficie de un “casquete esférico” perteneciente a una esfera de radio R y que se encuentra sobre el círculo de radio p.

Solución:



Ecuación de la esfera de radio R centrada en el origen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2$$

Ecuación del hemisferio superior:

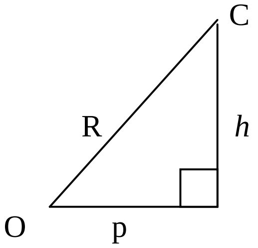
$$z = \sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2}$$

$$A = \iint_{\Re} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = 4\int_0^{\mathrm{p}} \int_0^{\sqrt{\mathrm{p}^2 - x^2}} \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2}}\, dydx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\mathrm{p}} \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - r^2}}\, rdrd\theta =$$

$$\left(2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \mathrm{p}^2}\right)\pi.$$

Pero, ahora quiero presentarles una forma muy simple, de calcular esta área, sin la aplicación del cálculo diferencial e integral. Con lo cual este problema podrá en el futuro resolverse por estudiantes de secundaria sin mayor dificultad que la representada por el Teorema de Pitágoras.

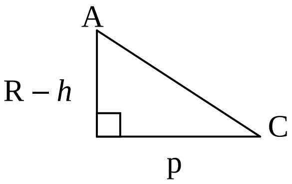
Consideremos de la figura anterior los triángulos rectángulos:



$$h = \sqrt{R^2 - \mathrm{p}^2}$$

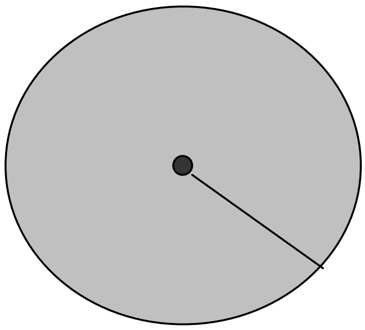
Por lo que $AC = \sqrt{\left(R - \sqrt{R^2 - \mathrm{p}^2}\right)^2 + \mathrm{p}^2} =$

$$\sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \mathrm{p}^2}}\ .$$



Entonces, el área de la superficie esférica equivale al área de un círculo de radio AC, por lo que:

$$A = \pi\left(\sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \mathrm{p}^2}}\right)^2 = \pi\left(2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \mathrm{p}^2}\right).$$



Círculo de radio AC, cuya área es equivalente al del casquete esférico de radio p y perteneciente a una esfera de radio R.

Ahora apliquemos la fórmula con valores numéricos.

Ejemplo:
Calcular el área de la superficie esférica de un “casquete esférico” perteneciente a un hemisferio de radio 5cm que se encuentra sobre el círculo de radio 3cm.
Solución:

$AC = \sqrt{1^2 + 3^2}\,\mathrm{cm} = \sqrt{10}\,\mathrm{cm}$, por lo que el área solicitada corresponde a,

A = $\pi\left(\sqrt{10}\right)^2 \text{cm}^2 = 10\pi\, cm^2$

III. Conclusiones

Espero y este trabajo les facilite los cálculos a los estudiantes que cursan Cálculo diferencial e integral, así como allanar el camino para los estudiantes de secundaria que desean ampliar sus conocimientos, utilizando los conocimientos básicos adquiridos en el colegio.
Además ya es posible determinar con relativa facilidad cálculos que involucran la disminución de la superficie de los polos terrestres por efectos del calentamiento de la Tierra y por ende el deshielo de los polos, también podría determinarse el área de la capa de ozono que se ha perdido por efectos de la contaminación producida en los últimos tiempos.

IV. Bibliografía

1. Larson, Hostetler, Edwards, *Cálculo y Geometría Analítica*, Volumen II, quinta o sexta edición, Mc Graw-Hill, México D.F.

2. Arquímides, *El "Método"*, Editorial Universitaria de Buenos Aires, Argentina.

DE LA MATEMÁTICA RECREATIVA A LA MATEMÁTICA FORMAL: una herramienta didáctica para la enseñanza de la geometría en sétimo año

Gaudy González Arguedas[1],

Gaudy Espinoza Cambronero[2],

Agustín Monge Piedra[3]

Resumen

En un esfuerzo por innovar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el área de la geometría, la investigación ***DE LA MATEMÁTICA RECREATIVA A LA MATEMÁTICA FORMAL: una herramienta didáctica para la enseñanza de la geometría en sétimo año*** *(abordada bajo el enfoque cualitativo, por Gaudy Espinoza Cambronero, Gaudy González Arguedas y Agustín Ricardo Monge Piedra, para optar por el grado de Licenciatura en Ciencias de la Educación con Concentración en Didáctica para la Enseñanza de la Matemática, presentado públicamente en el Centro de Investigación y Docencia en Educación de la Universidad Nacional, el 6 de setiembre del 2002) contempla un análisis acerca del valor didáctico de la matemática recreativa como una herramienta didáctica para enseñar geometría en sétimo año.*

Panorama de la matemática recreativa

Los investigadores participantes en este proyecto acordaron denominar para efectos de la investigación "matemática recreativa" a un campo de estudio de la matemática que no tiene tanto que ver con la idea tradicional que la mayoría de las personas tienen respecto a esta ciencia (formal, fría, y alejada de la realidad tangible del alumnado), sino que más bien encierra ideas de juegos y de retos mentales diferentes a quienes la enfrentan.

Por "matemática recreativa" se entiende una serie de actividades que, más que trabajar con la formulación de números y cálculos complejos al estilo de las clases tradicionales, promueven el ingenio a través de juegos, adivinanzas, reflexiones y otras más, cercanas a la actividad humana, y que presentan retos que llaman al cuestionamiento a las personas, expertos matemáticos o no, esto sin dejar de lado la creativad, que según Nickerson (1998, p. 110). "... es el conjunto de capacidades y disposiciones que hacen que una persona produzca con frecuencia productos creativos", así Nickerson (1998, p. 109)

[1] Liceo San Gabriel La Salle (gaudygonzalez@yahoo.com.mx / ggonzaleza@uinteramericana.edu)
[2] Instituto de Alajuela
[3] Unidad Pedagógica Valle Azul

citando a Jackason y Meddick (1973), señala por productos creativos a aquellos "...productos originales y adecuados".

Esto no pretende afirmar que la "matemática formal", aquella que tradicionalmente se estudian y evocan como los "conocimientos matemáticos verdaderos", sea una disciplina que no tenga aplicación en la vida real, pues, de todos es conocido que casi todo lo que se hace día a día se enmarca, de una u otra forma, en una matematización constante.

¿Cuántas personas podrían ver en la matemática, algo que usualmente se considera "mortalmente aburrido" (Guzmán, 1984, p. 7), como un juego?. Sin embargo, de hecho, para muchas personas, ya sean profesionales o estudiantes en proceso de formación, la matemática es en verdad, entre otras cosas, un juego. Para quienes ven a la matemática de esta forma, resulta muy interesante la naturaleza de los juegos como medio para la comprensión, y hasta la construcción, de conocimientos matemáticos formales. Ejemplo de ello lo constituye la teoría de la probabilidad y la estadística, que, como es conocido en las esferas de la teoría matemática, se desarrolló gracias a la intervención de matemáticos de la talla de Pascal y otros, cuando pretendían dar una explicación racional para interpretar los juegos de azar. Este es uno de muchos ejemplos, que más adelante se verá.

Recientemente, algunas publicaciones (Casas, 1991; Florian, 1995; Revista: La Matemática y su Enseñanza, 1990) se hablan también de la posibilidad de enseñar matemática a través de entretenimientos matemáticos (por medio de las teorías lúdicas y heurística), de manera que se les plantee a los y las estudiantes "retos diferentes" para afrontar el aprendizaje de esta asignatura, y poder tomarla como algo divertido, creativo, y constructivo.

Se explicará ahora lo que ha sido la matemática recreativa en el desarrollo de la matemática misma, y cómo se le ha aplicado para la enseñanza de esta materia.

En la historia de la matemática, han sido múltiples los ejemplos en que se puede ver el impacto que la matemática recreativa ha tenido en el desarrollo de la teoría de esta ciencia como tal. Al respecto, Guzmán (1984) cita varios ejemplos:

1. En la edad media, Leonardo de Pisa (Fibonnacci) estudió la matemática desde una perspectiva de juego que le ayudó a crear teorías, y resultados importantes, como es lo que se conoce como las series de Fibonnacci. En la edad moderna, Gerónimo Cardano escribe sobre los juegos de azar, dando lugar a que Pascal y Fermat (grandes

matemáticos del siglo XVI), por medio de un espíritu lúdico, y en constantes cartas que se escribían uno a otro se va desarrollando la ya comentada teoría de la probabilidad. Dentro de los juegos que se propusieron estuvo el “problema del Caballero de Meré” (que era un juego de azar, propuesto por Antoine Gobaud).

2. Leibniz (1646-1716), matemático de gran fama por el desarrollo de la teoría del cálculo infinitesimal, fue un promotor de la teoría lúdica como actividad mediadora para ejercitar el intelecto. En alguna ocasión, en una carta escrita en 1715, dijo: “Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de juegos… Sería deseable que se hiciese un curso entero de juegos tratados matemáticamente”.
3. Euler (1707-1783), escuchó alguna vez hablar del problema de los siete puentes de Königsberg, que trataba de la posibilidad de hacer un recorrido que pasara por todos los puentes, pero pasando por cada uno una sola vez (llamado “camino euleriano”). Al tratar el problema y darle solución se dio inicio a la hoy tan utilizada teoría de grafos y la topología general.
4. Johann Bernoulli (1667-1748) reta a matemáticos de la talla de Leibniz, Newton, y Jakod Bernoulli, a participar en la solución del problema de la braquistócrona.
5. Hamilton (1805-1865) creó un juego llamado “Viaje por el Mundo”, que era un recorrido por los vértices de un dodecaedro (llamado “camino hamiltoniano”), de manera que cada vértice era una ciudad importante del mundo, y el cual debía hacerse sin pasar dos veces por una misma ciudad. Esto también ayudó a desarrollar la teoría de grafos.
6. Gauss (1777-1855) era un gran aficionado a los juegos de cartas los cuales hacía de una manera muy analítica. Hilbert (1862-1943) crea los llamados juegos de disección. John Von Neumann (1903-1957) escribe con Oskar Morgestern en 1944 un libro llamado “Teoría de juegos y conducta económica”. En este se estudian los juegos de estrategia y se crea un teorema de importancia en el análisis de temas económicos, llamado “teorema de minimax”. Cuenta Martín Gardner que el mismo Albert Einsten (1879-1955) contaba con una amplia biblioteca dedicada a los juegos matemáticos.

Aplicación de la matemática recreativa en la enseñanza

A pesar de que los juegos fomentan una serie de posibilidades de pensamiento y reflexión muy parecidos a los que presenta la matemática (como lo demuestra la historia), una amplia mayoría de las y los matemáticos, educadoras y educadores matemáticos no pueden ver la riqueza que el juego puede prestar a la introducción y análisis de los temas matemáticos formales. Más bien se trata a la matemática desde una visión rígida (conductista) en la que no se puede dar cabida a la diversión (constructivista). Tal vez por eso, se puede hallar mucha literatura que hable sobre recreaciones matemáticas, pero no así de su aplicación en la educación.

En este sentido nuestro país no cuenta de mucha experiencia lúdica en secundaria, y más bien, parafraseando a Guzmán, pareciera ser que:

> ...nuestros científicos y nuestros enseñantes se han tomado demasiado en serio su ciencia y su enseñanza y han considerado ligero y casquivano cualquier intento por mezclar placer con deber. Sería deseable que nuestros profesores, con una visión más abierta y más responsable, aprendieran a aprovechar los estímulos y motivaciones que este espíritu de juego puede ser capaz de infundir en sus estudiantes. (Guzmán, 1984, p.7).

Sí es posible señalar, sin embargo, que en Costa Rica, aunque no con el objetivo claro de incursionar en la enseñanza de la matemática por medio de la matemática recreativa, se han hecho algunos esfuerzos por hacer una mejor actividad educativa para esta asignatura. La mayoría de estos esfuerzos han sido encaminados hacia la educación primaria; por lo que, resulta claro, las propuestas para la educación secundaria han sido las menos estudiadas.

A pesar de ello, y como ejemplo de estas pocas actividades se puede destacar que en 1990, con la participación del Ministerio de Educación Pública, el Instituto de Investigación para el Mejoramiento de la Educación Costarricense (I.I.M.E.C.) de la Universidad de Costa Rica, la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional, y el Consejo Nacional para las Investigaciones Científicas y Tecnológicas (C.O.N.I.C.I.T.), se lleva a cabo el proyecto de investigación "Plan piloto para el mejoramiento en la enseñanza de las Ciencias y la Matemática", el cual buscaba promover el desarrollo de estrategias metodológicas innovadoras en el aprendizaje y la enseñanza de las ciencias naturales y la matemática.

Este proyecto se llevó a cabo en las Escuelas República Dominicana (en San José) y José Ezequiel González Vindas (en Heredia), y en los Liceos Rodrigo Facio (en San José) y Samuel Sáenz (en Heredia). Como resultado de esta investigación, entre otras cosas, fue posible la elaboración de una serie de materiales que presentan una serie de alternativas metodológicas no tradicionales que pueden orientar al cuerpo docente del país (tanto en el ámbito de la educación primaria como de la educación secundaria) hacia la implementación de nuevas formas para enseñar la matemática.

Estas experiencias respecto al trabajo realizado en matemática se recogen en los textos "Experiencias Didácticas Matemáticas (Geometría-Álgebra Intuitiva) (1995) y Experiencias Didácticas Matemática I y II Ciclos (1995)".

Vislumbrando la Problemática

Tradicionalmente, la matemática ha sido una asignatura de difícil comprensión para muchos y muchas estudiantes de la educación primaria, secundaria, e incluso superior de nuestro país. Esto se puede constatar con varios ejemplos: las constantes quejas que los y las estudiantes de cualquier nivel externan hacia la matemática; los deficientes resultados académicos que se logran en esta asignatura, tanto a nivel institucional, como nacional cuando se trata de las pruebas nacionales de bachillerato, IX año, VI año, entre otras (Estado de la Nación, 2000, p. 88).

Desde hace tiempo, la problemática de la enseñanza-aprendizaje de esta asignatura ha sido uno de los temas de mayor relevancia del quehacer docente, sin embargo, parece que han sido pocos los intentos por sistematizar las posibles soluciones para tal situación en nuestro país. En los últimos años la preocupación ha crecido entre los y las docentes, los padres y las madres de familia y los y las estudiantes por atender, y tratar de dar respuesta a la pregunta central del problema: "¿qué hacer para mejorar la enseñanza-aprendizaje de la matemática?" (Castillo y Espeleta, 1998, p. V).

En este sentido, se puede decir que el proceso de respuesta no ha sido fácil. Existe en general una arraigada cadena de mitos y creencias respecto a la matemática; mitos, que tanto los y las docentes, como los alumnos y las alumnas, y en general la sociedad entera, tienen y reproducen, y que perpetúan las dificultades para enfrentar la enseñanza aprendizaje de la matemática. "La matemática es sólo para los inteligentes"; "Ese estudiante no puede aprender matemática", "mi hijo no puede con la matemática" y tantos otros comentarios que al respecto se escuchan en el ambiente escolar.

Se parte de la premisa de que existe un problema, la presente investigación es importante, por cuanto pretende sistematizar una serie de experiencias que enriquezcan la labor docente, y la comunicación efectiva de la matemática a los alumnos y las alumnas de secundaria.

El presente trabajo propone alternativas para el desarrollo de las lecciones de aula, que en muchas ocasiones no es considerado por los y las docentes, y que inclusive es olvidado por los mismos estudiantes: la motivación escolar. Esta "motivación escolar ", si bien es cierto, es un término muy amplio y complejo, de connotaciones psicológicas, será utilizado por el grupo investigador, más bien, en el sentido de "aceptación hacia el estudio de la matemática".

El y la docente deben despertar el interés del alumnado, estimular sus deseos por el aprendizaje, para dirigir sus esfuerzos hacia el logro de los fines que plantea el sistema educativo. Esto por cuanto la motivación afecta para bien o para mal la forma de pensar y de actuar a la hora del estudio de los y las estudiantes. "Querer aprender y saber pensar son las condiciones personales básicas que le permiten al estudiante la adquisición de nuevos conocimientos y la aplicación de lo aprendido en forma efectiva cuando se necesita" (Tapia, citado por Díaz y Hernández, 1998, p. 36).

Lo ideal del proceso educativo, debería ser lograr en el y la estudiante el deseo constante por aprender y comprender nuevos conocimientos. Sin embargo, muchas veces sucede que esa "motivación" está ligada más bien al deseo de no "reprobar" sus cursos lectivos, o incluso a tener aceptación en un grupo social.

En este sentido, la presente investigación pretendió visualizar y caracterizar una forma alternativa para que los y las estudiantes lleguen al conocimiento matemático tradicional a través de actividades creativas, de los juegos y el ambiente lúdico, en busca de una mayor aceptación hacia la matemática. Por esta razón recibe el nombre: "De la matemática recreativa a la matemática formal: una herramienta didáctica para la enseñanza de la geometría". Donde se entiende como matemática recreativa a todo aquel conjunto de actividades, juegos, y pasatiempos matemáticos que regularmente se plantean más como "curiosidades" que como conocimiento matemático verdadero, y que, dicho sea de paso, pocas veces se les encuentra en los libros de texto tradicionales de esta asignatura en cualquier nivel educativo, igualmente se entiende a la matemática formal como aquella que los programas de estudio piden y evalúan como conocimiento matemático científico y que es la que tradicionalmente se enseña en las aulas de cualquier centro educativo del país.

Las técnicas de la matemática recreativa como herramienta didáctica para la enseñanza de la matemática, pretenden dar respuesta a interrogantes tales como: ¿cuál es el valor didáctico del juego?, ¿qué niveles de aceptación (motivación) y de éxito escolar pueden alcanzar los y las estudiantes de secundaria al trabajar los conceptos matemáticos tradicionales desde la perspectiva de la matemática recreativa?, ¿qué niveles de motivación puede llegar a tener el y la docente diseñando estrategias con matemática recreativa?, ¿Se pueden desarrollar clases más provechosas, y participativas mediante esta estrategia?.

Dichas interrogantes llevan a plantear nuestro problema de investigación de la siguiente manera**:** "¿Cuál es el valor didáctico de la matemática recreativa, en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en sétimo año?".

Esta investigación se llevó a cabo en un grupo de sétimo año del Liceo de Belén, el cual se encuentra ubicado en San Antonio de Belén, en la provincia de Heredia, en el transcurso del III trimestre del año 2001, por la accesibilidad que ofrece su ubicación geográfica, además, de que una de las investigadoras laboró para dicho centro educativo. Por medio de esta experiencia se pretendió proporcionar información para que los y las docentes, los alumnos y las alumnas, padres y madres de familia, hasta quienes tienen a su cargo la formación del personal docente en el área de la matemática, tomen en cuenta para vislumbrar mejores formas de enseñanza, y tener éxito en el aprendizaje de la matemática en secundaria, en esto radica su relevancia social.

Hacia los fines de la investigación

A la luz de los expuesto anteriormente, esta investigación se plantea varios fines y metas primordiales, que son los que guiarán el trabajo a desarrollar. Se apuntan así, un propósito general, y cuatro propósitos específicos, los cuales se detallan a continuación:

Propósito General

Analizar el valor didáctico que tiene la matemática recreativa como herramienta para la enseñanza aprendizaje de la geometría a nivel de sétimo año.

Propósitos Específicos

1. Caracterizar la influencia que la matemática recreativa ha tenido en la matemática misma, así como la aplicación en su enseñanza.
2. Identificar los niveles de aceptación hacia la matemática que los alumnos y las alumnas pueden alcanzar durante el proceso educativo si se utiliza la matemática recreativa como herramienta didáctica.
3. Identificar el grado de éxito académico que los y las estudiantes puedan lograr utilizando juegos y otras actividades creativas como parte de la matemática recreativa para visualizar los contenidos tradicionales de la geometría.
4. Elaborar una estrategia metodológica que utilice la matemática recreativa como herramienta para desarrollar la geometría de sétimo año en el III Ciclo de la Educación General Básica.

Para finalizar esta sección, es importante destacar que la problemática apuntada es de las que más necesitan de una pronta solución. La matemática misma, así como su enseñanza y aprendizaje requieren de un renovado vigor que pueda hacer de esta asignatura algo más preciado para quienes la estudian. Este esfuerzo, así como cualquier otro que se haga en procura de una mejor motivación o aceptación, y consecuentemente un mejor aprendizaje, son de vital importancia pues intentan dar respuesta a una problemática real que afecta al fin y al cabo al sistema educativo del país.

Descripción de la Investigación

Esta experiencia, se llevó a cabo dentro de un grupo de sétimo año del Liceo de Belén, durante el III trimestre del año 2001, dando especial énfasis al trabajo de ocho alumnas y alumnos de tal sección, con la intención de revisar de una forma más detallada su avance al trabajar la matemática recreativa, utilizando como técnicas la observación participante y de entrevistas a profundidad, lo que llevan a que esta investigación sea considerada como una investigación acción.

Posteriormente durante el I Trimestre del año 2002, se llevo una etapa de revalidación de la propuesta en cuatro sétimos años del Liceo San Gabriel La Salle, demostrando así que la utilización de las estrategias metodológicas para la enseñanza de la matemática a través de la matemática recreativa funcionan, logrando con estas altos niveles de motivación y éxito académico entre los alumnos y las alumnas con quienes se trabajó, de esta forma vale la pena rescatar expresiones como: "... si tuviera que ver geometría me gustaría verlo de la misma manera que los vimos porque ayudó a aprender cosas que no me gustaban y de una manera muy fácil" (Josué Moreno Prado, Sección 7-1, Liceo San Gabriel-La Salle).

Actividades propuestas

De acuerdo con lo anterior, hacemos ahora una descripción de las posibles actividades que se pueden plantear, así como una descripción de las mismas, y los posibles tipos de objetivos dentro de los cuales se pueden ubicar para usarlos como recurso didáctico en el abordaje de los distintos temas que se estudian en la geometría de 7° año.

1. Cambiemos el cuaderno, vamos al Portafolio**:** Esta técnica permite a el y la estudiante recopilar, a lo largo de la experiencia, que puede ser de un solo trimestre o más, los diferentes aspectos de los temas tratados en clase, así como sus vivencias dentro y fuera del aula. Se trata de cambiar la monotonía del uso del cuaderno por un elemento que le dé a el y la estudiante un mayor nivel de participación y elaboración, dando pie a la creatividad y originalidad de el y la discente. Tal técnica permite dar énfasis a los objetivos de conocimiento, y de síntesis, ya que el alumno y la alumna pueden reconstruir, planificar y diseñar sus propios conocimientos.
2. Hagamos un Mural: Esta actividad, como su nombre lo indica, es un mural que se puede hacer en alguna pared interna o externa del aula, con la finalidad de ofrecerle a el y la estudiante la posibilidad de organizar sus ideas y plasmarlas a través de láminas grandes. De esta forma cada alumno y alumna puede comparar sus ideas con el resto del equipo de trabajo, y con el grupo. La actividad como tal, requiere de que los y las estudiantes realicen el material en el aula como parte de sus actividades. La misma

permite gran flexibilidad al estudiantado, porque en ese momento este se convierte en el ejecutor y autor principal de la construcción y reconstrucción de sus conocimientos. En este participan elementos de los objetivos de conocimiento, comprensión, aplicación y síntesis.

3. Juguemos con los Tangramas: El tangrama es un juego chino que tiene muchos años de tradición, en el que varias figuras geométricas básicas (como cuadrados, triángulos, y romboides), constituyen una forma muy creativa y a la vez recreativa de inventar figuras. Este puede ser usado como parte del estudio de los polígonos y otras figuras, con la finalidad, por ejemplo, de determinar áreas, e incentivar la creatividad y agilidad mental de el alumno y la alumna. Puede corresponder a una forma de aplicación y análisis para el estudio de las figuras geométricas en general.
4. Hagamos figuras con el Geoplano: "Una tabla de clavos", así lo llaman los y las estudiantes, pues esta es una tabla de madera en forma de cuadrado que está cuadriculado, y en la que se colocan clavos. Esto se usa para trabajar con ligas, dando facilidad para que el y la estudiante manipulen tanto los lados como los ángulos de las figuras.

   Presenta la ventaja de que se puede construir muy fácilmente por cada estudiante, ya sea en su casa o en el taller de Artes Industriales (trabajando en forma coordinada con el Departamento de Matemática).

   Este se puede utilizar en aplicación, síntesis, pues el estudiante logra diseñar una serie de figuras utilizando lo aprendido.
5. Recortemos, peguemos y doblemos papel: Por medio de esta técnica el y la estudiante logra deducir las diferentes características y relaciones que tienen las diferentes figuras geométricas que se estudian. Así mismo, esta actividad sirve para que los y las estudiantes construyan estructuras mentales para deducir fórmulas. Ejemplo de ello puede ser los temas de suma de ángulos internos y externos de un triángulo, o las características de los cuadriláteros convexos, tanto paralelogramos como los no paralelogramos. Sirve entonces para los objetivos de conocimiento, comprensión, y análisis.
6. Problemas lógicos, paradojas, anécdotas e historias matemáticas: Muchas veces tenemos problemas para dar la motivación inicial de algunos temas matemáticos, y en

especial de geometría. Una forma de hacer esta motivación es a través de problemas lógicos, paradojas, anécdotas e historias matemáticas.

Estos sirven como elementos motivadores dentro de toda la metodología, y se pueden asignar como trabajos para el hogar o como trabajos ocasionales dentro de la clase con el fin de inspirar una mayor participación e imaginación entre los y las estudiantes. Estas actividades se pueden usar en cualquier momento del proceso de enseñanza y aprendizaje, pues se pueden ubicar dentro de cualquier nivel de conocimiento.

7. Resolvamos Crucigramas: Como se sabe, con dicho juego, se pretende que el y la estudiante utilice sus destrezas, para enlazar palabras colocadas en forma vertical y horizontal. Es decir, a los y las estudiantes se les dan las diferentes características de los respectivos conceptos por buscar, así ellos y ellas determinan cuales son esos conceptos de manera que completen los distintos espacios de una forma lógica y concatenada. De tal forma, podemos decir que esta técnica, responde a las actividades para los objetivos de síntesis, conocimiento y comprensión, de manera que los y las estudiantes pueden resumir y reforzar los conocimientos adquiridos. Como un posible ejemplo se puede citar el tema de los cuadriláteros, aunque es perfectamente válido para cualquier otro tema. (Ver anexo No. 6)
8. Tomemos una “Sopa de letras”: Esta técnica, que guarda cierto parecido con el crucigrama, pretende que el o la estudiante se de a la tarea de buscar palabras claves y específicas dentro de un sistema de letras colocadas en un cuadriculado.

   Las letras que se deben buscar, se encuentran organizados mediante un esquema el cual permite que ellos y ellas puedan relacionar cada término requerido, de manera que se realice una búsqueda con sentido lógico. Esta técnica responde también a los objetivos de conocimiento, comprensión y síntesis. (Ver anexo No. 7)
9. Un “Rally Matemático”: Esta actividad se puede adaptar a cualquier temática. Su naturaleza es competitiva, entre varios subgrupos de la clase (de cuatro a seis estudiantes); se sugiere que el profesor o la profesora sea quien integre tales grupos, ya que se pretende la integración entre los y las estudiantes.

   La actividad consiste en colocar en la pizarra (o en alguna pared del aula) varias “tarjetas” escritas por ambos lados. Lo escrito en la parte visible de la tarjeta es la respuesta a lo que está escrito en la parte no visible de la tarjeta anterior. Por ejemplo, el profesor o la profesora escribe en la parte visible de la tarjeta el nombre de una figura geométrica, y en el reverso una característica de tal figura; es decir, el y la estudiante lee la característica y busca en la tarjeta de la pizarra su respectivo concepto.

Esto puede ser usado como parte de las acciones que buscan conocimiento, compresión, análisis y aplicación.

10. Iluminemos las “Antorchas”: Fomenta en el y la estudiante el sentido de competitividad, equipo y cooperación, desarrolla a su vez la agilidad mental, pues los alumnos y las alumnas divididos en dos grupos, tienen que resolver en la pizarra un determinado problema o situación de forma rápida, demostrando así su dominio del tema.

    Pueden ser utilizadas en una serie de temas, pero principalmente responde a los objetivos de análisis y aplicación, pues analiza, aplica y resuelve una serie de propuestas.

11. Juegos con pajillas: Trabajar con pajillas es una de las actividades en que los y las estudiantes se motivan e interesan por la incertidumbre de no saber en qué serán utilizadas.

    Se pueden usar combinándolas con hilo y aguja, pabilo o algún alambre un tanto flexible para trabajar Desigualdad Triangular. Si se combina con papel de construcción, se puede usar en el desarrollo de los temas de intersección de rectas, planos y puntos.

    Se puede usar en los objetivos: comprensión, análisis y aplicación, pues el y la estudiante diseñan con el material y así construyen su conocimiento, describiendo, interpretando y sistematizando.

12. Elaboración de láminas: Sirve a el y la estudiante como técnica de estudio, pues consiste en la realización de geométricas en hojas de diferentes colores, aquí el y la estudiante dibujan las figuras de tamaño grande con sus nombres al reverso, de tal manera, que al estudiar en clase, o en casa alguien pueda “tomarle la materia”.

    Responde también a los objetivos de comprensión, síntesis y análisis, pues el y la estudiante visualizan con mayor soltura las semejanzas y diferencias, comparando y organizándolo.

13. Otros juegos y entretenimientos matemáticos: Todos aquellos juegos y tipos de actividades, que permiten a los y las estudiantes desarrollar sus destrezas de creatividad. Por lo general los podemos encontrarlos en revistas y libros de matemática, o aquellos que surjan de la creatividad de el y la docente. Para hacer uso de este tipo de material didáctico se necesita del espíritu investigativo de la profesora o el profesor.

    Es a través de estas actividades que podemos utilizar los objetivos correspondientes a síntesis, análisis y aplicación. Pues con estos objetivos los y las estudiantes logran descubrir, construir y deducir los diferentes contenidos.

Reflexiones Finales

Al final de esta experiencia, y en torno a todas las actividades y reflexiones realizadas, este trabajo generó varias conclusiones significativas con respecto a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

En primer lugar, se ha demostrado que la utilización de las estrategias metodológicas para la enseñanza de la matemática a través de la matemática recreativa funciona, logrando así altos niveles de motivación y éxito académico entre los alumnos y las alumnas con quienes se trabaja. Esto se da básicamente porque se permite trabajar activa, creativa, y recreativamente al alumnado, promoviendo un aprendizaje significativo y constructivo.

Entre otras cosas, este éxito se da por varios elementos tales como

1. Mayor participación del alumnado en la construcción de su conocimiento.
2. Estrategias metodológicas innovadoras, que llevan a el y a la docente hacia la búsqueda constante de mejores estrategias cada día.
3. Clases dinámicas, tendientes hacia la visión creativa y lúdica de la enseñanza.
4. Uso adecuado y pertinente de los conocimientos previos.

En vista de lo que esta investigación desarrolla, y como hemos dicho antes, parece ser que no son las actividades por sí mismas las que motivan el aprendizaje de la matemática, sino que es la variedad de las mismas las que propician tal aprendizaje. La matemática recreativa propone entonces, la implementación de una serie de acciones que tiendan hacia el rescate y desarrollo de las potencialidades lúdicas de los y las discentes, en búsqueda, eso sí, del “reto” por lograr su aprendizaje. Pero ese reto no debe quedar ahí.

Debe trascender al alumnado y empapar al docente también. En el buen sentido de la palabra, el "reto" lúdico para el y la docente debe ser entonces, buscar, desarrollar, fomentar, crear, investigar, e implementar diferentes actividades que orienten día a día hacia un mejor aprendizaje. Su reto lúdico es entonces, buscar la manera de no adormecerse en la monotonía de su práctica docente.

Cada nueva actividad debe buscar una mayor exigencia, no solo para el y la estudiante, sino que también para el profesorado. Es decir, cada cosa que se haga debe ser una semilla plantada para la siguiente clase.

Bajo estas consideraciones, podemos sugerir algunas recomendaciones que podrán servir de guía hacia una mejor práctica docente.

1. Sea cual sea la actividad que se plantee para el desarrollo de un determinado tema, esta no debe ser obra de la casualidad, sino que debe responder a una adecuada planificación por parte del o la docente, en cuanto a pertinencia temporal, así como a la posibilidad de llevarla a cabo.
2. Se debe buscar elementos motivadores dentro de cada actividad, de manera que el aprendizaje sea significativo para los y las jóvenes. Si el estudiantado comprende el por qué se cumple algo, esto será de mayor importancia que la mera repetición del concepto.
3. Es importante dar continuidad a los procesos, de manera que todos sus actores se sientan comprometidos con el cumplimiento de las actividades. Esto genera que tanto alumnos, alumnas, y docentes se esmeren cada día por dar más rendimiento.
4. Se debe medir en todo momento la pertinencia de la aplicación de estas actividades de manera que las condiciones imperantes no estén en contra de los objetivos planteados para cada clase.
5. Recordemos que estas actividades buscan promover el aprendizaje cooperativo, y no la irrupción de patrones antojadizos dentro de cada clase. En este sentido, el trabajo en grupos es fundamental a la hora de planear las distintas acciones a desarrollar en el aula.
6. Por último, no debemos olvidar lo que al final busca la matemática recreativa como metodología para la enseñanza de la matemática: "formalizar de una forma atractiva los conocimientos de tal disciplina". El "juego" no debe ser el fin en sí mismo, sino que

debe ser aplicado de forma coherente hacia la búsqueda del aprendizaje formal de la matemática, pero de manera que este aprendizaje sea integral.

En esto, cabe anotar, que es muy importante para la correcta aplicación de las actividades propuestas, afines a la matemática recreativa, la iniciativa que pueda tener el profesor y la profesora, ya que su motivación puede proyectarse a sus alumnos y alumnas, generando en estos mayor o menor gusto por la matemática. Es decir, el y la docente refleja en ellos y ellas su propia motivación y gusto por lo que hace.

Para finalizar, diremos que la matemática, así como su enseñanza, no debe ser considerada como una ciencia aislada, sino que debe ser parte fundamental de la formación integral del ser humano. Bajo este precepto básico, es que debe guiarse nuestro trabajo diario en el aula.

BIBLIOGRAFÍA

Bishop, A. J. "El papel de los juegos matemáticos". Uno 6. Revista de Didáctica de las Matemáticas. Monografía: Juegos y Matemáticas (18): 9-19. Oct. 1998.

Comité Editorial. (1990). Columna de juegos matemáticos. La Matemática y su Enseñanza. Num 5, Vol 2: 27-28, noviembre.

Corbalán, F., Deulofeu, J. "Los juegos, las matemáticas y su enseñanza". Uno 6. Revista de Didáctica de las Matemáticas. Monografía: Juegos y Matemáticas (18): 5-7. Oct. 1998.

Costa Rica: Ministerio de Educación Pública (1996). Programa de Estudios Matemática III Ciclo. Costa Rica. M.E.P.

Costa Rica: Ministerio de Educación Pública (1998). Programa de mejoramiento de la calidad de la Educación General Básica. Componente de Adecuación Curricular. Los Estilos de aprendizaje y estilos de enseñanza. Costa Rica. M.E.P.

Costa Rica: Ministerio de Educación Pública (2001). Programa de Estudios Matemática III Ciclo. Costa Rica. M.E.P.

Costa Rica: Ministerio de Educación Pública (s.p.f.). ¿Cómo confeccionar pruebas y otros instrumentos para la recopilar información en el proceso de evalaución de los aprendizajes? . Costa Rica. M.E.P.

Duhalde, M. E. y González, M. T. (1997). Encuentros cercanos con la matemática. Argentina: AIQUE.

EdoiBaste, M. "Juegos y matemáticas. Una experiencia en el ciclo inicial de primaria" Uno 6. Revista de Didáctica de las Matemáticas. Monografía: Juegos y Matemáticas (18): 21-38. Oct. 1998.

Esperanza, A. (1991). Divertidas Matemáticas. Bogotá: Cooperativa Educativa Magisterio.

Espinoza, G., González, G., Monge, A. (2002). De la Matemática Recreativa a la Matemática Formal: una herramienta didáctica para la enseñanza de la geometría en sétimo año. Heredia. Centro de Investigación y Docencia en Educación, Universidad Nacional.

Florian, S. (1995). Juegos ingeniosos para adolescentes. Bogotá: Cooperativa Educativa Magisterio.

Gómez, T., Madrid M. (1998). Una posibilidad lúdica del fundamento. [http://www.angelfire.com/nv/filofagia1/ludica.html], Abril.

Guzmán, (de) M. (1984) Juegos Matemáticos en la enseñanza. [http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/juemat.htm], Setiembre.

Meza, L. G. "¿Para qué eneseñamos matemática en el colegio?" UMBRAL. Revista del Colegio de Licenciados y Profesores en Letras, Filosofía, Ciencias y Artes. 42-50. I Semestre 2002, San José, Costa Rica.

Meza, L. G. "Consideraciones sobre metodología de la enseñanza de la matemática?" UMBRAL. Revista del Colegio de Licenciados y Profesores en Letras, Filosofía, Ciencias y Artes. 51-58. I Semestre 2002, San José, Costa Rica.

Nickerson, R. S.; Perkins, D. N. y Smith E. (1998) Enseñar a pensar. Aspectos de actitud. Barcelona: Centro de publicaciones del M.E.C. y Edidiones Paidós Ibérica, S. A.

Orton, A. (1996). Didáctica de las matemáticas. Madrid: Ediciones Morata.

Proyecto Estado de la Nación. (2001). Estado de la Nación en Desarrollo Sostenible: sétimo informe 2000. Costa Rica: Editorama, S. A.

Ruíz, A. (2000). El desafío de las Matemáticas. San José: EUNED.

Santaló, L. A. (1998) La matemática como filosofía y como técnica. En Castillo Thais, Espeleta Virginia La matemática su enseñanza y aprendizaje. San José: EUNED.

Toranzos, F. (1972). Enseñanza de la matemática. Buenos Aires: Ed. Kapeluz.

ANÁLISIS DE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA PUESTOS EN JUEGO POR ALUMNOS EN LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES POLINÓMICAS

Rechimont, Estela E. – Ascheri, María E.[1]

Resumen

Las representaciones juegan un rol fundamental en los procesos de construcción de conceptos, por lo que son importantes en la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático (Hitt, 1996).
El presente trabajo muestra los resultados de un estudio en donde analizamos el tipo de representaciones que utilizan los alumnos en la resolución de problemas relativos a las *raíces de ecuaciones polinómicas.*
Con este análisis pretendemos ver que tipos de registros de representación son utilizados por los alumnos para incorporar o darle sentido al concepto: F*unciones polinómicas. Raíces de las correspondientes ecuaciones,* implícitos en la solución de las situaciones problemáticas planteadas. Esto servirá de apoyo para detectar elementos de juicio que puedan servir al docente para evaluar el conocimiento acerca de esta temática, comparándola con el análisis a-priori realizado.
Tratamos de encontrar la respuesta a las preguntas: ¿Cuáles son los distintos registros de representación puestos en juego por los alumnos en la solución de cada problema? ¿Cómo aparecen y cuál es la necesidad de su conversión? ¿Cómo se coordinan en la actividad conceptual? ¿En qué medida la presentación del tema desde una situación problemática es beneficiosa para incorporar y dar sentido a la determinación de las raíces de una ecuación polinómica?

Introducción

En dos trabajos previos [7] y [8] hemos analizado los registros de representación semiótica y las correspondientes funciones semióticas implícitos en la solución de dos problemas propuestos para la Educación Polimodal de la República Argentina, que consideramos pueden ser utilizados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción *Resolución Numérica de Ecuaciones Polinómicas*, contemplada en los Contenidos Básicos Comunes del mencionado nivel educativo.

El concepto *funciones polinómicas en una variable* figura en los Contenidos Básicos para la Educación Polimodal del Ministerio de Cultura y Educación de la Nación [6]. En los contenidos conceptuales del Bloque 2, Álgebra y Geometría, figura: ***Funciones polinómicas en una variable.*** *Operaciones. Raíces de una función polinómica.* La síntesis explicativa pone de manifiesto la relevancia que adquieren las funciones polinómicas como herramientas para representar relaciones funcionales de una variable describiendo situaciones de la vida real. Se menciona que los procedimientos para el cálculo de las raíces de polinomios, por métodos gráficos e iterativos, se podrá realizar con ciertos recursos didácticos: calculadoras, calculadoras graficadoras, computadoras. Los Contenidos Procedimentales no especifican explícitamente el tratamiento de estas funciones y/o ecuaciones.

Uno de los objetivos primordiales en el estudio de las funciones polinómicas es la habilidad para determinar raíces de las correspondientes ecuaciones.

Es por ello que consideramos que el análisis de los distintos registros de representación utilizados por los alumnos en la resolución de las situaciones problemáticas que les presentamos, merece una atención especial desde la problemática específica del proceso de enseñanza – aprendizaje.

Presentamos un trabajo en donde se muestran resultados y conclusiones de una investigación que hemos realizado sobre los distintos tipos de registros de representación que son utilizados en la *Resolución Numérica de Ecuaciones Polinómicas*, por alumnos ingresantes a las carreras de Profesorado en Matemática y Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina. El mismo es continuación de los dos artículos previos citados anteriormente [7] y [8].

Marco teórico

En el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se observa, últimamente, que gran parte de las investigaciones en Didáctica de la Matemática se desarrollan alrededor del uso de nociones semióticas, como la noción de representación. Esta noción se toma como equivalente a una señal externa, un signo o marca, esquemas o imágenes mentales, que muestran y hacen presente un concepto matemático.

La actividad matemática surge cuando el sujeto se enfrenta a situaciones problemáticas (elementos extensivos) en cuya solución utiliza elementos ostensivos (representación usada en la actividad matemática) e intensivos (ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones). Godino [3], denomina “entidades actuativas” a las acciones que realiza el sujeto en la búsqueda de una solución.

[1] Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad Nacional de La Pampa - Uruguay 151 - (6300)

No es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de *representación* en Matemática (Duval, 1995).

En las formas convencionales de representación se distinguen dos familias de sistemas: *representaciones simbólicas* (carácter alfanumérico, se simulan mediante programas informáticos, la sintaxis se describe por reglas de procedimientos) y *representaciones gráficas* (de tipo figurativo, carácter analógico, sintaxis dada por reglas de composición y convenios de interpretación) (Rico, 2000).

La representación pone en consideración el objeto *representante o significante* (símbolo o representación) y el *representado o significado* (contenidos conceptuales).

Todo conocimiento moviliza una actividad de representación. Duval [2] sugiere que no deben confundirse los objetos matemáticos con su representación, y define los registros de representación como un medio de expresión que se caracterizan por sus signos propios y la forma en que estos se organizan. Una palabra escrita, una notación, un símbolo o una gráfica representan a un objeto matemático. Cambiar la forma de una representación en matemática es difícil para los alumnos, y la comprensión de un contenido parece limitada a la forma de representación utilizada.

Duval [2] pone de manifiesto tres fenómenos estrechamente vinculados en la relación de enseñanza-aprendizaje: diversificación de los registros de representación semiótica, diferenciación entre representante y representado, coordinación entre los diferentes registros. Según este autor, existen tres actividades cognitivas de representación:

- La *formación* de representaciones en un registro semiótico particular, la cual implica una selección en el conjunto de los caracteres y de las determinaciones que constituyen lo que se “quiere” representar.
- El *tratamiento* que se produce cuando la transformación origina otra representación en el mismo registro.
- La *conversión* que se produce en la transformación de una representación en un registro distinto al de la representación inicial.

Santa Rosa - La Pampa – Argentina. rechimont@exactas.unlpam.edu.ar

Estas actividades las tendremos en cuenta para el análisis de la producción de los alumnos en la solución de los problemas propuestos, conjuntamente con las siguientes entidades: *lenguaje, situaciones, conceptos, propiedades.*

Para ello se entregaron a un grupo de alumnos de los primeros años de las carreras de Profesorado en Matemática y Licenciatura en Matemática, futuros docentes del Nivel de Educación Polimodal, los enunciados de dos problemas para su consideración.

Problemas Propuestos

En la resolución de problemas en las que están implícitas funciones y ecuaciones polinómicas, se recurre en algunos casos a las propiedades de los polinomios (factorización) y en otros a métodos numéricos.

Proponemos a los alumnos la resolución de dos problemas: *el problema de la esfera y el problema de la caja.*

I. El problema de la esfera

En un cilindro de base circular de 10 cm de radio, cuya altura es mayor que dicho radio, reposa una esfera de 7 cm de radio que se recubre de agua (la superficie libre del agua es tangente a la esfera). Se reemplaza la esfera por otra de x cm de radio ($0<x\leq 10$), siendo la cantidad de agua en el cilindro la misma. A partir de estos datos, se desea estudiar los siguientes fenómenos respecto de la nueva esfera:

a) ¿Cuándo la esfera está más abajo que el nivel del agua (sin llegar a ser tangente)?.

b) ¿Cuándo la esfera supera el nivel del agua?.

c) ¿Cuándo la esfera está exactamente recubierta por el agua (es tangente)?.

II. El problema de la caja

En una fábrica de chocolates se decidió envasar los bombones en un modelo de caja que sea un prisma de base x cm, de altura (x-2) cm, de profundidad (x+10) cm y cuyo volumen sea igual a 957 cm^3. Para poder armar esta caja se desean conocer las medidas de sus lados. Para ello:

a) Plantee la ecuación correspondiente, según los datos del problema.

b) Separe las raíces de esta ecuación realizando, primero manualmente y luego con la computadora, el gráfico de la función polinómica resultante.

c) En el apartado b) localizó las raíces de la ecuación polinómica. Utilizando estos datos y realizando 10 iteraciones del método de bisección, obtenga las medidas de los lados de este prisma.

c) Compruebe los resultados obtenidos utilizando la PC.

Del análisis a-priori realizado por las autoras y que figura en los trabajos [7] y [8] podemos inferir que:

- El Problema I puede resolverse analítica y numéricamente a partir de las propiedades de los polinomios (principalmente, los teoremas de factorización).
- El Problema II requiere además, de otros recursos para su resolución numérica. Esto es, requiere del uso de métodos numéricos (técnicas iterativas) diseñados expresamente para la resolución de ecuaciones polinómicas.

Análisis de la producción de los alumnos en la solución de los dos problemas

Para un buen desarrollo del aprendizaje y el pensamiento es conveniente que los alumnos realicen conversiones en distintos registros, estableciendo la correcta coordinación entre los mismos. También es importante que diferencien correctamente los distintos registros de representación, establezcan la coordinación entre ellos y puedan utilizar conceptos y propiedades matemáticas involucradas en la temática y que atañe al registro en cuestión.

Nuestro objetivo es determinar cuáles de los registros de representación presentes en la solución de los problemas propuestos, analizados por las autoras en un análisis a-priori [7] y [8] son más utilizados por los alumnos en la resolución de dichos problemas. También analizaremos si utilizan más de un registro y en tal caso de qué manera relacionan los diferentes registros.

Para ello tendremos en cuenta los siguientes registros de representación:

- *Registro verbal.* Cuando el lenguaje común es el que se utiliza para representar situaciones del mundo real.
- *Registro analítico*. Cuando se hace referencia a la definición de algún concepto mediante una expresión algebraica.
- *Registro simbólico*. Cuando se da la definición de un concepto mediante expresiones simbólicas sustentadas por las reglas de la lógica formal.
- *Registro figural*. Cuando se expresa algún concepto mediante una figura.

- *Registro algebraico*. Cuando se llega a la expresión final por medio de operaciones algebraicas.
- *Registro tabular*. Cuando los valores numéricos se organizan en una tabla de valores.
- *Registro numérico*. Cuando se realizan todas las evaluaciones que conllevan y que están involucradas en el método de cálculo.
- *Registro grafical*. Corresponde a la representación en el plano cartesiano, incluyendo los convenios implícitos en la lectura de gráficos (interpretación de ejes coordenados, de unidades, de corte o cruce de la gráfica con respecto al eje x, etc.).

Del grupo total de alumnos a los que se les entregaron los dos problemas, siete fueron los que respondieron a la propuesta. La solución dada por cada alumno ha sido categorizada de acuerdo con el tipo de registro que ha utilizado, según las categorías de análisis que hemos definido anteriormente.

Datos correspondientes al Problema I:

Registros / Alumnos	Verbal	Analítico	Simbólico	Figural	Algebraico	Tabular	Numérico	Grafical	Resuelve
1	*	*	*	*	*	---	---	---	si
2	*	*	*	---	*	*	*	---	si
3	---	---	*	*	---	---	*	---	no
4	*	*	*	*	*	---	---	---	no
5	*	---	*	*	---	---	---	---	incomp.
6	*	---	*	*	---	---	*	---	si
7	*	---	---	*	---	---	---	---	si

Datos correspondientes al Problema II:

Registros / Alumnos	Verbal	Analítico	Simbólico	Figural	Algebraico	Tabular	Numérico	Grafical	Resuelve
1	---	*	*	---	*	---	---	---	no

2	---	*	---	---	---	---	---	---	no
3	---	*	---	*	*	---	---	---	no
4	*	*	---	---	---	---	---	---	no
5	---	*	---	*	*	---	---	---	no
6(1)									
7(1)									

(1) No se les entregó este problema.

Sumatoria de datos de las dos tablas anteriores:

Registros / Problemas	Verbal	Analítico	Simbólico	Figural	Algebraico	Tabular	Numérico	Grafical	Resuelve
Problema I	6	3	6	6	3	1	3	---	4
Problema II	1	5	1	2	3	---	---	---	---

Según los resultados expresados en las tablas anteriores se observa:

Alumno 1. *Problema I.* Plantea en distintos registros y resuelve según registro figural. No coordina los distintos registros que utiliza. El registro algebraico es incompleto.

Problema II. Plantea en distintos registros, fundamentalmente en el analítico-algebraico, pero no llega a obtener la solución. No plantea registro numérico.

Alumno 2. *Problema I.* Utiliza distintos registros y efectúa una buena coordinación de los mismos obteniendo la respuesta final en registro algebraico-numérico.

Problema II. Solamente plantea en registro analítico, pero no resuelve.

Alumno 3. *Problema I.* Del registro figural pasa al simbólico-numérico y no resuelve.

Problema II. Presenta la situación en registro figural; convierte a registro analítico y algebraico, pero no resuelve. (No logra determinar las raíces).

Alumno 4. *Problema I.* Utiliza distintos registros. Plantea la situación en registro algebraico, pero no resuelve la ecuación obtenida. En registro verbal expresa que la solución de esa ecuación es un dato a tener en cuenta para continuar con los pasos que lo llevaría a la solución del problema.

Problema II. Solamente expresa en registros analítico y verbal, sin resolver.

Alumno 5. *Problema I.* Trabaja escasamente en registro simbólico. Expresa en registro verbal una respuesta que se supone concluye desde el registro figural, pero la misma es incompleta.

Problema II. Plantea la situación en registro analítico y registro figural. Utiliza el registro algebraico trabajando en él de manera incompleta, pues no resuelve la ecuación hallada, es decir no convierte a registro numérico.

Alumno 6. *Problema I.* Trabaja en distintos registros y convierte de registro simbólico y figural a numérico. También trabaja en registro verbal. Utilizando estos registros resuelve el problema sin considerar el registro analítico-algebraico.

Alumno 7. *Problema I.* Esta totalmente planteado en registro figural; pasa a registro verbal y con lo planteado en estos registros obtiene la solución del problema considerado.

De este análisis observamos que cada alumno utiliza distintos registros de representación. En algunos casos logra relacionarlos y en otros aparecen como independientes. También observamos que el número de registros varía de un alumno a otro. El trabajo por parte de los alumnos, en ciertos casos, aparece como inconcluso. Cuando llegan a coordinar los distintos registros utilizados obtienen la respuesta al problema.

El trabajo en el registro numérico, tanto para el Problema I como para el Problema II, es escaso. Solamente un alumno trabaja en registro tabular y ninguno en registro gráfico.

Para resolver el problema I, analítica y numéricamente, algunos alumnos hicieron uso de propiedades de los polinomios (principalmente, los teoremas de factorización), tal como lo habíamos anticipado.

Para resolver el Problema II, se requiere del uso de métodos numéricos (técnicas iterativas). Como el grupo de alumnos con el que trabajamos en esa etapa inicial de su carrera aun no ha visto esas técnicas, resulta evidente, como puedo observarse en las tablas, que ninguno obtiene la respuesta numérica de este problema.

Es evidente que la actividad cognitiva de formación (de registros) está presente en cada caso. Cada alumno hace un tratamiento del registro en cuestión que le conduce a una nueva representación. Esto produce la actividad cognitiva de conversión de un registro a otro.

Conclusiones

Como se había anticipado en los artículos anteriores [7] y [8], el trabajo de los alumnos se realizó, fundamentalmente, en un marco geométrico utilizando registros de representación de uso frecuente por parte de los mismos.

En general, observamos que los alumnos identifican con mayor frecuencia los registros verbal, simbólico y figural (que les resulta más intuitivo); luego los registros analítico y algebraico; escasamente el registro numérico y no identifican el registro tabular y el registro gráfico. No siempre logran establecer correctamente las coordinaciones entre los distintos registros, hecho que haría que pudieran arribar a la solución de los problemas planteados. La falta de coordinación puede darse también por la insuficiencia de conocimientos de la temática involucrada al querer trabajarla en algún registro en particular, por ejemplo, plantean la ecuación sin llegar a resolverla por desconocimiento, quizás, de los pasos algebraicos necesarios.

Respecto del primer problema, el trabajo en el marco geométrico les permite arribar o esbozar una solución del mismo.

Como en el segundo problema la determinación de las raíces de la ecuación polinómica requiere del uso de procedimientos numéricos para su solución, los alumnos no llegan a establecer la conversión del registro geométrico-algebraico al numérico. Es evidente que las representaciones simbólicas de carácter alfanumérico que se simulan mediante programas informáticos y cuya sintaxis se describe por reglas de procedimientos no son utilizadas por los alumnos. Pero en este caso, el uso de estas herramientas computacionales resultaría ideal. Así, los alumnos comprobarían lo indispensable del uso de las computadoras para resolver cierto tipo de problemas y tendrían una demostración tangible de cómo pueden ayudarles a realizar estas tareas que conllevan una gran cantidad de cálculos, minimizando los tiempos que requieren.

Bibliografía

[1] Artigues, Ch. y otros.,1991, *Math 1res Set E, analyse*, Hachette Lycées, París.

[2] Duval, R., 1995, *Sémiosis et pensée humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals*, Peter Lang S.A., Editions scientifiques européennes.

[3] Godino, J. D., 1998, *Un modelo semiótico para el análisis de la actividad y la instrucción matemática*, VIII Congreso Inter. de la Asoc. Española de Semiótica, España.

[4] Godino, J. D. – Recio, A. M., 1998, *Un modelo semiótico para el análisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en Educación Matemática,* Proceedings of the 22 th International Conference of PME, Vol. 3, South Africa.

[5] Hitt, F., 1996, *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos,* Investigaciones en Matemático Educativa, México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 245-264.

[6] Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, 1997, *Contenidos Básicos para la Educación Polimodal,* República Argentina.

[7] Rechimont, E. E. – Ascheri, M. E., 2003, *Registros de representación semiótica. Análisis a-priori de una situación problemática,* V SEM, Chivilcoy, Bs. As., Argentina.

[8] Rechimont, E. E. – Ascheri, M. E., 2003, *Registros de representación semiótica en el concepto "resolución numérica de ecuaciones polinómicas". Análisis a-priori,* Relme 17, Chile.

[9] Rico, L., 2000, *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática*, IV Simposio SEIEM, U. de Granada, España.

Aplicación del método CPM intercambio costo-tiempo a la Evaluación de Proyectos[1]

Carlos E. Azofeifa[2]

Resumen

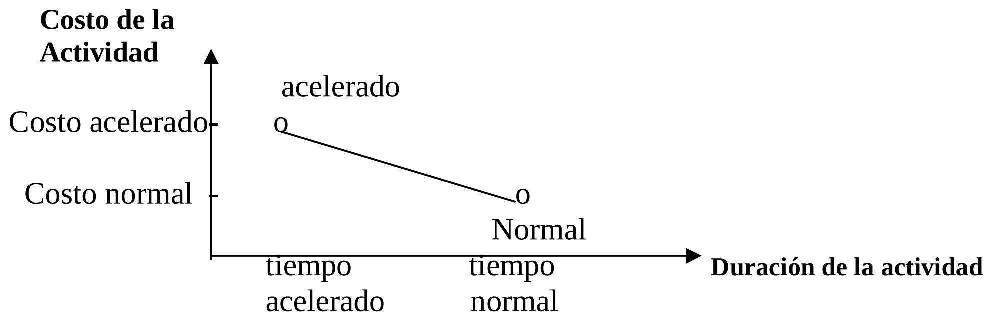
Sabemos que la ciencia administrativa (PERT/CPM) ayuda a comprobar y controlar aquellos proyectos que involucran muchas tareas interrelacionadas, sin embargo, la mayoría de las veces se debe gastar dinero o tiempo extra para acelerar la terminación de un proyecto al valor deseado. Presentamos la resolución del problema usando la técnica de programación lineal para encontrar, cuál es la manera menos costosa de intentar cumplir con la meta de tiempo de terminación del proyecto usando la hoja electrónica Excel.

Palabras claves

Costo-tiempo- administración de proyectos-calendario-programación lineal

Introducción

Anteriormente en [3] vimos como aplicar las técnicas de PER/CPM a la evaluación de proyectos usando Excel, observamos también como calcular la probabilidad de terminar en una fecha fija un proyecto. Además usamos la técnica de Simulación MonteCarlo para obtener un resultado más realista al observar miles de escenarios y poder calcular la probabilidad de terminar a tiempo un proyecto usando tanto Excel como Crystal Ball. El método CPM de intercambio tiempo-costo que usaremos aquí se ocupa de determinar cuáles actividades se deben acelerar y además cuánto se deben acelerar para que el proyecto termine en su tiempo límite de la manera menos costosa.



La gráfica anterior presenta los datos necesarios para determinar cuánto acelerar una actividad: el punto normal indica el tiempo y el costo de la actividad cuando se realiza de manera normal, el punto acelerado muestra el tiempo y el costo de la actividad cuando se acelera totalmente la actividad. Por tanto supondremos que la aceleración parcial de las actividades sin importar el nivel nos proporcionará una combinación de tiempo y costo que estará situada de hecho en algún punto del segmento de recta entre los dos puntos citados.

[1] Este artículo fue financiado por el Proyecto No 820-A2-115, inscrito en la Vicerrectoría de Investigación de la U.C.R

[2] Profesor Escuela de Matemática U.C.R – U.N.A

Por esta simplificación solamente necesitamos recolectar datos para obtener los puntos anteriores.

Beneficios al completar un proyecto antes de su tiempo previsto:

- Pueden haber incentivos monetarios por terminar a tiempo el proyecto.
- Reducción de los costos indirectos.
- Vencer la presencia de la competencia en el mercado.
- Algunas veces una actividad se puede atrasar por motivos ajenos al personal (por ejemplo, entregas tardías del proveedor) por tanto se debe evitar terminar tardíamente el proyecto para evitar penalizaciones.

Procedimiento del método CPM intercambio tiempo-costo

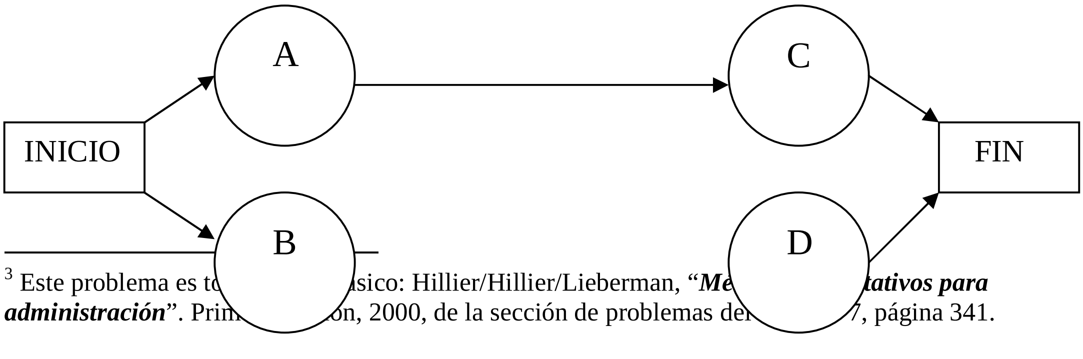
- Obtención de estimaciones de costos y tiempos tanto regulares como acelerados para cada una de las actividades.
- Determinar la longitud de todas las rutas usando los tiempos regulares para cada actividad.
- Identificación de las rutas críticas.
- Actividades de aceleración en la(s) ruta(s) crítica(s) a fin de incrementar los costos si los costos de aceleración no exceden a los beneficios.

Uso de Excel en la Administración de Proyectos

Hoy día la potencia de las computadoras personales recientemente ha hecho posible que el Administrador de Proyectos use hojas electrónicas de cálculo para evaluar el riesgo de inversiones financieras, evaluación de proyectos, planes de retiro y otros tipos de decisiones de negocios. Lo anterior se debe a la flexibilidad y capacidad estadística de la hoja de cálculo la cual la torna especial también para el desarrollo de los modelos de simulación, particularmente en el uso de la simulación MonteCarlo, la cual se aplica a un gran número de problemas. La aplicación de CPM intercambio tiempo-costo a los proyectos usando Excel lo haremos mediante la solución de un problema aplicado, didácticamente es una de la maneras más eficientes de presentar las bondades de un método sin necesidad de realizar una exposición exhaustiva de la teoría, en este caso de la programación lineal.

Problema Aplicado[3]

La Tinker Construction Company está lista para comenzar un proyecto que debe terminar en 12 meses. Este proyecto tiene cuatro actividades (A,B,C,D) con la red de proyecto mostradas en seguida.



[3] Este problema es to… ásico: Hillier/Hillier/Lieberman, "***Me… tativos para administración***". Prim… ón, 2000, de la sección de problemas de… 7, página 341.

El gerente de proyecto, concluyó que no puede cumplir con la fecha de entrega si realiza todas las actividades en la forma normal. Por lo tanto, decide usar el método CPM de intercambio tiempo-costo para determinar la forma más económica de acelerar el proyecto para cumplir con la fecha de entrega límite. Recolectó los siguientes datos para las cuatro actividades.

Actividad	Tiempo Normal (meses)	Tiempo acelerado (meses)	Costo normal ($)	Costo acelerado
A	8	5	25000	40000
B	9	7	20000	30000
C	6	4	16000	24000
D	7	4	27000	45000

a) Use el análisis del costo marginal para resolver el problema.
b) Considere la ruta de arriba de red del proyecto. Formule un modelo de programación lineal de dos variables para el problema de cómo minimizar el costo de realizar esta secuencia de actividades dentro de 12 meses. Use el método gráfico para resolver este modelo.
c) Repetir la parte b) para la ruta de debajo de la red del proyecto.
d) Combine los modelos de las partes c) y d) en un solo modelo completo de programación lineal para el proyecto de cómo minimizar el costo de terminar el proyecto dentro de 12 meses. ¿Cuál debe ser la solución óptima de este modelo?

Solución:

a) Este método del análisis del costo marginal busca la forma menos costosa de reducir la duración del proyecto un mes a la vez. Para ello establecemos la siguiente tabla:

Actividad	Tiempo normal(meses)	Tiempo acelerado(meses)	Costo normal ($)	Costo acelerado	Reducción máxima	costo por mes de aceleración
A	8	5	25000	40000	3	5000
B	9	7	20000	30000	2	5000
C	6	4	16000	24000	2	4000
D	7	4	27000	45000	3	6000

Observemos la duración de las diferentes rutas:

Actividad a acelerar	Costo acelerado	Duración de la ruta	
		A-C	B-D

		14	16
B	5000	14	15
B	5000	14	14
D	6000	14	13
C	4000	13	13
D	6000	13	12
C	4000	12	12

Por tanto el costo de acelerar las actividades para realizar el proyecto en un tiempo límite de 12 semanas es de $30000, terminando un costo total de $118000. Con redes muy grandes, el análisis de costo marginal se vuelve muy difícil de manejar, por esta razón la recomendación es aplicar la programación lineal como veremos a continuación.

b) usando la ruta A-C

Sean Y_A= reducción en A debido a la aceleración.

Y_C = reducción en C debido a la aceleración.

Por lo tanto el problema expuesto usando programación lineal es:

Minimizar $5000\, Y_A + 4000\, Y_C$

Sujeto a

$Y_A \leq 3$

$Y_C \leq 2$

$Y_A + Y_C \geq 2$, esta restricción se debe a que se deben hacer mínimo 2 aceleraciones

$Y_A \geq 0$, $Y_C \geq 0$

A	B	C	D	E	F	G
Plan de minimizar						
Actividad:	Y_A	Y_C				
Cantidad que se reducen	0	2	**Ganancias**			
Costo de aceleración	$5,000	$4,000	$8,000			
Restricciones	Uso de recursos		Total LI		LD	Holgura
Actividad A	1	0	0	≤	3	3
Actividad C	0	1	2	≤	2	0
Requerimiento	1	1	2	≥	2	0

Las fórmulas que se deben usar en Excel para aplicar luego Solver[4] son dadas por:

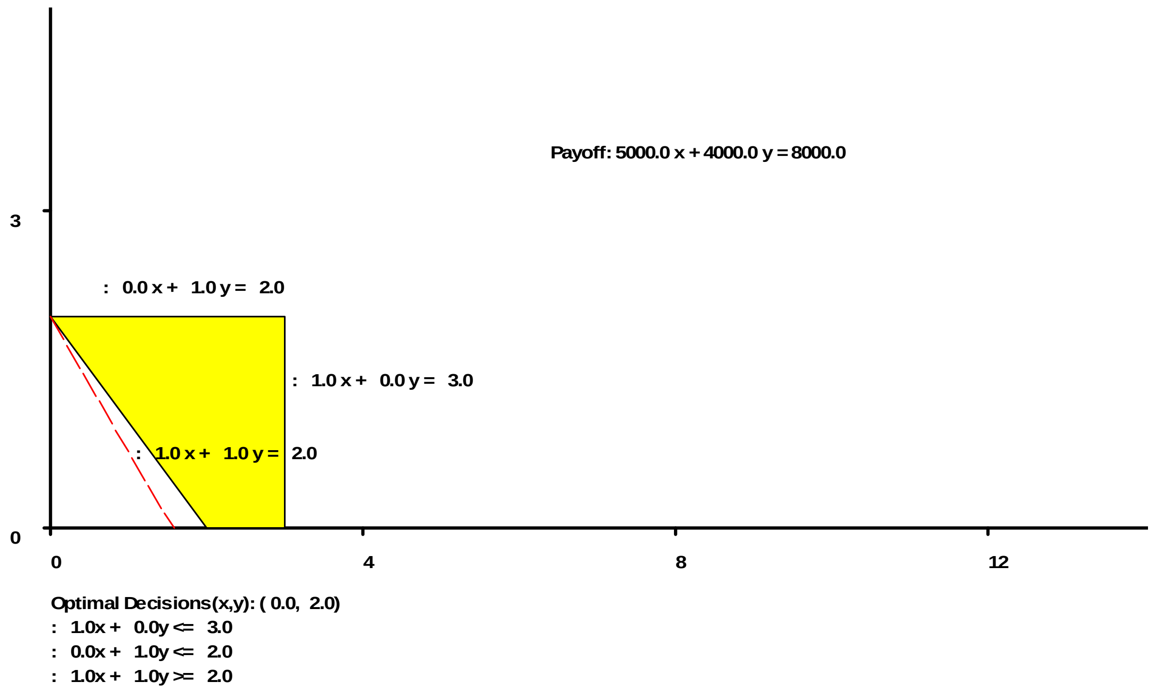
A	B	C	D	E	F	G
Plan de minimizar						
Actividad:	Y_A	Y_C				
Cantidad que se reducen	0	2	**Ganancias**			

[4] Solver se encuentra en el menú Herramientas.

Margen contrib. unit.	5000	4000	=SUMAPRODUCTO($B$4:$C$4,B5:C5)			
Restricciones	Uso de	recursos	Total LI		LD	Holgura
Actividad A	1	0	=SUMAPRODUCTO($B$4:$C$4,B7:C7)	≤	3	=F7-D7
Actividad C	0	1	=SUMAPRODUCTO($B$4:$C$4,B8:C8)	≤	2	=F8-D8
Requerimiento	1	1	=SUMAPRODUCTO($B$4:$C$4,B9:C9)	≥	2	=F9-D9

Así la solución óptima es $Y_A = 0$ y $Y_C = 2$ con un costo mínimo de $8000

A continuación presentamos la solución en forma gráfica del problema de programación lineal de dos variables (dos dimensiones). Así la geometría bidimensional nos representa y optimiza un modelo de programación lineal usando Solver, este método es una buena base intuitiva para una gran parte de problemas de programación lineal los cuales necesitan más de dos variables y por tanto el método no es posible aplicarlo. Este software GLP nos grafica cada una de las restricciones y además nos da la región factible: región donde es posible encontrar la solución, además nos proporciona la solución óptima para la función objetivo (se le debe indicar al programa si el problema es, minimizando o maximizando). Este software nos permite realizar también estudios de sensibilidad, para más información acerca de él se puede consultar [6].



La línea roja punteada representa la función objetivo llamada en este programa Payoff, note como el programa además de localizar geométricamente la solución, nos ofrece la solución numérica: 8000. Observe además que la solución se encuentra en una esquina del simplex (región en amarillo), existe un teorema que garantiza que las soluciones se dan en los puntos esquina de esta región.

Este graficador LP Optimizer versión 2.6 se desarrolló en la Universidad de Stanford bajo la supervisión del profesor Jeffrey Moore PhD.

c) De igual manera que en b) se tiene
Minimizar $5000\ Y_C + 4000\ Y_D$
Sujeto a

$Y_B \leq 3$
$Y_D \leq 2$
$Y_B + Y_D \geq 4$, en esta ruta se requieren también al menos dos aceleraciones.
$Y_B \geq 0$, $Y_D \geq 0$
La solución dada por Solver es $Y_B = 2$ y $Y_D = 2$ con un costo mínimo de $22000

d) Combinando los casos anteriores se tiene:

Y_A= reducción en A debido a la aceleración
Y_B= reducción en B debido a la aceleración
Y_C= reducción en C debido a la aceleración
Y_D= reducción en D debido a la aceleración

Minimizar $5000\ Y_A + 5000\ Y_B + 4000\ Y_C + 6000\ Y_D$
Sujeto a
$Y_A \leq 3$
$Y_B \leq 2$
$Y_C \leq 2$
$Y_D \leq 3$
$Y_A + Y_B \geq 2$
$Y_C + Y_D \geq 4$
$Y_A \geq 0$, $Y_B \geq 0$, $Y_C \geq 0$, $Y_D \geq 0$

Es fácil comprobar que la solución óptima es (0,2,2,2) y el costo mínimo es $30000, dando un costo total de $118000.

e) Aplicando la parte d) se obtiene

	A	B	C	D	E	G	I	J	K	L
3						Máximo	Costo			
4		Tiempo		Costo		tiempo	acelerado	tiempo	tiempo	tiempo
5	Actividad	Normal	Acelerado	Normal	Acelerado	Reducción	por semana	comienzo	Reducción	final
6	A	8	5	$25000	$40000	3	$5000	0	0	8
7	B	9	7	$20000	$30000	2	$5000	0	2	7
8	C	6	4	$16000	$24000	2	$4000	8	2	12

9	D	7	4	\$27000	\$45000	3	\$6000	7	2	12
10										
11								tiempo final =	12	
12								Costo total =	\$118000	
13										

Por tanto para terminar el proyecto en 12 semanas se requiere un costo de \$118000, es decir 88000 de costo normal, más \$30000 por acelerar las actividades hasta finalizar en el tiempo límite de 12 semanas.

Se aplica Solver con los siguientes datos:
Celda objetivo: \$K\$11
Celdas cambiantes: \$J\$: \$K\$9, \$K\$11
En Opciones se debe marcar "*Adoptar modelo lineal*" y "*Asumir no negativos*"
Además en Solver en la etiqueta "*sujetas a las siguientes restricciones*" deben aparecer las siguientes restricciones:

\$I\$8 ≥ \$K\$6
\$I\$89 ≥ \$K\$7
\$J\$11 ≤ 12 \$J\$11 ≥ \$K\$9
\$J\$11 ≥ \$K\$8 \$J\$6 : \$J\$9 ≤ \$G\$6 : \$G\$9

f) En el caso que se quisiera terminar en menos tiempo digamos 11 semanas se tiene un costo más alto, para este caso:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1						Máximo	Costo			
2		Tiempo		Costo		tiempo	acelerado	tiempo	tiempo	tiempo
3	Actividad	Normal	Acelerado	Normal	Acelerado	Redución	por semana	comienzo	Redución	final
4	A	8	5	\$25000	\$40000	3	\$5000	0	1	7
5	B	9	7	\$20000	\$30000	2	\$5000	0	2	7
6	C	6	4	\$16000	\$24000	2	\$4000	7	2	11
7	D	7	4	\$27000	\$45000	3	\$6000	7	3	11
8										
9								tiempo final =	11	
10								Costo total =	\$129000	
11										

En caso que nos interesara alargar una semana más el tiempo de duración se tendría:

	A	B	C	D	F	G	H	I	J	K
1						Máximo	Costo			
2		Tiempo		Costo		tiempo	acelerado	tiempo	tiempo	tiempo
3	Actividad	Normal	Acelerado	Normal	Acelerado	ReducCión	Por semana	comienzo	ReducCión	final
4	A	8	5	$25000	$40000	3	$5000	0	0	8
5	B	9	7	$20000	$30000	2	$5000	0	2	7
6	C	6	4	$16000	$24000	2	$4000	8	1	13
7	D	7	4	$27000	$45000	3	$6000	7	1	13
8										
9								tiempo final =	13	
10								Costo total =	$108000	
11										

Las fórmulas utilizadas para este caso y los anteriores son dadas por:

G	H	I	J	K
Máximo tiempo Reducción	Costo Acelerado por semana	tiempo comienzo	Tiempo Reducción	Tiempo Final
=C5-D5	=(F5-E5)/G5	0	0	=I5+C5-J5
=C6-D6	=(F6-E6)/G6	0	2	=I6+C6-J6
=C7-D7	=(F7-E7)/G7	8	1	=I7+C7-J7
=C8-D8	=(F8-E8)/G8	7	1	=I8+C8-J8
		tiempo final =	13	
		Costo total =	=SUMA(E5:E8)+SUMAPRODUCTO(H5:H8,J5:J8)	

Observe que el problema lo que realmente realiza es minimizar su costo total incluido el costo de acelerar actividades, sujeto a la restricción de que la duración del proyecto debe tener un tiempo menor o igual a la especificada por el gerente del proyecto. Las plantillas anteriores son facilitadas en el libro, sin embargo usted puede crear sus propias plantillas.

Conclusión:

Este método de CPM intercambio de tiempo-costo le permite al gerente del proyecto investigar el efecto sobre el costo total de cambiar la duración estimada del proyecto por varios valores alternativos de manera que se termine el proyecto dentro de su límite a un costo mínimo. Se debe tener en consideración si existe incertidumbre sobre la duración de las actividades en tal circunstancia se puede aplicar la técnica de MonteCarlo para obtener resultado más reales, sin embargo se debe llevar un cuidadoso control sobre los costos para intentar mantener el proyecto dentro de su presupuesto.

Bibliografía

1. Anderson, Sweeney, Williams. ***Métodos cuantitativos para los negocios***. Séptima edición. México. Editorial Thomson.1999.
2. Azarang,M-Gracía, E. ***Simulación y análisis de modelos estocásticos.*** McGraw-Hill. México. 1996.
3. Azofeifa, Carlos. ***Administración de Proyectos con Excel usando PERT/CPM.*** Revista Uniciencia. Universidad Nacional. Heredia. 2003.
4. Badiru/Pulat. ***Comprehensive Project Management; Integrating optimation models, management principles, and computers.*** Prentice Hall. Englewood Cliffs. New York. 1995.
5. Bierman, Bonini, Hausman. ***Análisis cuantitativo para la toma de decisiones***. Editorial McGraw-Hill. México. 2000.
6. Eppen, F/ Gould, G/ Schmidt, C.P/ Moore, J/ Weatherford, L. ***Investigación de operaciones en la ciencia administrativa.*** Prentice Hall. México. 2000.
7. Hillier /Lieberman***. Investigación de operaciones***. McGraw-Hill, Inc. México. 2001.
8. Hillier /Hillier/Lieberman***. Métodos cuantitativos para administración***. Un enfoque y casos de estudio, con hoja de cálculo. McGraw-Hill, Inc. México. 2000.
9. Kamburowski, J. ***Bounding the distribution of project duration in PERT Networks***. Operations Reasearch Letters, 12: 17-22, julio. 1992.
10. Kinkoph S. ***Microsoft Excel 2000***. Prentice Hall. 1999.
11. Mathur, K/ Solow, D. ***Investigación de operaciones. El arte de la toma de decisiones.*** Prentice Hall. México. 1996.

Memorias Tercer Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora

Uso de Excel en la enseñanza de las series[1]

Carlos E. Azofeifa[2]

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo mostrar el uso de la herramienta muy conocida y flexible como lo es la hoja electrónica Excel, en el manejo de un tema importante en el área de la matemática aplicada, a saber: la teoría de sucesiones y series. El objetivo central es que el estudiante use esta herramienta en aquellos casos en que no pueda concluir algo sobre la convergencia de alguna serie o sucesión, o inclusive si la serie es convergente y le interesa calcular o estimar su suma.

Procedimiento

Uno de nuestros propósitos es que a medida que se necesite ampliar los valores de la sucesión o bien poder tener un estimado de su límite cuando n tiende a infinito use esta herramienta. Como las sucesiones son funciones de ⊆ en ∇, por tanto procederemos a su graficación de manera similar a las funciones reales, para ello consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Graficar la sucesión

$$a_n = \frac{n^2}{2^n - 1}$$

Además de poder observar la gráfica de esta sucesión, nos interesa su comportamiento cuando n toma valores muy grandes, para ello nos damos una pequeña lista de valores para "n" veamos:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	1.33	1.29	1.07	0.81	0.57	0.39	0.25	0.16

Tabla # 1

La lista la podemos poner de manera horizontal o vertical, en general se recomienda ponerla de manera vertical si se van a graficar varias funciones de manera simultánea para compararlas. Cuando la sucesión tiene un comportamiento irregular podríamos darnos una lista de tamaño más grande de lista, lo anterior lo podemos realizar en Excel de la siguiente manera: Primeramente colocamos el "1" en alguna celda, posteriormente marcamos Edición / Rellenar / Series / marcar fila / incremento en uno, tipo lineal y límite nueve, para nuestro caso, o bien poner el 1 en una celda y seguidamente debajo el 2, luego se marcan a la vez tanto la celda que contiene al 1 como la del 2 y se hace una copia hasta el número deseado.

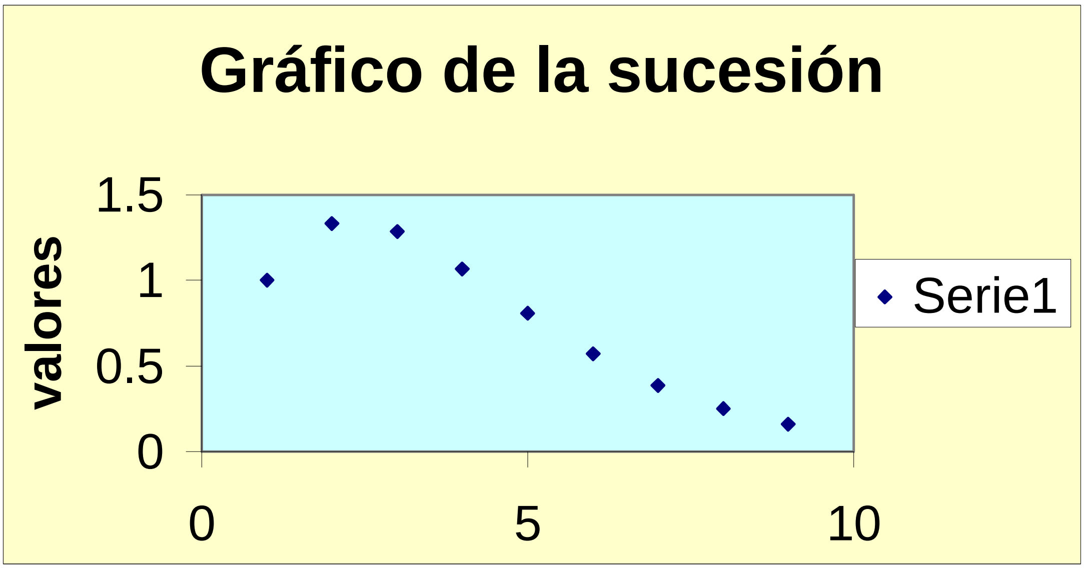
---

[1] Este artículo fue financiado por el Proyecto No 820-A2-115, inscrito en la Vicerrectoría de Investigación de la U.C.R.

[2] Profesor Escuela de Matemática U.C.R , CIMM– U.N.A

Seguidamente observamos de la Tabla # 1 que debemos poner en la celda debajo del "uno" la fórmula de la sucesión para hacer los cálculos respectivos, en este caso introducimos la ecuación =n^2/(2^n-1), posteriormente la copiamos al resto de celdas, Observe que es importante colocar la variable "n" en la casilla superior izquierdo a la par de los valores que tomará posteriormente, esto con el fin utilizar en el cálculo dichos valores, estos cálculos se dan en la fila donde se encuentra a_n. Para que lo anterior funcione, excel debe reconocer "variables", para ello debe corroborar en el menú Herramientas/ Opciones/ Calcular, aquí debe aparecer marcada la casilla "*Aceptar rótulos en las fórmulas*", con esto, excel reconoce a la variable "n".

Veamos ahora el gráfico generado por los datos de la tabla #1:



Observemos que cuando n aumenta los valores de la sucesión tienden a cero, esto es así pues 2^n crece más rápidamente que n^2. En el caso de querer observar más términos de la sucesión sencillamente ponemos más valores para "n".

Para generar el gráfico anterior usamos el ícono del asistente para gráficos / dispersión / primer cuadro / siguiente / y marcamos el rango de los datos por ejemplo, para nuestro caso $E$14:$N$15, luego escogemos siguiente / siguiente / terminar.

Ejemplo 2
Queremos ahora estudiar el límite de la sucesión

$$\boxed{a_n = n\, sen\frac{1}{n}}$$

cuando n tiende a +∞, para ello veamos algunos valores de n

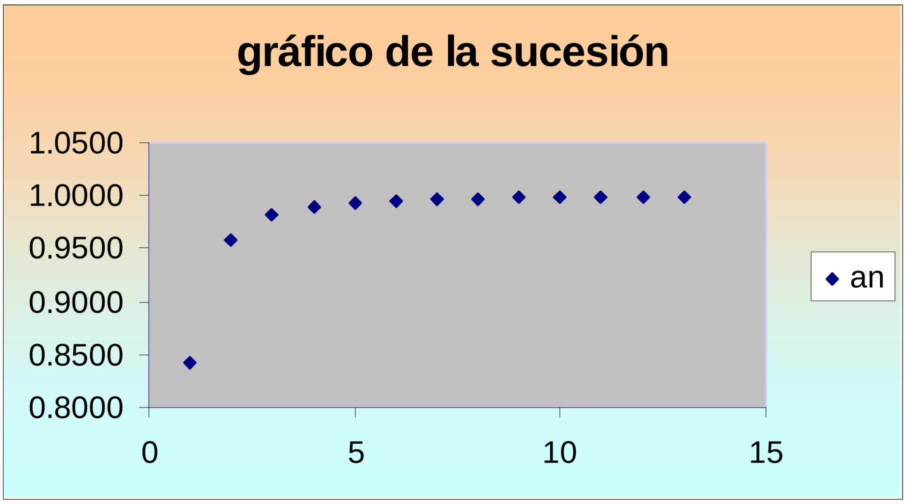
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
an	0.8	0.96	0.982	0.99	0.993	0.995	0.996	0.997	0.9979	0.9983	0.9986	0.9988	0.999

Tabla #2

Podemos observar en la tabla anterior como esta sucesión tiende a uno conforme "n" va aumentando, esto es así pues si ponemos la sucesión en la forma equivalente

$$a_n = \frac{sen\ \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

Entonces tomando m=1/n, la sucesión queda en la forma conocida (sen m)/m, cuyo límite ya sabemos que es igual a 1 cuando m tiende a cero.



En la tabla #2 debajo de los enteros insertamos la fórmula =n*SENO(1/n), la cual nos proporciona cada valor de la sucesión de manera automática. Recordamos que Excel posee una biblioteca de funciones bastante amplia las cuales se encuentran en f_* (o en el menú Insertar). Hay funciones estadísticas, matemáticas, lógicas, de texto, de ingeniería, financieras, etc. Además excel indica el desempeño de cada una de ellas. Por supuesto que es importante conocer la declaración de estas funciones para usarlas correctamente, así f_* nos facilita toda la información necesaria al respecto.

Aplicación a la teoría de series

Consideremos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

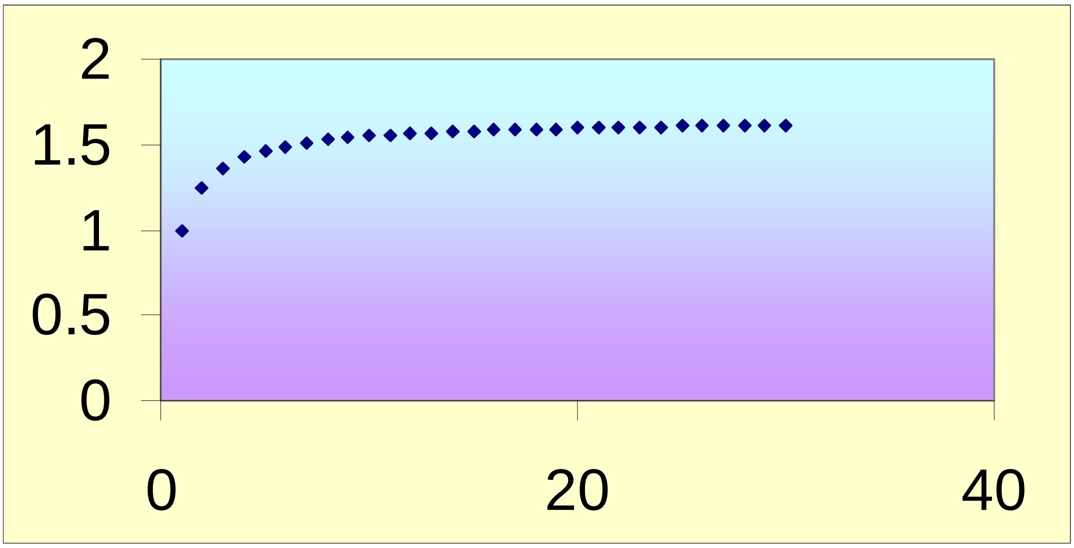
Para esta serie ya sabemos que es convergente, por ser una p-serie, sin embargo si quisiéramos estimar su suma, lo podemos hacer fácilmente, veamos:

El contenido de a_n es =1/n^2 y el de la suma parcial S_1 es =1/a_n^2. Posteriormente el de S_2 es =SUMA($D$15:D16), y así sucesivamente hasta llegar a la suma S_{30} cuya fórmula es =SUMA($D$15:D44). Por tanto el resultado final de datos es dado por la tabla #3.

n	a_n	S_n
1	1	1
2	0.25000	1.25000
3	0.111111	1.36111
4	0.06250	1.42361
5	0.04000	1.46361
6	0.027778	1.49139
7	0.020408	1.51180
8	0.015625	1.52742
9	0.012346	1.53977
10	0.01000	1.54977
11	0.008264	1.55803
12	0.006944	1.56498
13	0.005917	1.57089
14	0.00510	1.57600
15	0.004444	1.58044
16	0.003906	1.58435
17	0.00346	1.58781
18	0.003086	1.59089
19	0.00277	1.59366
20	0.0025	1.59616
21	0.002268	1.59843
22	0.002066	1.60050
23	0.00189	1.60239
24	0.001736	1.60412
25	0.0016	1.60572
26	0.001479	1.60720
27	0.001372	1.60857
28	0.001276	1.60985
29	0.001189	1.61104
30	0.001111	1.61215

Tabla #3

Si graficamos las sumas parciales notamos que la serie converge al valor estimado de 1.62. Para mejorar este estimado es necesario sumar más términos de la serie, ¡inténtelo!
De hecho esta serie converge al valor exacto de $\pi^2/6$, que es aproximadamente 1.644934, su gráfico se vería así:



Para generar los a_n ponemos la fórmula =1/n^2 en la celda D15, luego la colocamos en las otras celdas realizando una copia hasta D44. Finalmente para obtener las sumas parciales S_n colocamos el primer término 1 en E15, luego en E16 colocamos la suma de los dos primeros términos, es decir =SUMA($D$15:D16), posteriormente la fórmula se extiende hasta E44 realizando una copia dicha celda. La fórmula inicial deja fijo el contenido de la celda D15, para ello se coloca el signo $ entre la letra D, luego al hacer el copy van quedando fijas las celdas anteriores a la suma calculada.

Gráficos de polinomios de Taylor

Algunas veces queremos tener una idea gráfica de la aproximación de los distintos polinomios de Taylor de una función dada, por ejemplo si consideramos la función y=ln(x), sus primeros polinomios de Taylor alrededor de uno son :

$\boxed{p_1(x) = x - 1}$ $\boxed{p_2(x) = 1 + x + 0.5 * x\verb|^|2}$ $\boxed{p_3(x) = 1 + x + 0.5 * x\verb|^|2 + 0.16666 * x\verb|^|3}$

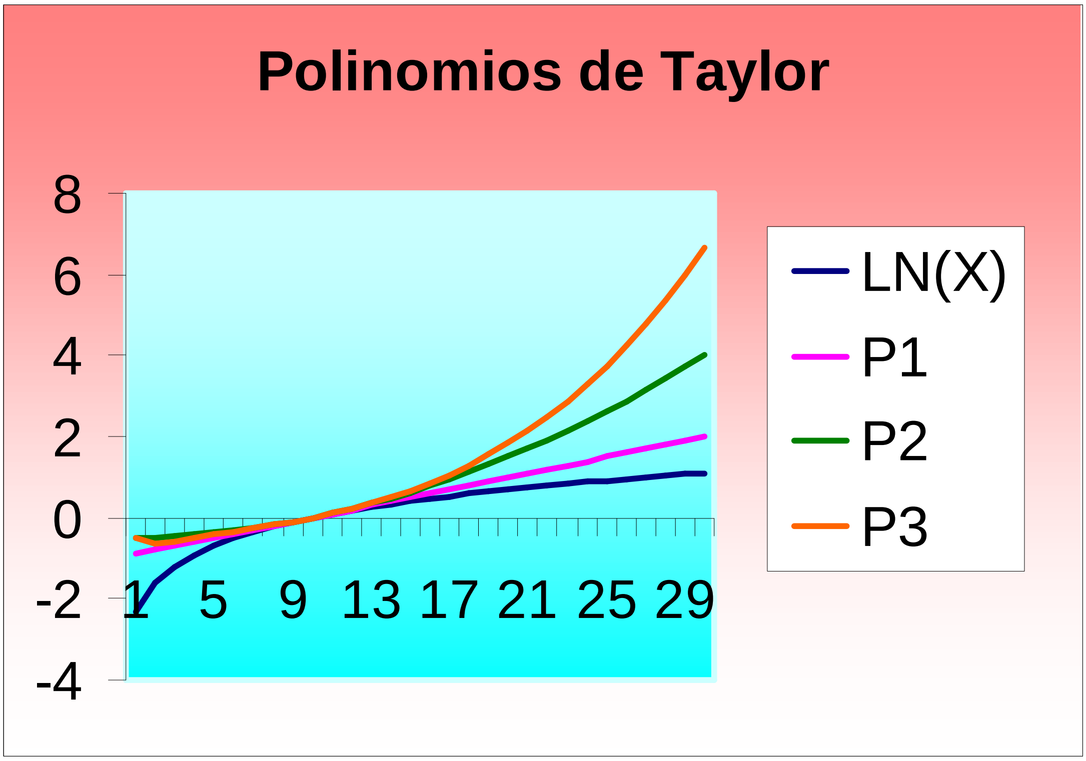
Observe en la siguiente tabla como se pueden generar varias gráficas simultáneamente en excel de manera muy simple: en la columna de LN(X) se encuentra la fórmula =LN(x), en la columna de Po está la fórmula =x-1, en la columna de P_1 tenemos =x-1+ 0.5*(x-1)^2 y finalmente en la columna de P_2 se tiene la fórmula =x-1+ 0.5*(x-1)^2 + 0.333*(x-1)^3. Todas estas columnas se generan a partir de la columna base donde se encuenta la variable "x". También las nuevas variables generadas se podrían usar para generar otras funciones.

Observemos la siguiente tabla de datos

x	LN(X)	P_o	P_1	P_2
0.1	-2.3	-0.9	-0.5	-0.7
0.2	-1.6	-0.8	-0.5	-0.7
0.3	-1.2	-0.7	-0.5	-0.6
0.4	-0.9	-0.6	-0.4	-0.5
0.5	-0.7	-0.5	-0.4	-0.4
0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.3
0.7	-0.4	-0.3	-0.3	-0.3
0.8	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2
0.9	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1
1	0	0	0	0
1.1	0.1	0.1	0.1	0.11
1.2	0.18	0.2	0.2	0.22
1.3	0.26	0.3	0.3	0.35
1.4	0.34	0.4	0.5	0.5
1.5	0.41	0.5	0.6	0.67
1.6	0.47	0.6	0.8	0.85
1.7	0.53	0.7	0.9	1.06
1.8	0.59	0.8	1.1	1.29
1.9	0.64	0.9	1.3	1.55
2	0.69	1	1.5	1.83
2.1	0.74	1.1	1.7	2.15
2.2	0.79	1.2	1.9	2.5
2.3	0.83	1.3	2.1	2.88
2.4	0.88	1.4	2.4	3.29
2.5	0.92	1.5	2.6	3.75
2.6	0.96	1.6	2.9	4.24
2.7	0.99	1.7	3.1	4.78
2.8	1.03	1.8	3.4	5.36
2.9	1.06	1.9	3.7	5.99
3	1.1	2	4	6.66

Si necesitamos tener más datos para mejorar la calidad de las representaciones, lo único que tendríamos que hacer será controlar el dominio de las funciones y para ello basta con estudiar la variable “x”, algunas veces se necesita una malla más fina, por ejemplo para el caso en que se presente una asíntota vertical, otras veces se necesitan datos más grandes, por ejemplo cuando estamos en la presencia de una asíntota horizontal.

Veamos el gráfico de los datos anteriores



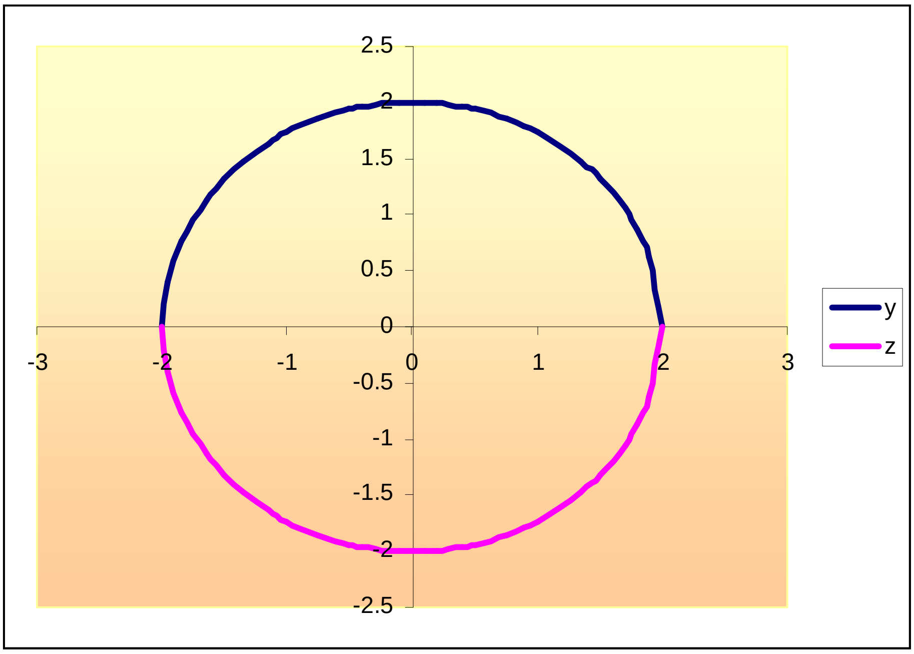
Conclusión

Hemos visto como podemos usar excel para hacer buenos estimados de la suma de series convergentes de manera bastante simple, usando variables. También para el caso en que queramos tener una idea del gráfico de una función podemos usar excel para graficar. Casos como por ejemplo de un círculo que no es función se puede graficar en dos partes por separado, la parte de arriba y la parte de debajo de un círculo, por ejemplo consideremos la ecuación $x^2 + y^2=4$

x	y	z
-2	0	0
-1.96	0.397995	-0.397995
-1.85	0.759934	-0.759934
-1.65	1.130265	-1.130265
-1.5	1.322876	-1.322876
-1.35	1.475635	-1.475635
-1.15	1.636307	-1.636307
-1	1.732051	-1.732051
-0.75	1.85405	-1.85405

-0.5	1.936492	-1.936492
-0.4	1.959592	-1.959592
-0.2	1.989975	-1.989975
-0.1	1.997498	-1.997498
0	2	-2
0.1	1.997498	-1.997498
0.2	1.989975	-1.989975
0.4	1.959592	-1.959592
0.5	1.936492	-1.936492
0.75	1.85405	-1.85405
0.9	1.786057	-1.786057
1	1.732051	-1.732051
1.35	1.475635	-1.475635
1.5	1.322876	-1.322876
1.7	1.053565	-1.053565
1.8	0.87178	-0.87178
1.9	0.6245	-0.6245
2	0	0

En las celdas de la variable “y” introducimos =RAIZ(4-x^2), para la variable “z” ponemos = -y, obteniendo el siguiente gráfico así: ícono de gráfico/ dispersión/ dispersión con líneas suavizadas y sin marcadores de datos/ etc.



De hecho para obtener esta resolución hicimos una malla fina para la variable “x”, para mejorar más la calidad del gráfico se puede hacer todavía más fina la malla.

Bibliografía

1. Larson, Hosteler & Edwards. ***Cálculo***. Volumen #1. McGraw-Hill. México. 1995.
2. CCPM. ***Hoja electrónica avanzada***. McGraw-Hill. México. 2000.

Utilidad de las presentaciones en PowerPoint en la enseñanza de la Matemática

Autoras: Lorena Acuña, Maricella Becerril, Katherine Harley, Elsie Villalobos[1]

Abstract: Un ambiente de aprendizaje apoyado con computadoras bajo un enfoque algorítmico, por medio de presentaciones de PowerPoint, puede resultar de gran ayuda para la enseñanza de la Matemática. Dentro del proceso de aprendizaje, en la fase de motivación puede resultar altamente estimulante a nivel sensorial; en la fase de comprensión permite la reiteración de los conceptos y procesos todas las veces que resulten necesarias; en la fase de adquisición proporciona significado al aprendizaje; en la fase de retención facilita la estructuración ordenada; en la fase de recuperación aumenta el discernimiento repentino; en la fase de generalización facilita establecer conexiones; en la fase de desempeño mejora significativamente las respuestas; y en la fase de realimentación permite confrontar la expectativa con lo logrado.

Introducción:

Ante el creciente impacto de las computadoras en todos los ámbitos, así como su influencia determinante dentro del contexto educativo, la pregunta que nos planteamos es: ¿Cómo podemos orientar la disponibilidad efectiva de computadoras de manera que proporcionen un apoyo didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje?

Buscar respuesta a esta interrogante requiere de un permanente y concienzudo trabajo de investigación y actualización, porque, además, se trata de un campo del conocimiento en el que la vertiginosidad de los cambios resulta alucinante.

En primer lugar, se debe lograr las desmitificación de las computadoras como la panacea de los problemas educativos, entendiendo que, si bien el uso de esta tecnología puede producir mejoras significativas en la educación, no proporciona la respuesta a todos sus problemas. Bajo una perspectiva realista de sus alcances y limitaciones, será más fructífera la búsqueda de posibilidades que nos permitan mejorar el proceso en el aula.

En segundo lugar, es necesario establecer una dirección a seguir, dado que, en lo que respecta a usos educativos de las computadoras, aún no se logra un consenso sobre la forma en que se deben centrar los esfuerzos para su utilización.

De esta forma, lo que procede, es realizar diferentes proyectos, con distintos enfoques, para poder evaluar y valorar sus resultados, lo que nos permitirá encauzar adecuadamente nuestros recursos tecnológicos de acuerdo a los datos que podamos obtener de todos estos trabajos.

[1] Colegio Saint Paul, Costa Rica, kharley@saintpaul.ed.cr, prachasa@racsa.co.cr

Una de las posibilidades que tenemos para desarrollar, es utilizar una herramienta computacional como lo es PowerPoint, para apoyar por medio de presentaciones de diferentes temas la enseñanza de la Matemática.

El presente trabajo pretende demostrar cómo, al lograr el ambiente de aprendizaje apropiado, un recurso como éste puede potenciar el desempeño de los estudiantes en cada una de las fases del proceso de aprendizaje según el conductismo cognitivo de Robert Gagné.

Marco Conceptual:

Al relacionar los términos computación y educación, podemos encontrar diferentes enfoques sobre la forma como las computadoras pueden apoyar el sector educativo, sin embargo, para los efectos que nos interesan, nos bastará con aquellos que se refieran propiamente al proceso de enseñanza-aprendizaje.

En este sentido, según Galvis, es posible distinguir tres tendencias. La primera de ellas considera que lo importante es la educación acerca de computadores, busca una “alfabetización computacional”, considerando a la programación como un recurso capaz de desarrollar las destrezas intelectuales de los estudiantes. En la segunda de estas tendencias, se considera que más bien lo importante son las herramientas computacionales que están al servicio del usuario, que nos ayudan a efectuar en forma más rápida y eficiente muchas tareas rutinarias y que además pueden ser utilizadas con propósitos educacionales. En tercer lugar, puede situarse la tendencia según la cual, lo importante es la tecnología educativa ligada al uso de los computadores, es decir, cómo se llevará a la práctica la aplicación sistemática de los recursos tecnológicos existentes para buscar solución a los problemas educativos.

Dentro de esta última tendencia, el mismo Galvis señala la coexistencia de dos polos sistemáticos para la creación y uso de ambientes de aprendizaje. Por un lado se encuentra el *enfoque algorítmico* que se orienta a un ambiente de secuencias predeterminadas de actividades para lograr metas mensurables; por el otro, se encuentran los *dispositivos heurísticos* (simuladores, juegos, etc.), que no dicen al usuario qué hacer, sino que le proporcionan el soporte al aprendiz para que descubra lo que busca.

Al enfrentar este amplio y diverso panorama que nos proporciona diferentes enfoques sobre el uso de las computadoras en la educación, no podemos perder de vista que, aquel que decidamos escoger, estará intrínsicamente asociado con la teoría de aprendizaje que adoptemos y que finalmente dará el diseño del ambiente que crearemos en el aula.

Por esta razón, es importante hacer breve referencia a las diferentes teorías de aprendizaje, las cuales pueden incidir en nuestras decisiones sobre la forma como utilizaremos los recursos computacionales disponibles.

Según el Conductismo de Skinner, nuestro interés fundamental sería disponer el ambiente y las actividades para lograr, por medio de un reforzamiento (dando reconocimiento o recompensa) selectivo y deliberado, un cambio observable y permanente de conducta.

Al surgir el cognoscitivismo de la Gestalt, se reconoce que los individuos no sólo responden a los estímulos, sino que actúan sobre la base de creencias, valores, actitudes y expectativas, ajustados a su campo vital.

Cuando el cognoscitivismo se asocia a las teorías del procesamiento de la información, se interesa más por la forma en la que se adquieren los conocimientos y la forma en que se estructuran e interrelacionan en la memoria, a través de las etapas de acrecentamiento, estructuración y afinamiento.

Por supuesto que también es indispensable señalar lo que en este sentido aporta la sicología educativa de Jean Piaget, al hacer estudios del desarrollo cognitivo asociados a la maduración de estructuras del organismo.

De esta forma llegamos al conductismo cognitivo de Robert Gagné, según el cual el aprendizaje es un proceso de transformación en las capacidades del individuo, el cual se logra en interacción con el medio ambiente cuando hay un cambio permanente de conducta. Distingue en este proceso ocho fases diferentes que son diversas etapas por las que pasa el individuo a medida que va asimilando la información. Se inicia con la fase de motivación, en la cual se crea una expectativa que dirige al aprendiz hacia la necesidad de aprender. Sigue la fase de comprensión, cuando se debe favorecer que atienda lo que es importante que capte. Posteriormente llega la fase de adquisición, cuando lleva el conocimiento a su memoria a corto plazo. Inmediatamente debe propiciarse la fase de retención, que acrecienta la estructura de información en la memoria a largo plazo. En orden secuencial, llegamos a la fase de recordación, donde se debe propiciar que las estructuras conceptuales sean accesibles para poder recuperar lo aprendido en cualquier momento. Se llega así a la fase de generalización, que busca transferir lo aprendido a diferentes contextos. Viene entonces la fase de desempeño, cuando las respuestas del aprendiz a nuevas situaciones demuestren lo que aprendió. Finalmente llegamos a la fase de realimentación, que al confrontar las expectativas previas al proceso con los resultados obtenidos, han de permitirnos corregir errores y realizar ajustes.

Proyecto:

Considerando el proceso de enseñanza aprendizaje desde la perspectiva del conductismo cognitivo, y, adoptando una concepción de la computación como una herramienta con propósitos educacionales bajo un enfoque algorítmico, nuestro proyecto consistió en desarrollar cuatro ejes temáticos en la enseñanza de la Matemática haciendo uso de presentaciones de PowerPoint, los cuales son:

1. Ecuación de la recta.
2. Operaciones con polinomios.
3. Conceptos de trigonometría 1.
4. Conceptos de trigonometría 2.

Los pasos que se siguieron se refieren a continuación:

a) Para cada uno de los temas señalados se elaboró una presentación que detalla paso a paso los conceptos y algoritmos que se desea que el estudiante aprenda, acordes a los objetivos específicos del plan de clase.
b) Al desarrollar la lección, se utilizó como base esta presentación haciendo uso del equipo de video beam, apoyando la explicación del profesor, al tiempo que se interactuaba con los estudiantes por medio de preguntas y respuestas.
c) Cada estudiante recibió una copia impresa de la presentación, al mismo tiempo que se le brindó la posibilidad de acceder a ella a través de la revista virtual del colegio, para que le sirviera de material de estudio.

d) Se dio entonces un período de práctica, con un folleto impreso elaborado para este fin, en el cual los alumnos pudieron aplicar los conceptos estudiados.
e) Inicia el primer período de realimentación, en el cual se hace una puesta en común sobre los ejercicios resueltos y los resultados obtenidos, se discuten las diferentes respuestas y se aclaran las dudas, para lo cual se recurre nuevamente a la presentación diseñada para justificar por qué algo está incorrecto.
f) Viene entonces el momento de la evaluación sumativa, mediante la realización de un examen sobre el tema, que permita determinar estadísticamente, el logro de los objetivos planteados.
g) Se cierra con un nuevo ciclo de realimentación, en el cual se recurre nuevamente a la presentación, para analizar los resultados de la prueba y cómo puede mejorarse la misma para que enfatice o resulte más clara en los aspectos que los alumnos fallaron.

Una vez desarrollados estos temas, se realizaron dos procedimientos adicionales. En primer lugar un estudio comparativo entre los resultados obtenidos con este apoyo tecnológico y cuando no se dispone del mismo. En segundo lugar, un sondeo de opinión entre los estudiantes, sobre la aplicación de la herramienta utilizada.

Conclusiones:

1. Las posibilidades educativas del uso de las computadoras son muy amplias, por lo que es importante delinear con claridad cuál es el propósito con el que se van a utilizar.
2. El concepto educativo que subyace en el ambiente de clase, determina el aporte real que el uso de cualquier herramienta tecnológica pueda proporcionar.
3. Las herramientas computacionales con propósitos educativos pueden ser de gran utilidad, pero sólo cuando su uso se ajusta a objetivos claramente delineados y una planificación que justifique su empleo.

4. El uso de presentaciones de PowerPoint en la enseñanza de la matemática, puede mejorar significativamente los logros obtenidos en cada etapa del proceso de aprendizaje, a saber:
   4.1 Motivación: proporciona una gran motivación externa, altamente estimulante a nivel sensorial.
   4.2 Comprensión: por su estructura, permite la constante reiteración de conceptos y procesos, así como resaltar lo esencial por medio de efectos de color, sonido, etc.
   4.3 Adquisición: le da significado al aprendizaje, lo que permite su fácil acceso a la memoria a corto plazo.
   4.4 Retención: por la secuencia que le imprime al desarrollo de los temas, facilita su estructuración ordenada en la memoria a largo plazo.
   4.5 Recuperación: la estimulación sensorial permite acceder la información al aumentar el discernimiento repentino.
   4.6 Generalización: al ampliarse las posibilidades expositivas para dar ejemplos y aplicaciones, facilita establecer conexiones.
   4.7 Desempeño: en la evaluación formativa y en la sumativa se mejoraron significativamente las respuestas.
   4.8 Realimentación: permite confrontar la expectativa con lo logrado y posee la versatilidad necesaria para realizar los ajustes pertinentes.

Bibliografía:

1. Galvis P., Álvaro. **Fundamentos de Tecnología Educativa**.
San José, C.R.: EUNED, 2002.
2. Harley, Katherine. **Prácticas de Matemática 9º año**.
Alajuela, C.R.: Producciones Académicas Harley, 2003.
3. Harley, Katherine. **Matemática: Undécimo año**.
Alajuela, C.R.: Producciones Académicas Harley, 2003.
4. Larson, Hostetler y Edwards. **Cálculo**.
tr. por Lorenzo Avellanas. Madrid, España: McGRAW-HILL, 1999.

5. Villalobos, Elsie. **Recordemos: Repaso para Bachillerato**.
Alajuela, C.R.: Saint Paul, 2002.

6. Washington, Allyn. **Fundamentos de Matemáticas**.
tr. Por Hugo Pereyra. México, D.F.: Fondo Educativo Interamericano, 1983.

CONFERENCIAS

"La importancia de los micromundos computacionales como entornos didácticos estructurados para fomentar e investigar el aprendizaje matemático"

Dra. Ana Isabel Sacristán Rock[1]

Resumen:

En este artículo se revisa la idea de micromundo computacional. Desde que nació esta noción hace treinta años, se ha vuelto un término común para denominar softwares o ambientes computacionales educativos con propósitos específicos. Sin embargo, mucho de su significado original se ha olvidado. Por un lado, el énfasis original en actividades de programación por parte del alumno se ha perdido. Por otro lado, quisiéramos rescatar y plantear la importancia de una concepción de micromundo que considera toda la situación didáctica en la que la interacción con la tecnología sucede, desde el aspecto técnico hasta el papel del profesor. Finalmente, damos un breve ejemplo de un micromundo matemático diseñado para la exploración de procesos infinitos que utilizó los principios de dicha concepción.

El uso de la tecnología en la educación es algo ya muy común e incluso una prioridad de las instituciones educativas. Abundan paquetes educativos y propuestas didácticas. Pero la implementación de tecnología en el aula es algo que merece una consideración profunda. Por más de dos décadas, los esfuerzos de muchos investigadores se han centrado en investigar cómo utilizar las nuevas tecnologías para facilitar el aprendizaje y hacerlo más significativo. En particular se deben tomar en cuenta dos cosas: buenas herramientas computacionales y una manera adecuada de implementarlas (el enfoque pedagógico). Siguiendo la filosofía constructivista, una de las ideas que se han desarrollado es la de los llamados "micromundos computacionales". En este trabajo repasamos la idea de micromundo computacional desde dos perspectivas: la de un ambiente que utiliza la computadora para que el estudiante explore y construya sus propias ideas; y la utilización de dichos ambientes como "ventanas" para investigar los procesos de aprendizaje de los alumnos. Como conclusión ilustraremos las ideas planteadas con un ejemplo de un micromundo diseñado para la exploración del concepto del infinito matemático.

La evolución del concepto de "micromundos" (entornos computacionales de aprendizaje)

Comenzamos discutiendo el surgimiento, definición y meta de los llamados micromundos computacionales: ambientes de exploración computacionales donde el sujeto tiene la oportunidad de estructurar, construir e investigar objetos e ideas, ya sea (como fue en los orígenes de la idea) a través de actividades estructuradas de programación, o a través de la manipulación de herramientas provistas por el medio.

---

[1] Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav. asacrist@mail.cinvestav.mx

Los orígenes del concepto de micromundo y el paradigma del "construccionismo"

La primera utilización del término *micromundo* fue dentro del área de la Inteligencia Artificial, pero Seymour Papert utilizó este término (y por ende modificó su significado) para describir su idea de ambientes computacionales que fueran lugares para familiarizarse con un conjunto de ideas, de situaciones problemáticas, de actividades; lugares en los que el estudiante y el maestro puedan probar ideas dentro de un tema de interés (Weir, 1987). Los micromundos pertenecen a la tradición de aprendizaje vía descubrimiento.

Sus orígenes se remontan a las teorías constructivistas. Desde una perspectiva constructivista, el proceso de aprendizaje implica la construcción de estructuras y representaciones mentales. En dicho proceso de construcción del conocimiento, juegan un papel importante las representaciones externas de los objetos bajo estudio. (Entendemos por representaciones externas —las cuáles, cabe aclarar, pueden ser internalizadas— a aquellas que utilizamos para comunicar las matemáticas, tales como fórmulas, gráficas, etc.; por otro lado, las representaciones mentales son las evocaciones mentales —diferentes para cada individuo— que se tienen al pensar en algún objeto o proceso matemático – Dreyfus, 1995).

Pero, el proceso de conocimiento es más que la simple construcción de estructuras internas; se debe enfatizar el papel del contexto social así como de las acciones y experiencias inherentes al proceso de construcción del conocimiento y de sus representaciones. Referente a este aspecto socio-contextual, Piaget y García (1982) señalan:

> "…en la experiencia del niño, las situaciones con las cuales se enfrenta son generadas por su entorno social, y las cosas aparecen en contextos que les otorgan significaciones especiales. No se asimilan objetos 'puros'. Se asimilan situaciones en las cuales los objetos desempeñan ciertos papeles y no otros. Cuando el sistema de comunicación del niño con su entorno social se hace más complejo y más rico, y particularmente cuando el lenguaje se convierte en medio dominante, lo que podríamos llamar la experiencia directa de los objetos comienza a quedar subordinada, en ciertas situaciones, al sistema de significaciones que le otorga el medio social."
>
> Piaget y García (1982, p.228)

La teoría Vigotskiana extiende esta perspectiva enfatizando cómo la construcción de significado requiere de *acción apoyada por herramientas de mediación*, tales como las representaciones externas y el lenguaje: las representaciones mentales son reconstrucciones de acciones externas. Por ende, las representaciones externas son herramientas en la construcción de significado.

En concordancia con este tipo de ideas, Seymour Papert planteó el paradigma del "construccionismo" (ver Harel & Papert; 1991). La idea central detrás de este paradigma, en palabras de Papert (1993, p.142), es que las construcciones que se dan "en la cabeza" suceden de manera particularmente oportuna cuando son apoyadas por construcciones externas, "en el mundo", llevando a productos que se pueden ver, discutir, examinar "allí afuera", tales como la construcción de un castillo de arena, un pastel, una empresa, un programa de computación, un poema o la teoría del universo. La idea de micromundos computacionales se fundamenta en este paradigma.

En su libro *Desafío a la mente*, Papert (1981) enfatiza la importancia de la naturaleza exploratoria de los micromundos, así como la importancia de que los niños sean los que estén a cargo de sus propias actividades dentro del micromundo (con lo que además aprenden a *ser* matemáticos). Explica que los niños aprenden a explorar las propiedades de un micromundo y, al hacer esto, aprenden a transferir hábitos de exploración de sus vidas personales al dominio formal de la construcción de teorías científicas. Más aún, y como lo señala Weir (1987, p.15), un micromundo computacional debe ser un lugar donde se evocan las intuiciones del sujeto y sus explicaciones sobre un fenómeno, durante el proceso de aprendizaje de algún tema; en la concepción original de los micromundos esto se hacía *a través de la actividad de programación* (ver más abajo).

Micromundos matemáticos

En la evolución del concepto de micromundo, Thompson (1987) describió la idea de micromundo matemático como un sistema compuesto de objetos, relaciones entre objetos, y operaciones que transforman los objetos y sus relaciones. Lo que es esencial es el hecho de que existan operaciones mediante las cuáles se puedan construir nuevos objetos, ya que esto es lo que hace a un micromundo "matemático": la construcción de relaciones y la utilización de esas relaciones como nuevos objetos a los que se pueden aplicar operaciones. La meta de un micromundo matemático es pues la construcción de significado y de relaciones que sirvan como modelo para un sistema formal; es decir, el micromundo da a los estudiantes oportunidades para crear modelos mentales que reflejen la estructura y composición de los sistemas formales (op.cit., p.85)

Es así como se ha llegado a la definición de micromundos como mundos computacionales donde las ideas matemáticas se expresan y desarrollan. Hoyles (1993) explica que la meta de los micromundos ha cambiado desde sus orígenes, transformando su propósito al de diseñar ambientes de aprendizaje para la apropiación del conocimiento, donde juegan un papel central los "objetos transicionales" (aquellos que son intermediarios entre lo concreto y directamente manipulable, y lo formal y abstracto; ver Papert, 1987).

Hoy en día se utiliza mucho el término “micromundo” para denominar módulos interactivos ya sea independientes (*stand-alone software)* o creados dentro de otro paquete que funciona como plataforma (e.g. en Cabri, Logo Micromundos, Imagine, Excel, etc.) donde se explora una idea o concepto manipulando y “jugando” con los elementos provistos por el diseñador para ese fin. Dependiendo de cómo estén diseñados, dichos “micromundos” pueden ser, en menor o mayor medida, transparentes: es decir, abiertos de tal manera que el usuario pueda meterse a ver cómo están programados y modificarlos. Sin embargo, en tiempos recientes, la tendencia ha sido que el usuario únicamente explore utilizando las herramientas dadas por el “micromundo”, y no que se meta a modificar dichos “micromundos”. Las actividades de programación por parte del usuario han tendido a pasar a un segundo término, si no es que a ser totalmente inexistentes en muchos denominados “micromundos”.

Micromundos como situaciones didácticas

En contraste con estas concepciones recientes, e independientemente del papel que puedan jugar o no actividades de programación, aquí quisiéramos repasar y rescatar la idea de micromundo planteada por Hoyles & Noss (1987) a mediados de la década de los ochenta. Hoyles y Noss (ibid) extendieron la idea de micromundo planteada por Papert, al considerar también la *situación didáctica* en la que la interacción se lleva a cabo. Dichos investigadores consideran que la definición de micromundo debe tomar en cuenta los siguientes elementos: el *estudiante;* el *maestro;* el *entorno* (social y físico) en el que las actividades se llevan a cabo; y la *actividad* como algo que depende de las experiencias pasadas e intuiciones del estudiante, y de las metas y experiencias del profesor. Hoyles y Noss (ibid) definen entonces a un micromundo como formado por los siguientes cuatro componentes:

- el componente del estudiante: que involucra los *entendimientos y concepciones parciales existentes que el alumno trae consigo a la situación didáctica*;
- el componente técnico: formado por el *software o lenguaje de programación, y un conjunto de herramientas que proveen un sistema de representaciones para la comprensión de una estructura matemática o campo conceptual;*
- el componente pedagógico: *todas las intervenciones didácticas que se llevan a cabo durante las actividades de programación, así como el material didáctico que se utilice*; y
- el componente contextual*: el entorno social de las actividades.*

La importancia del entorno didáctico de los micromundos y del trabajo con tecnología

Tomando en cuenta estos componentes, en la implementación de un micromundo computacional —y nosotros consideramos que también <u>en la implementación de cualquier tecnología en el aula</u>— se debe poner énfasis, además de en el componente técnico, en cambios en la estructura del aula para cada una de estas áreas: desde un método de enseñanza que exige del profesor un rol diferente al tradicional, al uso de herramientas pedagógicas como hojas de trabajo, al contexto social del aula, hasta la manera en la que se dispone físicamente el salón de clases. Así, en muchos micromundos que siguen esta concepción, se tiene lo siguiente:

- El papel del profesor es el de un mediador que organiza y guía a los estudiantes, fomentando un espíritu inquisitivo entre los alumnos, e integrando el conocimiento adquirido en el contexto computacional con el conocimiento matemático tradicional

- El material didáctico que acompaña al trabajo con la máquina, es una herramienta pedagógica fundamental. El uso de hojas de trabajo ayuda a presentar y estructurar actividades en torno a un tema (matemático o no) particular. Dichas hojas pueden contener preguntas que sugieran exploraciones, que lleven a los estudiantes a reflexionar sobre sus métodos y resultados y que integren el conocimiento generado por las actividades computacionales,. También pueden sugerir actividades complementarias sin el uso de la tecnología. Asimismo, dichas hojas de trabajo pueden dar información al profesor sobre los entendimientos de los alumnos que le pueden ayudar a decidir sobre las acciones e intervenciones necesarias.
- La organización del trabajo con los alumnos y el entorno social: es importante estar conciente que no siempre es necesario o incluso recomendable que los estudiantes trabajen individualmente en las computadoras. De hecho, muchas veces se recomienda que los alumnos trabajen en equipos (de 2 o 3 estudiantes). Este trabajo colaborativo puede fomentar la discusión e intercambio de ideas facilitando el aprendizaje, aunque es importante cuidar que todos los alumnos participen en la actividad.
- La disposición física del aula: se recomienda muchas veces disponer las máquinas de tal manera que se facilite la colaboración entre los alumnos tanto en el trabajo con las computadoras, como en otras actividades complementarias (e.g. de “papel y lápiz”); asimismo se debe facilitar la circulación del profesor para que pueda observar el trabajo de todos los estudiantes en cada una de las computadoras.

En cuanto al componente técnico, a continuación quisiéramos repasar el valor, para la construcción del conocimiento matemático, de herramientas computacionales que permitan actividades de programación o de construcción por parte del alumno, explicando qué es lo que hace que a un micromundo se le pueda llamar “campo de abstracción”.

Micromundos como campos de abstracción: el papel mediador de las herramientas computacionales y el valor matemático de actividades de programación

Las investigaciones sobre micromundos se iniciaron con la programación en el lenguaje Logo (e.g. Feurzeig, Papert et al., 1969) aunque a través de los años se han utilizado una variedad de lenguajes (e.g. los estudios "algorítmicos"; ver Johnson, 1991) y ambientes computacionales (e.g. hojas de cálculo, Cabri-Geómetra). En la concepción original, los micromundos computacionales eran siempre basados en actividades de programación, por parte del alumno, dandole al sujeto la oportunidad de estructurar, construir e investigar objetos e ideas. Hoyles & Noss (1987) señalan que el objetivo de la programación por parte del alumno es el de proveer al estudiante con una herramienta para que pueda modelar las temas matemáticos a tratar, y añaden que la programación (como, por ejemplo, aquella que utiliza el lenguaje Logo) puede servir como una manera para involucrarse en la actividad matemática, como un ambiente para *hacer* matemáticas.

Existe mucha investigación que muestra cómo, al escribir un programa de computación, se puede dar expresión a ideas "semi-formadas", ya que al programar es necesario hacer explícitas y articular relaciones entre los componentes involucrados (ver Noss & Hoyles, 1996), lo cúal convierte a estas actividades en actividades propiamente matemáticas.

Más recientemente, estos mismos autores, enfatizando el papel mediador de las herramientas computacionales, propusieron la idea de "*abstracción contextual"* como una manera para describir cómo los estudiantes pueden construir ideas matemáticas apoyándose en la red conceptual de un contexto particular, dando a su vez forma a las ideas expresadas (Noss & Hoyles, 1996). Sugieren que los alumnos que se involucran en actividades dentro de un micromundo pueden abstraer *dentro* de la situación y contexto. De esta manera, los ambientes computacionales proporcionan un medio donde los objetos y relaciones puedan hacerse *significativos* mediante acciones dentro del micromundo, y donde los estudiantes puedan *generar y articular* relaciones matemáticas que aparecen en la situación computacional en la que están trabajando. Es importante señalar que, aunque se puede considerar que estos procesos son un paso hacia la formación de estructuras matemáticas formales, una abstracción contextual está condicionada por la tecnología y el lenguaje que se utilizan. Lo relevante, desde la perspectiva educativa, es que el alumno que construye una abstracción contextual, puede no tener acceso a la semántica y sintaxis del lenguaje matemático oficial.

De este modo, mediante un adecuado diseño que tome en cuenta los principios arriba planteados, los ambientes computacionales y los medios de construcción que proveen, pueden ser utilizados como herramientas para pensar: herramientas mediante las cuales los alumnos pueden expresar, articular y poner de manifiesto sus propias percepciones e ideas. Más aún, de este modo, simultáneamente, se revelan partes del mundo interior del sujeto.

El micromundo como una ventana para estudiar el "pensamiento cambiante"

Además de ser ambientes exploratorios de aprendizaje, los micromundos computacionales también pueden servir como herramientas de investigación para que los educadores estudien los procesos de aprendizaje. Al respecto, Noss y Hoyles (1996, p.5) señalan que la computadora puede ser utilizada como una "ventana" hacia el conocimiento, concepciones, creencias y actitudes de alumnos, maestros, y todos aquellos que estén involucrados en el proceso de construcción de significados. Dichos autores explican que la computadora funciona como una pantalla donde los estudiantes, maestros y otros involucrados pueden "pintar" sus expectativas e ideas, ayudando a hacer explícito aquello que es implícito y apuntar aquello que, a menudo, pasa desapercibido.

Uno de los factores fundamentales señalados por Noss y Hoyles (op.cit.), es el hecho de que la computadora obliga al usuario a *expresarse* de manera semiformal. Es en este sentido, en el que la computadora funciona como pantalla donde los alumnos pueden expresar su forma de pensar, simultáneamente dándole al observador la oportunidad de vislumbrar sus pensamientos. Weir (1987, p.19) explica que la actividad computacional sirve de catalizador para que las intuiciones del alumno emerjan, y de tal manera se pueden observar las reacciones de los alumnos al ver el efecto de sus acciones en la pantalla, así como el rango de sus respuestas. Se puede entonces utilizar la computadora para estudiar lo que Noss y Hoyles (1996) han descrito como "*pensamiento-en-cambio":* en lugar de intentar evaluar el estado mental de un individuo en un momento dado, la idea es poner en movimiento al pensamiento e investigar los cambios que ocurren cuando, por ejemplo, se introducen nuevas nociones, y observar las maneras en que el sujeto hace conexiones y construye significados. Por ejemplo, la computadora puede utilizarse como herramienta para explorar las interacciones que se dan cuando se construyen significados simbólicos y visuales. De hecho, Goldenberg (1995) sugiere que al observar a los estudiantes manipular múltiples representaciones, interactuando alternadamente con una u otra representación, se pueden vislumbrar los complejos modelos internos que los alumnos construyen en su intento por comprender. Explica además que esto puede ayudarnos en nuestro intento por entender lo que es "entender", lo cual difícilmente puede lograrse si solo observamos la manipulación aislada de una única forma de representación.

A continuación damos un breve ejemplo de uno de estos micromundos computacionales, intentando ilustrar cómo dicho ambiente funcionó tanto para que los alumnos exploraran sus ideas, así como una ventana para que los investigadores vislumbraran las concepciones de los alumnos.

Un micromundo para investigar algunos de los procesos infinitos de la matemática

En un estudio realizado (ver Sacristán, 1997), diseñamos un micromundo computacional utilizando el lenguaje Logo, para la investigación de algunos procesos infinitos de la matemática, tales como sucesiones y series infinitas. Este micromundo buscaba que los estudiantes, mediante actividades de *programación*, pudieran construir y explorar diferentes tipos de representaciones — simbólico (en el código de programación), gráfico, y numérico — de sucesiones y series infinitas (para una descripción detallada del diseño de dicho micromundo ver también Sacristán, 1998). El objetivo de la inclusión, construcción y exploración de diversas formas de representación era un intento de hacer del infinito algo más “concreto”.

Wilensky (1991), en una amplia discusión de lo que significa que un objeto sea "concreto", argumenta que la construcción de significado involucra la construcción de relaciones entre representaciones; señala que un concepto puede hacerse más "concreto" (más significativo) a medida que las representaciones mentales se enriquecen y se forman conexiones adecuadas entre las experiencias y objetos previos con las nuevas ideas u objetos. Argumenta, por lo tanto, que un concepto abstracto puede hacerse más concreto cuando uno se relaciona con él de tantas maneras como sea posible:

> "Cuantas más conexiones se hagan entre un objeto y otros objetos, más concreto se vuelve para nosotros. Cuanto más rico sea el conjunto de representaciones de un objeto, más maneras tenemos de interactuar con él, y más concreto es para nosotros"[2]

Desde este punto de vista parece esencial involucrarse con múltiples representaciones de un objeto, aunque, como enfatiza Wilensky, no es suficiente simplemente presentarle al sujeto diversas representaciones de un objeto. Siguiendo el paradigma del construccionismo, es a través de trabajar y reconstruir representaciones externas y las relaciones entre ellas que el sujeto construye sus propias representaciones mentales, las conexiones entre ellas, y las conexiones que les dan sentido en las estructuras más amplias de conocimiento.

Sintetizando estas ideas, teorizamos que se facilita el aprendizaje de un concepto si se tienen más oportunidades de *construir* (y *re*construir) e *interactuar* con representaciones tan diversas como sean posibles de un concepto. El contexto computacional de programación con Logo permite el acceso a diversos tipos de representación (e.g. simbólico, visual, numérico), así como la oportunidad de construir e interactuar con dichos objetos. De este modo, la computadora y sus representaciones se utilizaron como herramientas para pensar.

En términos de la componente contextual descrita arriba, como parte del diseño de este micromundo, se dispuso que los alumnos participantes[3] en el estudio trabajaran en parejas con una sola computadora para cada pareja: esto fomentó la discusión y enriqueció las iniciativas de exploración y construcción por parte de los alumnos. (Las conversaciones en voz alta sirvieron, además, para dar información adicional a los investigadores sobre los procesos de pensamiento de los alumnos durante las actividades del micromundo).

El enfoque del micromundo fue el estudio de la convergencia (o divergencia) de sucesiones y series infinitas, y de sus límites, utilizando figuras geométricas recursivas (tales como las figuras fractales). Las actividades se centraron pues, en la construcción y estudio de sucesiones de figuras geométricas (descritas mediante procedimientos computacionales recursivos). Por ejemplo, en una primera parte[4], siguiendo sugerencias del profesor, los alumnos construyeron modelos visuales como espirales, histogramas, escaleras y rectas, a través de procedimientos en Logo, para estudiar sucesiones tales como la que surge del proceso de "tomar mitades sucesivas": la sucesión $\{1/2^n\} = \{1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots, 1/2^n, \ldots\}$.

---

[2] Traducido del inglés. Op. Cit. p.198

[3] Se trabajó con 4 parejas de estudiantes mexicanos, cada pareja representativa de una edad y nivel diferente (el rango de edad fue de los 14 a los 30+), realizando estudios de caso para cada pareja.

[4] En la segunda parte del estudio, no descrita aquí, se trabajó con figuras fractales tales como la curva de Koch y el triángulo de Sierpinski.

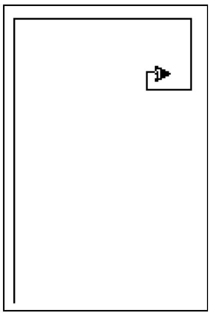


Figura 1. Modelo de espiral correspondiente a la sucesión $\{1/2^n\}$.

Dichos modelos son una manera sencilla de traducir sucesiones descritas normalmente de forma aritmética, en sucesiones visuales: cada término de la sucesión se traduce en una longitud de segmento; en el caso del modelo de espiral (ver Figura 1), cada segmento se separa visualmente por un giro, y la longitud total de la espiral corresponde a la suma de los términos (es decir, a la serie correspondiente). Así pues, para la sucesión $\{1/2^n\}$, el proceso visual de añadir longitudes a la espiral representa la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$, donde la notación de la derecha es descriptiva del proceso — los puntos suspensivos indican la continuidad indefinida (potencialmente infinita) del proceso.

Los modelos visuales se generan mediante un sencillo procedimiento computacional[5]; con muy pequeñas modificaciones del código de dicho procedimiento, los alumnos pueden transformar un modelo visual, como la espiral (el modelo que se uso en un principio), en otro. Lo que resulta relevante, es que diferentes modelos proporcionan diferentes perspectivas del *mismo* proceso:

- mediante el modelo de recta (figura 3) se puede "estirar" la espiral para observar mejor su longitud total (el valor de la serie); en el caso de sucesiones con series convergentes correspondientes, este modelo permite observar visualmente esa convergencia

[5] El procedimiento para producir el modelo de espiral tendría, en Logo, la siguiente estructura, donde :L es el valor correspondiente al segmento inicial (el primer término de la sucesión):

```
PARA DIBUJO :L
ADELANTE :L
DERECHA 90
DIBUJO :L / 2
FIN
```

Este procedimiento son instrucciones que se le dan a la tortuga de Logo (el pequeño triangulo en las figuras), para que camine hacia adelante una longitud :L, gire 90 grados, y luego repita el proceso para :L/2. La tortuga, que pinta al caminar, dibuja así (indefinidamente), la espiral correspondiente a la sucesión $\{1/2^n\}$.

- el modelo de escalera (figura 2) es una manera de combinar la espiral que distingue los diferentes términos de la sucesión, con el de la recta que permite visualizar el comportamiento de la serie correspondiente.
- Por otro lado, separar cada término en un histograma (figura 4) permite ver la sucesión de términos lado a lado.

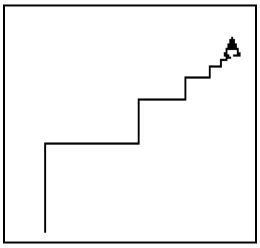


Figura 2. Modelo de escalera para la sucesión {1/2^n}.

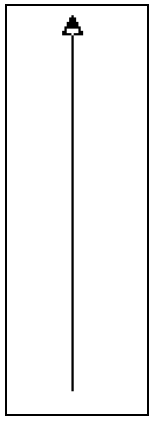


Figura 3. Modelo de recta para la sucesión {1/2^n}.

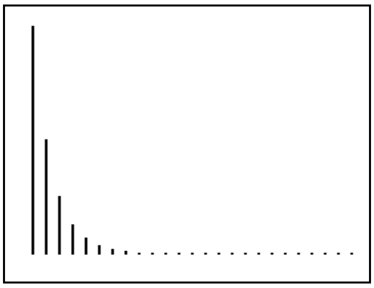


Figura 4. Histograma de la sucesión {1/2^n}.

La construcción de estos modelos sirve como actividad inicial para que los alumnos exploren el comportamiento de la sucesión, y su serie correspondiente, vislumbrando el posible comportamiento "en el infinito". El usuario puede además jugar con estos procedimientos haciendo modificaciones como aquella que le permite cambiar la sucesión original por otra (por ejemplo cambiando la correspondiente a {1/2^n} por la de {1/3^n}). Las actividades de comparación de diferentes sucesiones de un mismo tipo han mostrado ser muy útiles para el análisis del comportamiento y velocidad de convergencia (o divergencia) de dichas sucesiones.

La construcción de modelos visuales fue, además, acompañada por actividades de análisis númerico: por ejemplo, añadiendo un pequeño comando al código del procedimiento, los alumnos pueden hacer que se imprima el valor de la longitud que se está dibujando; en esta forma los alumnos construyeron y llenaron tablas de valores descriptivos del comportamiento de la sucesión estudiada, y de su serie correspondiente.

Fue con estos tipos de investigaciones que los estudiantes pudieron darle sentido al comportamiento de la sucesión {1/2^n} y al de su serie. Por ejemplo, existe una intuición errónea prevalente (descrita, entre otros, por Nuñez, 1993) que dice que si un proceso es infinito, entonces su valor también debe ser infinito. Observamos que varios de los alumnos que participaron en nuestro estudio, en particular una pareja de muchachas de 14 años, pensaban inicialmente que la longitud de la espiral, que recordamos corresponde a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, crecería indefinidamente. Sin embargo, al "estirar" la espiral convirtiéndola en el modelo de recta, observaron que la longitud de la recta era finita y, aproximadamente, el doble de tamaño que el primer término (segmento) de la sucesión. Al principio las alumnas pensaron que esto se debía a que no se habían sumado más que algunos pocos segmentos (términos) de la sucesión; pero al modificar el procedimiento para que informara sobre la cantidad de segmentos generados, notaron que la longitud de la recta tendía a ser una constante, sin importar cuántos segmentos se generaran. Esto fue un evento inesperado que provocó una investigación exhaustiva para dar sentido al fenómeno observado y entender cómo una suma infinita de segmentos podía ser un segmento acotado. Mediante exploraciones de los diversos modelos, y de investigaciones numéricas, las estudiantes pudieron observar que aunque el proceso continuaba (i.e. se seguían sumando segmentos), el valor de estos se hacía muy pequeño. Esto último se observó, particularmente, mediante el modelo de histograma y con un estudio de los valores numéricos: a medida que la sucesión crece, los términos de la sucesión se acercan cada vez más a cero, haciéndose muy pequeños, *muy rápido*. Notaron, por ejemplo, que el segmento 95 de la sucesión, tenía una longitud de *0.00…<26 ceros>…02524…*. En otras palabras, descubrieron que la sucesión $\{1/2^n\}$ converge a cero muy rápidamente. Esto les ayudó a entender que lo sumado es ya tan pequeño, que aunque el número de términos sumados sea infinito, el valor de la suma ya no crece. Comprobaron esto, adicionalmente, haciendo una investigación del valor numérico de la longitud total, pudiendo observar que el valor, sin importar cuántos segmentos se añaden, *nunca* logra rebasar el doble del valor del segmento inicial. Fue así como descubrieron que $1+ 1/2 + 1/4 + 1/8 +\ldots+ 1/2^n +\ldots = 2$; i.e. la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ converge a 2.

Este es un pequeño ejemplo de cómo el micromundo que diseñamos constituyó un conjunto de "herramientas abiertas[6]" (ver diSessa, 1997) mediante las cuáles los estudiantes pudieron explorar sus ideas acerca del infinito y de los procesos infinitos. Observamos, por ejemplo, la manera en que los alumnos utilizaron las herramientas del micromundo para dar sentido a los fenómenos y objetos estudiados. Al mismo tiempo los investigadores pudimos observar cómo los alumnos utilizaban las herramientas, vislumbrando así sus concepciones y confusiones acerca del infinito, y cómo éstas cambiaban al ser mediadas por las actividades del micromundo.

Referencias:

diSessa, A. (1997), "Open Toolsets: New Ends and New Means in Learning Mathematics and Science with Computers". *Proceedings of PME-21*, Finland; Erkki Pehkonen (Ed.), p. 47-62.

[6] Decimos que las herramientas del micromundo (e.g. los procedimientos) eran herramientas "abiertas" ya que eran (re-)construibles y modificables por los alumnos.

Dreyfus, T. (1995), "Imagery for diagrams", en Sutherland, R. & Mason, J (eds.) *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education,* NATO ASI Series, Series F. Vol.138, Springer-Verlag, Berlin, 1995, p. 3-19.

Feurzig, W.; Papert, S.; et al. (1969) Programming Languages as a Conceptual Framework for Teaching Mathematics, Report 1889, Bolt Beranek & Newman, Cambridge, Mass., USA.

Goldenberg, P. (1995), "Multiple Representations: A Vehicle for Understanding Understanding", en Perkins, D. et al. (eds), Software Goes to School: Teaching for Understanding with New Technologies; p. 155-171.

Harel, I. & Papert, S. (eds.), (1991), Constructionism; Ablex Publishing Corporation, Norwood, NJ.

Hoyles, C. (1993), "Microworlds/Schoolworlds: The Transformation of an Innovation", in Keitel, C. & Ruthven, K. (eds.) Learning from Computers: Mathematics Education and Technology NATO ASI Series Vol. F 121, Springer-Verlag, Berlin 1993. Pp

Hoyles, C. & Noss, R. (1987), "Synthesising mathematical conceptions and their formalisation through the construction of a LOGO-based school mathematics curriculum". International Journal of Mathematics Education in Science and Technology 18, 4 (1987), p.581-595.

Johnson, D.C. (1991), "Algorithmics in School Mathematics: Why, what, and how?", en Wirszup, I. & Streit, R. (eds.), Developments in School Mathematics Education around the World, Volume 3, University of Chicago Press.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996), Windows on Mathematical Meanings. Learning cultures and computers. Kluwer Academic Press.

Nuñez E., R. (1993), En Deçà du Transfini. Aspects psychocognitifs sous-jacents au concept 'infini en mathématiques. Éditions Universitaires Fribourg Suisse. Vol. 4.

Papert, S. (1981) Desafío a la mente. Galápago. Buenos Aires, Argentina.

Papert, S. (1987), "Microworlds: Transforming Education", en Lawler, R.W. & Yazdani, M. (eds.). Artificial Intelligence and Education, Volume One: Learning Environments and Tutoring Systems, Ablex, Norwood, NJ, USA; p.27-54.

Papert, S. (1993), The Children's Machine, Basic Books, New York.

Piaget, J. y García, R. (1982). Psicogénesis e Historia de la Ciencia. Siglo XXI Editores.

Sacristán, A.I. (1997) Windows on the Infinite: Constructing Meanings in a Logo-based Microworld. Tesis de doctorado. Universidad de Londres, Instituto de Educación; Londres, Inglaterra.

Sacristán, A.I. (1998) “Espirales y Fractales: visualización y estudio de sucesiones infinitas” en Memorias del Noveno Seminario Nacional de Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática, México DF, 23-25 sept. 1998, Escuela Normal Superior de México. Pp. 114-123.

Thompson, P. W. (1987), "Mathematical Microworlds and Intelligent Computer Assisted Instruction (ICAI)", en Kearsley, G.E. (ed) Artificial Intelligence and Instruction: Applications and Methods,. Addison-Wesley. P. 83-109.

Weir, S. (1987), Cultivating Minds: a Logo casebook, Harper&Row Publishers.

Wilensky, U. (1991) "Abstract Meditations on the Concrete, and Concrete Implications for Mathematics Education", en Harel, I. & Papert, S. (eds.) Constructionism, p.193-204; Ablex Publishing Corporation, Norwood, NJ.