PAEM Proyecto de Apoyo a la Educación Matemática

FUNCIONES

Lizbeth Alvarado
Lucía Fernández
Erlane Mora
Ariana Rodríguez

Función Lineal

Habilidades

1. Representar gráficamente una función lineal.

2. Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica.

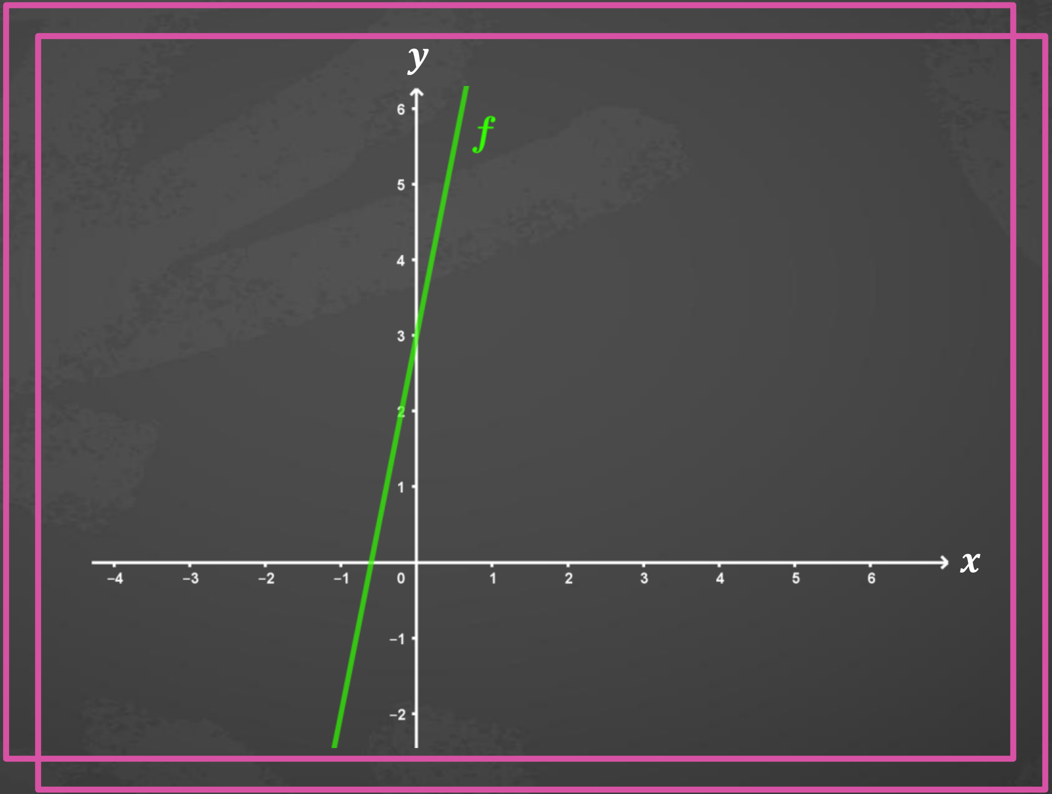
3. Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.

Función lineal

Sea f una función tal que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f se llama función lineal si $f(x) = mx + b$, con m y b constantes.

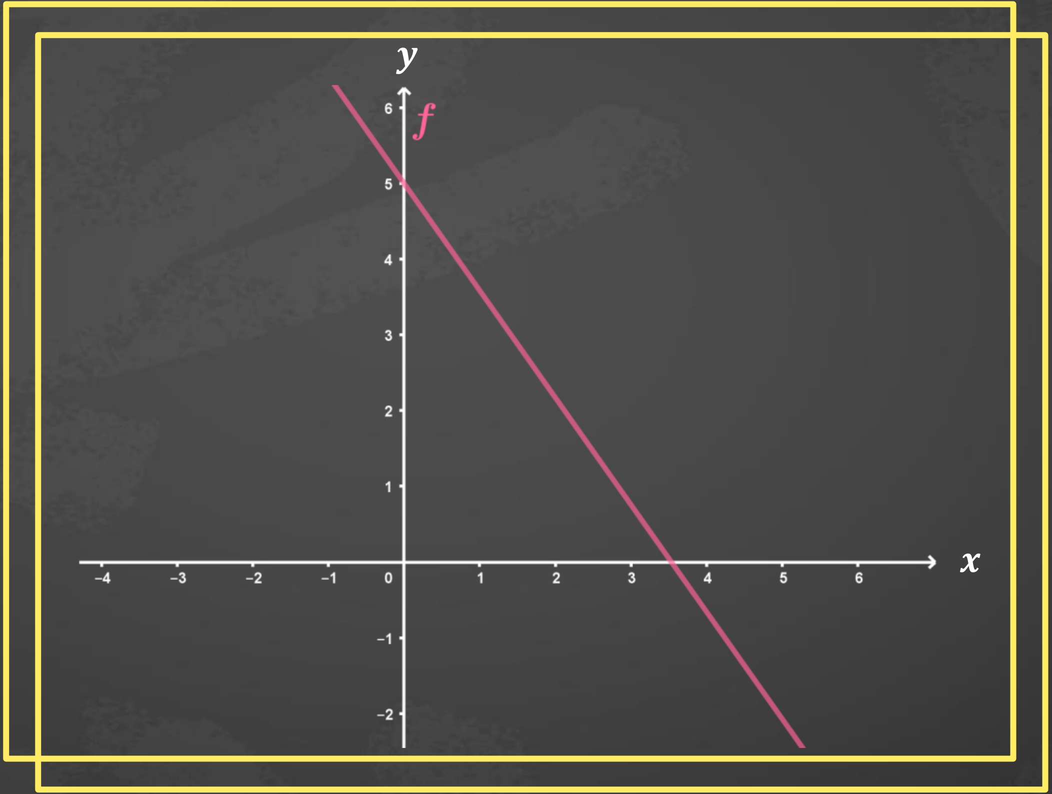
Ejemplo 01

La función f definida por $f(x) = 5x + 3$, es una función lineal, con $m = 5$ y $b = 3$.



Ejemplo 02

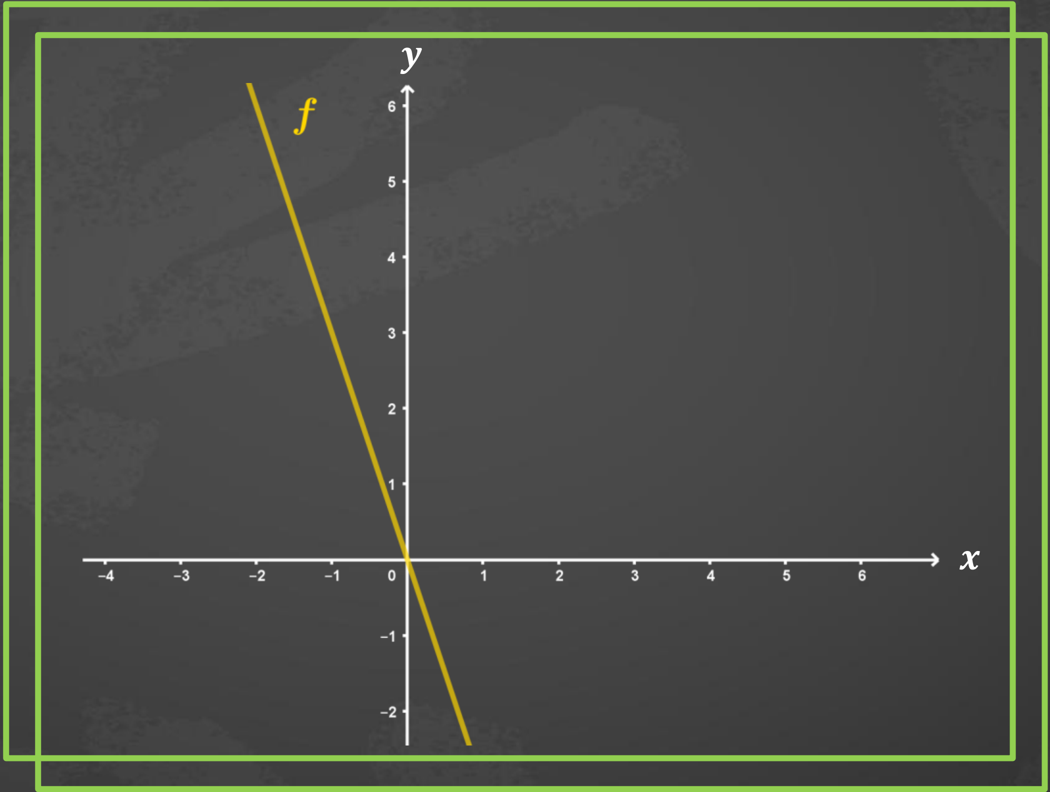
La función f definida por $f(x) = -\sqrt{2}x + 5$, es una función lineal, con $m = -\sqrt{2}$ y $b = 5$.



Ejemplo

03

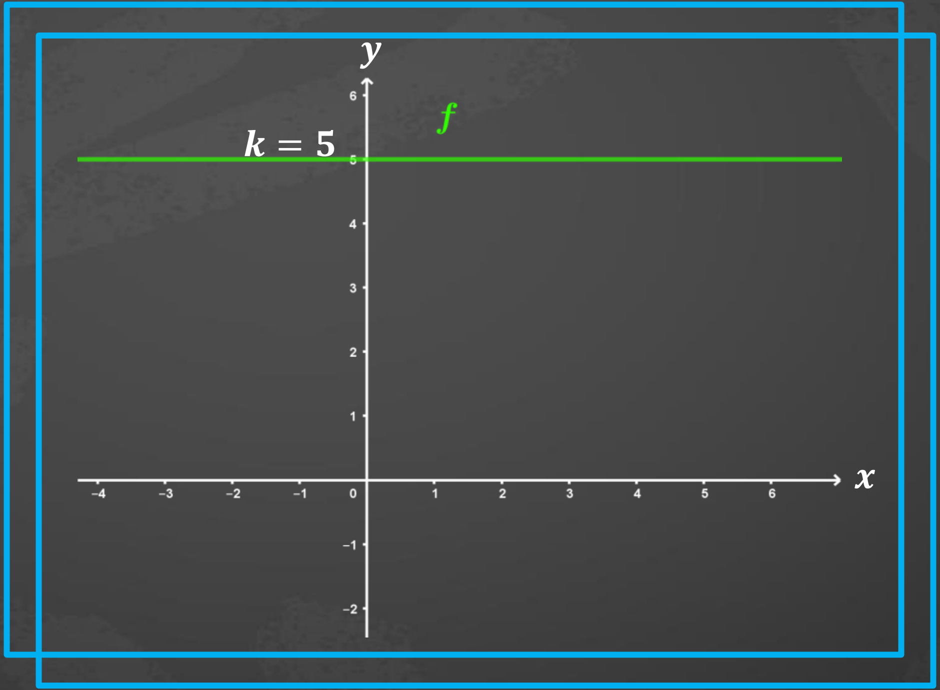
La función f definida por $f(x) = -3x$, es una función lineal, con $m = -3$ y $b = 0$.



Ejemplo

04

La función f definida por $f(x) = k$, con k constante real es una función lineal, con $m = 0$ y $b = k$.



Ejemplo 05

La función f definida por $f(x) = x$, es una función lineal, conocida como *función identidad* con $m = 1$ y $b = 0$.

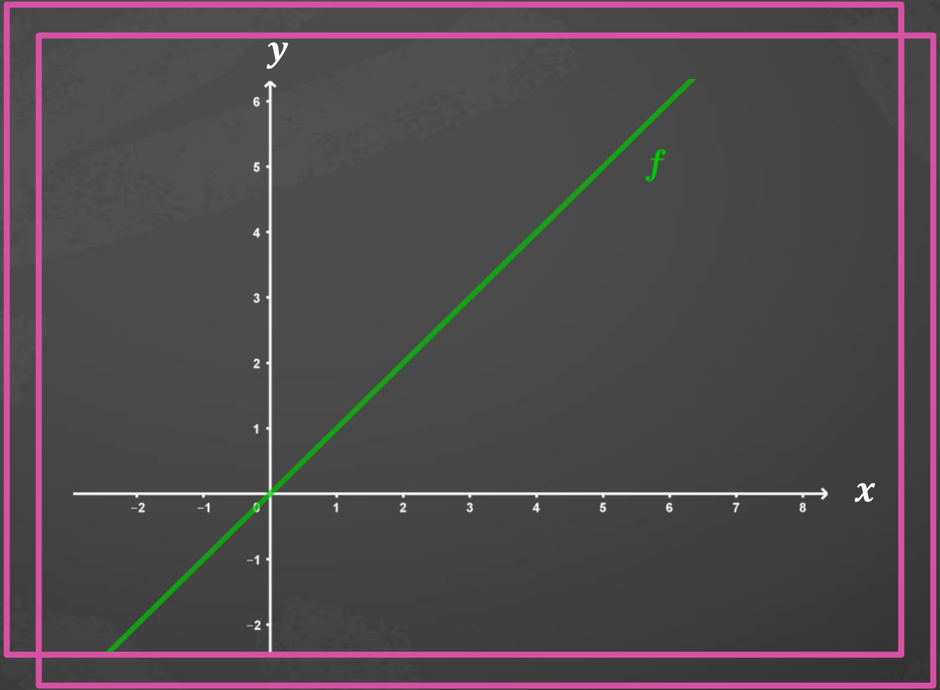


Gráfico de una función lineal

Sea f una función tal que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

El gráfico de f es el conjunto G_f definido por

$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $y = mx + b\}$.

Ejemplo

06

Determine si los puntos (3,5) y (2,1) pertenecen al gráfico de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuyo criterio es $f(x) = 2x - 1$

Para el punto $(3, 5)$

$$f(3) = 2(3) - 1 = 5$$

Para el punto $(2, 1)$

$$f(2) = 2(2) - 1 = 3$$

El punto (3,5) pertenece a G_f

El punto (2,1) no pertenece a G_f

¿Cómo se obtiene la ecuación de una recta?

Sabemos que por dos puntos pasa una y solo una recta. Entonces si conocemos dos puntos A y B, con $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es posible determinar la ecuación de la recta que pasa por esos puntos.

Ejemplo

07

"Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3, -2)$ y $(1,5)$."

Solución

Lo que buscamos en una ecuación de la forma $y = mx + b$. Para determinarla entonces necesitamos encontrar el valor de m y el valor de b.

Vamos a encontrar m

Ejemplo

07

m es la pendiente de la recta. Para calcular m teniendo dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , podemos hacer uso de la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En este caso, tendríamos

$$m = \frac{-2 - 5}{3 - 1} = -\frac{7}{2}$$

Vamos a encontrar b

Ejemplo

07

Podemos usar cualquiera de los puntos brindados. Luego sustituímos las coordenadas de dicho punto y con la pendiente m que acabamos de encontrar

$$y = mx + b$$

En este caso, tendríamos

$$5 = -\frac{7}{2}(1) + b$$

Y despejando,

$$5 + \frac{7}{2}(1) = b$$

Por lo que,

$$b = \frac{17}{2}$$

Ejemplo

07

Así, con los valores de m y b, la ecuación buscada es:

$$\boxed{y = -\frac{7}{2}x + \frac{17}{2}}$$

Ejemplo

08

Calcular la ecuación de la recta que contiene al punto $(5,2)$ y tiene una pendiente igual a -2.

Solución

$$\boxed{y = mx + b}$$

- Como ya tenemos el valor de la pendiente, entonces $m = -2$ y

$$y = -2x + b.$$

- Sustituyendo los valores de $(5,2)$ en el criterio de la función:

$$2 = -2(5) + b$$

$$b = 12$$

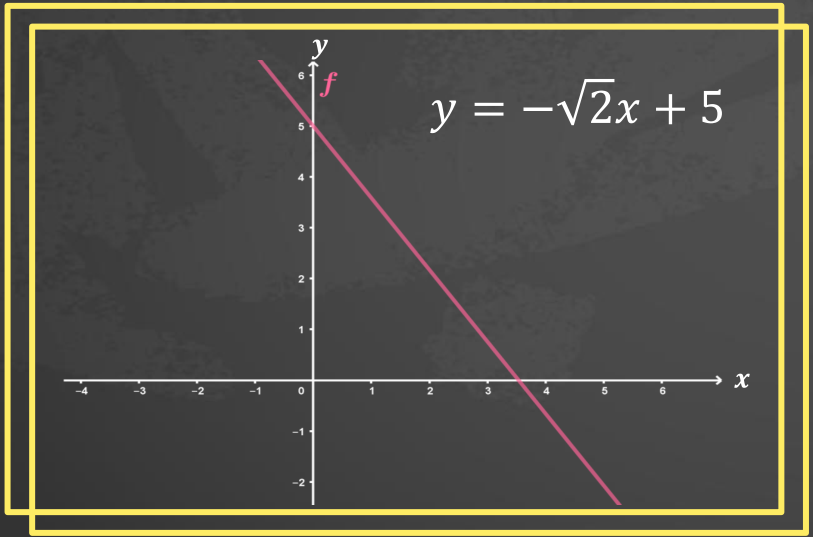
- Por lo tanto, la ecuación de la recta que contiene al punto $(5,2)$ es

$$\boxed{\boldsymbol{y = -2x + 12}}$$

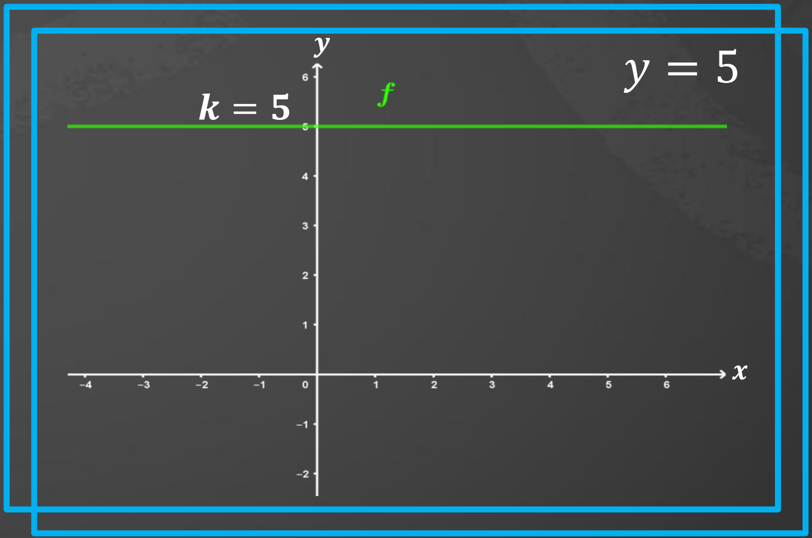
Dominio de una función lineal

El dominio de una función lineal siempre es $\mathbb{R}$.

Ejemplos



$D_f = \mathbb{R}$



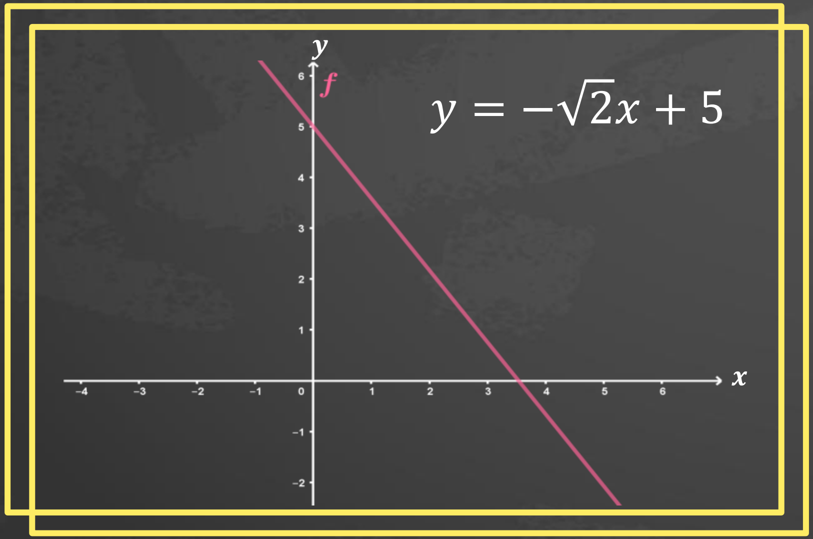
$D_f = \mathbb{R}$

Ámbito de una función lineal

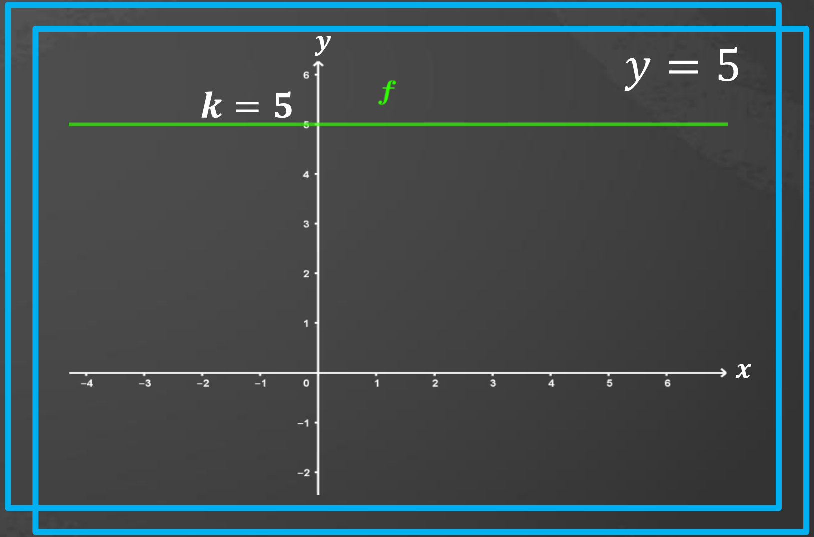
Una función lineal es de la forma $y = mx + b$.

- Si $m \neq 0$ el ámbito de la función lineal es $\mathbb{R}$.
- Si $m = 0$ el ámbito de la función lineal es b.

Ejemplos



$A_f = \mathbb{R}$



$A_f = 5$

Puntos de intersección de una función lineal

¿Cómo podemos determinar los puntos de intersección de una función lineal?

De la siguiente manera se determinan los puntos de intersección de una función lineal con los ejes:

1 **Intersección con el eje x (Eje de las abscisas)**

De manera general es el punto $\left(-\frac{b}{m}, 0\right), m \neq 0$.

2 **Intersección con el eje y (Eje de las ordenas)**

De manera general es el punto $(0, b)$.

¿Por qué el punto de intersección con el eje x es $\left(-\frac{b}{m}, 0\right)$, $m \neq 0$?

Pues, una función lineal es de la forma $y = mx + b$ y cuando esta función interseca al eje x, la coordenada en y de ese punto es cero, por lo que utilizando la forma general de una función lineal y que $y = 0$, tenemos lo siguiente :

$$0 = mx + \mathrm{b}$$

$$-\mathrm{b} = mx$$

$$-\frac{\mathrm{b}}{m} = x$$

Por lo tanto vemos que la coordenada en x cuando $y = 0$ es:

$$x = -\frac{b}{m}$$

Ejemplo

09

Determine las intersecciones con los ejes, de la función lineal f, cuyo criterio está dado por

$$6x + 3y - 12 = 0$$

Solución

Primeramente recordemos que la forma de una ecuación lineal es $y = mx + b$, por lo que reescribiremos f de esa forma:

$$6x + 3y - 12 = 0$$

$$3y = -6x + 12$$

$$y = -2x + 4$$

Intersecciones

Obtuvimos que

$$f: y = -2x + 4$$

- Intersección con el eje x: $\left(-\frac{b}{m}, 0\right)$

Entonces la intersección de f con el eje x es: $(2,0)$

- Intersección con el eje y: $(0, b)$

Entonces la intersección de f con el eje y es: $(0,4)$

Cero de una función lineal

¿Cómo podemos determinar el cero de una función lineal?

El cero hace referencia a un valor en el dominio para el cual la función lineal es nula, es decir $y = 0$.
En este caso, podemos decir que el cero hace referencia a la intersección de la función con el eje x, por lo que la coordenada x del punto de intersección con el eje x es el cero de la función, el cual se denota como $x = -\frac{b}{m}$.

Ejemplo

Determine el cero de la función f cuyo criterio está dado por

$$y = 2x - 1$$

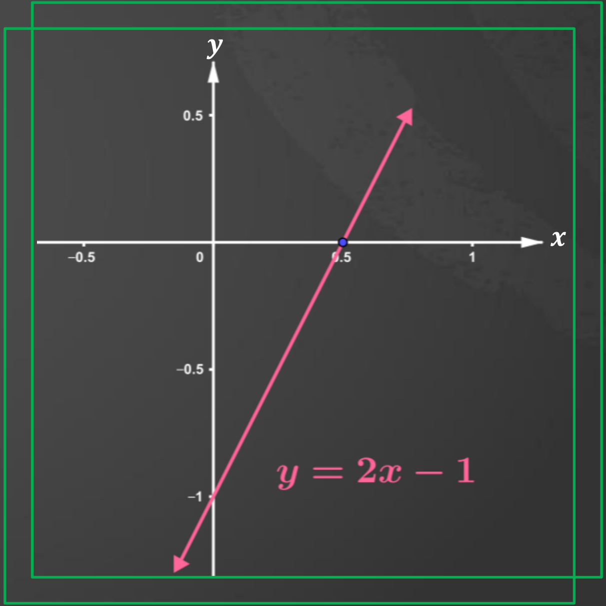
Solución

Recordemos que $\boldsymbol{x = -\frac{b}{m}}$

Por lo que

$$x = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el cero de la función f, está dado por $x = \frac{1}{2} = 0.5$



Signo de una función lineal

¿Cómo podemos saber si una función lineal es positiva o negativa?

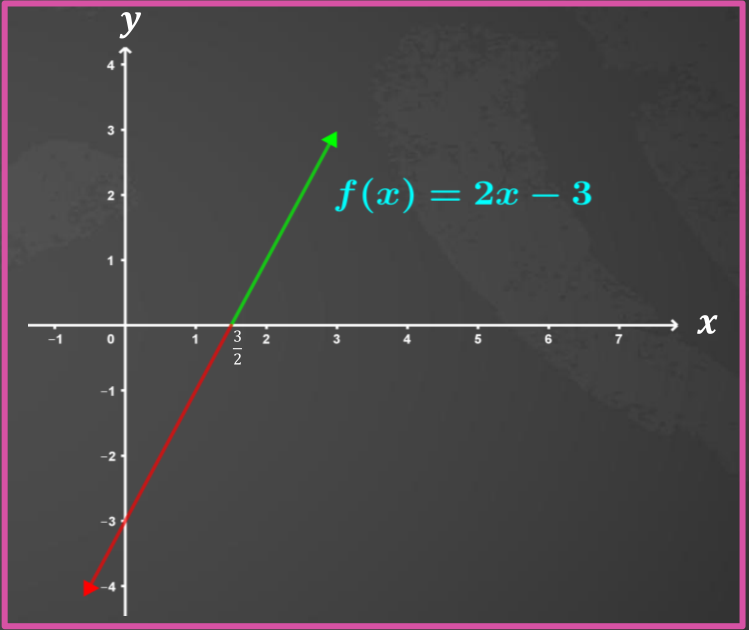
Lo que nos permite saber si una función lineal es positiva, o negativa es el signo de las imágenes de dicha función, así:

Positiva

f es positiva, si $f(x) > 0$, siempre que x pertenezca al dominio.

Negativa

f es negativa, si $f(x) < 0$, siempre que x pertenezca al dominio.



Ejemplo:

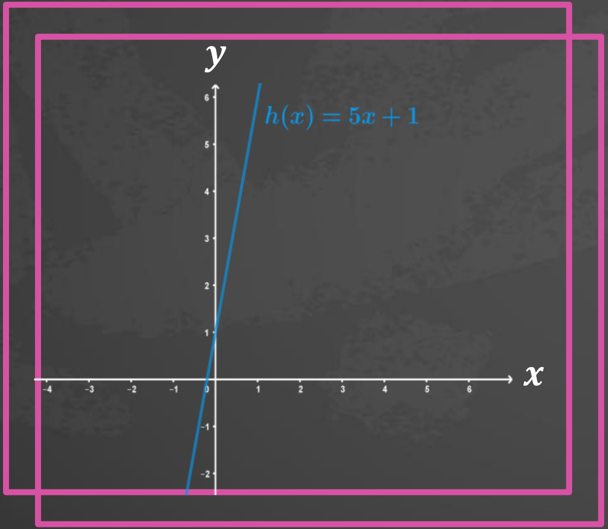
f es positiva: $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

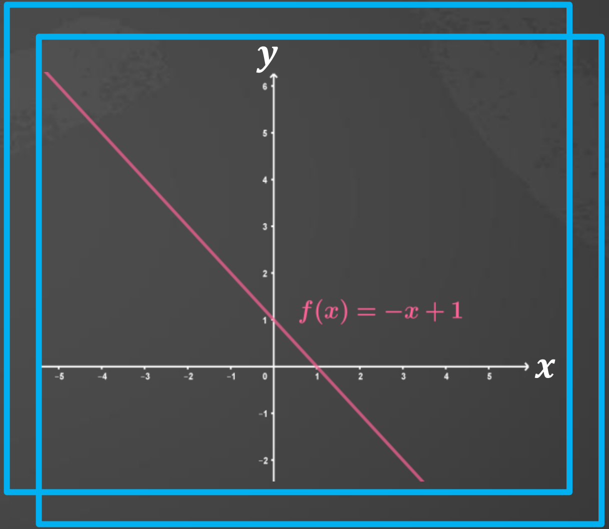
f es negativa: $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$.

Inyectividad de una función lineal

¿Cómo podemos saber si una función lineal es inyectiva o si no lo es?

$f: A \to B$ es **inyectiva** (uno a uno), si cada elemento del codominio se relaciona una única vez con un elemento del dominio.





Ejemplos: h y f son inyectivas.

¿En cuál caso una función lineal no es inyectiva?

La función f definida por $f(x) = k$, con k constante real, no es inyectiva.

Ejemplo

$$g(x) = -1.$$

Monotonía de una función lineal

¿Cómo podemos saber si una función lineal es creciente, decreciente o constante?

Lo que nos permite saber si una función es creciente, decreciente o constante es la pendiente de la función:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Entonces:

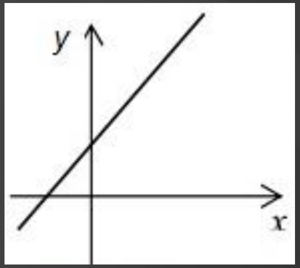
- Si $\mathrm{m} > 0$, la función lineal es estrictamente creciente.
- Si $\mathrm{m} = 0$, la función es constante.
- Si $\mathrm{m} < 0$, la función lineal es estrictamente decreciente.

Lo que nos permite saber si una función es creciente, decreciente o constante es la pendiente de la función:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Entonces:

- Si $\mathrm{m} > 0$, la función lineal es estrictamente creciente.

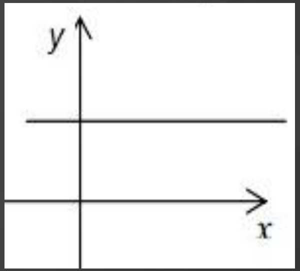


Lo que nos permite saber si una función es creciente, decreciente o constante es la pendiente de la función:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Entonces:

- Si $\mathrm{m} > 0$, la función lineal es estrictamente creciente.
- Si $\mathrm{m} = 0$, la función es constante.

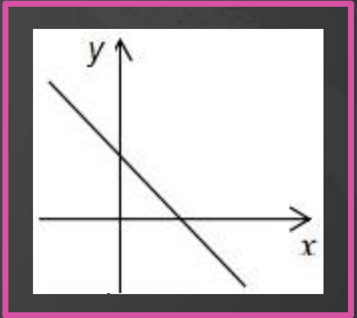


Lo que nos permite saber si una función es creciente, decreciente o constante es la pendiente de la función:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Entonces:

- Si $\mathrm{m} > 0$, la función lineal es estrictamente creciente.
- Si $\mathrm{m} = 0$, la función es constante.
- Si $\mathrm{m} < 0$, la función lineal es estrictamente decreciente.



Observemos que...

a. La pendiente de la recta cuya ecuación es $y = -2x + 5$ es $m = -2$, por lo tanto la recta es decreciente.

b. La pendiente de la recta cuya ecuación es $f(x) = -7 + \sqrt{7}x$ es $m = \sqrt{7}$, por lo tanto la recta es creciente.

c. La pendiente de la recta cuya ecuación es $y - 3x = 4$ es $m = 3$, por lo tanto la recta es creciente.

Ejemplo 10

Determine el criterio de una función lineal cuya pendiente sea $m = -2$ y que contenga al punto $(-1,3)$. Además:

1. Grafíquela.
2. Escriba los intervalos en donde sea positiva o negativa.
3. Indique las intersecciones con los ejes.
4. Identifique el dominio y el ámbito.
5. Justifique si es inyectiva o no.
6. Indique su monotonía.

Solución

Necesitamos determinar el criterio de una función lineal de la forma

$\boldsymbol{y = mx + b}$

Recuerde que $m = -2$, pues ese dato se nos daba en el enunciado.

Entonces tendríamos que:

$$\boxed{\boldsymbol{y = -2x + b}}$$

De ahí, podemos identificar que dicha función es decreciente pues su pendiente es menor que 0.

Solución

Ahora, para determinar b sustituimos el punto $(-1,3)$ de la siguiente manera:

$$y = -2x + b$$
$$\Rightarrow 3 = -2(-1) + b$$
$$\Rightarrow b = 1$$

Por lo tanto

$$\boxed{y = -2x + 1}$$

Ejemplo

Determine la ecuación de una recta cuya pendiente sea $m = -2$ y que contenga al punto $(-1,3)$. Además:

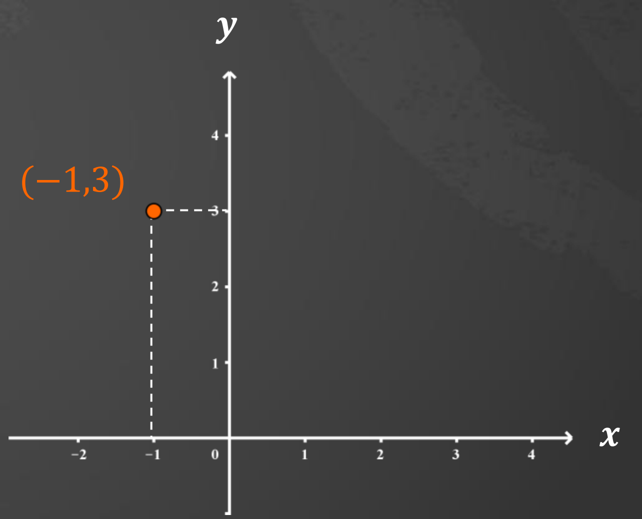
1. Grafíquela.
2. Escriba los intervalos en donde sea positiva o negativa.
3. Indique las intersecciones con los ejes.
4. Identifique el dominio y el ámbito.
5. Justifique si es inyectiva o no.
6. Indique su monotonía.

Solución

Determinación de puntos para el trazo de $y = -2x + 1$

Sabemos que el punto $(-1,3)$ pertenece a la recta $y = -2x + 1$ debido a que se nos indicó en el enunciado.

Entonces procedemos a graficar dicho punto

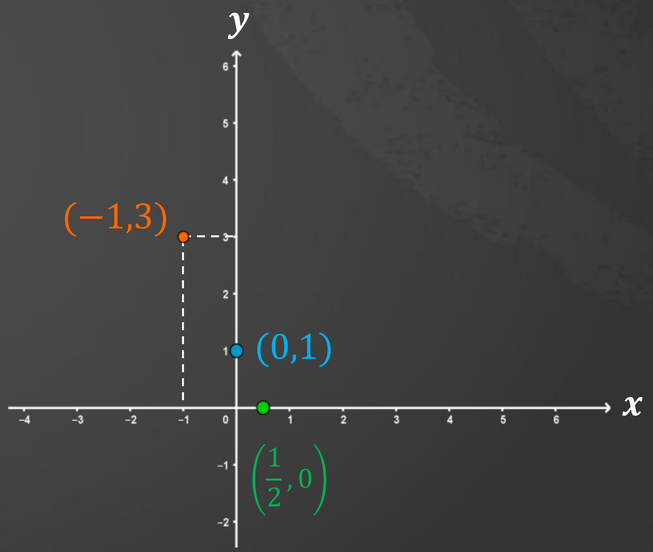


Solución

Determinación de puntos para el trazo de $y = -2x + 1$

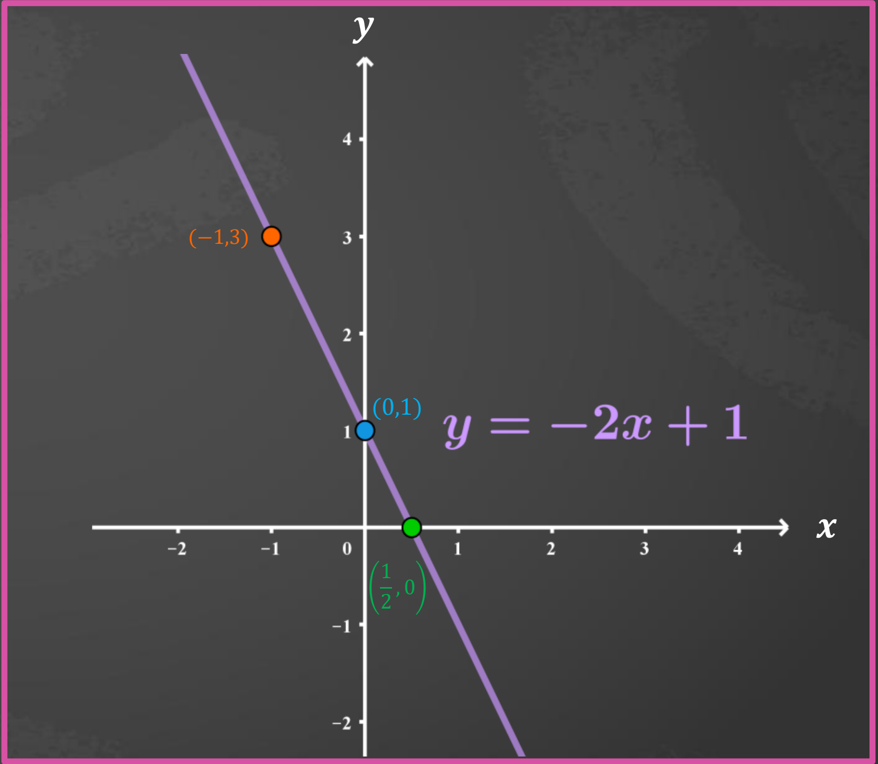
Intersecciones con los ejes

Calculamos la intersección con el eje y la cual será $(0,1)$ pues $b = 1$ y la intersección con el eje x que en forma general es $\left(\frac{-b}{m}, 0\right)$ y sustituyendo dichos valores obtenemos el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Finalmente graficamos dichos puntos.



Solución

Trazo completo de $y = -2x + 1$



Ejemplo

Determine la ecuación de una recta cuya pendiente sea $m = -2$ y que contenga al punto $(-1{,}3)$. Además:

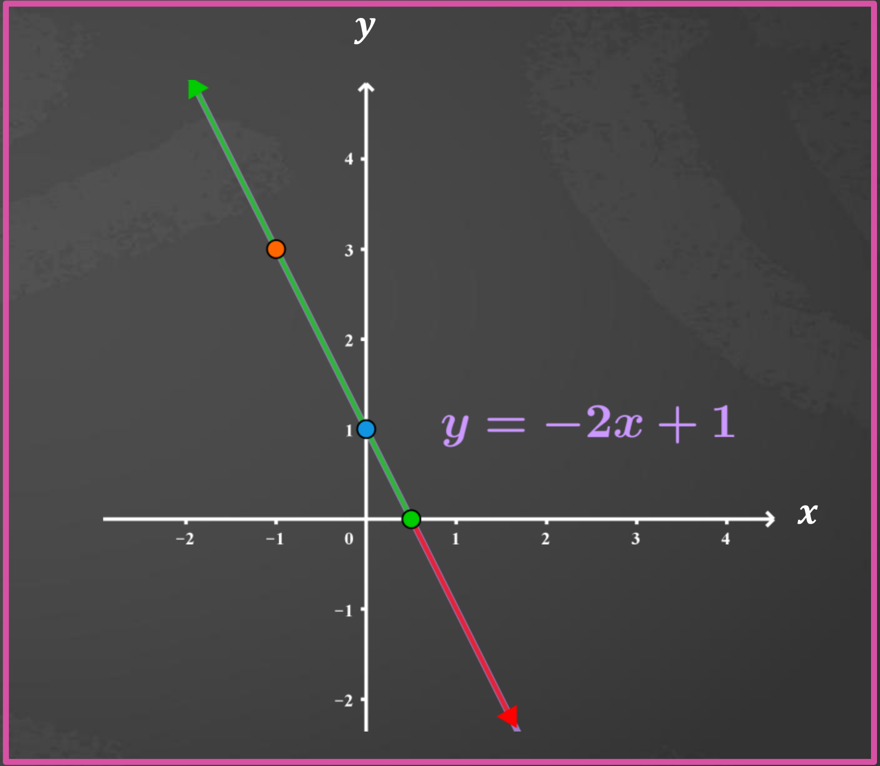
1. Grafíquela.
2. Escriba los intervalos en donde sea positiva o negativa.
3. Indique las intersecciones con los ejes.
4. Identifique el dominio y el ámbito.
5. Justifique si es inyectiva o no.
6. Indique su monotonía.

Solución

Signo:

f es positiva: $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$.

f es negativa: $\left]\frac{1}{2}, \infty\right[$.



Ejemplo

Determine la ecuación de una recta cuya pendiente sea $m = -2$ y que contenga al punto $(-1,3)$. Además:

1. Grafíquela.
2. Escriba los intervalos en donde sea positiva o negativa.
3. Indique las intersecciones con los ejes.
4. Identifique el dominio y el ámbito.
5. Justifique si es inyectiva o no.
6. Indique su monotonía.

Solución

Dominio:

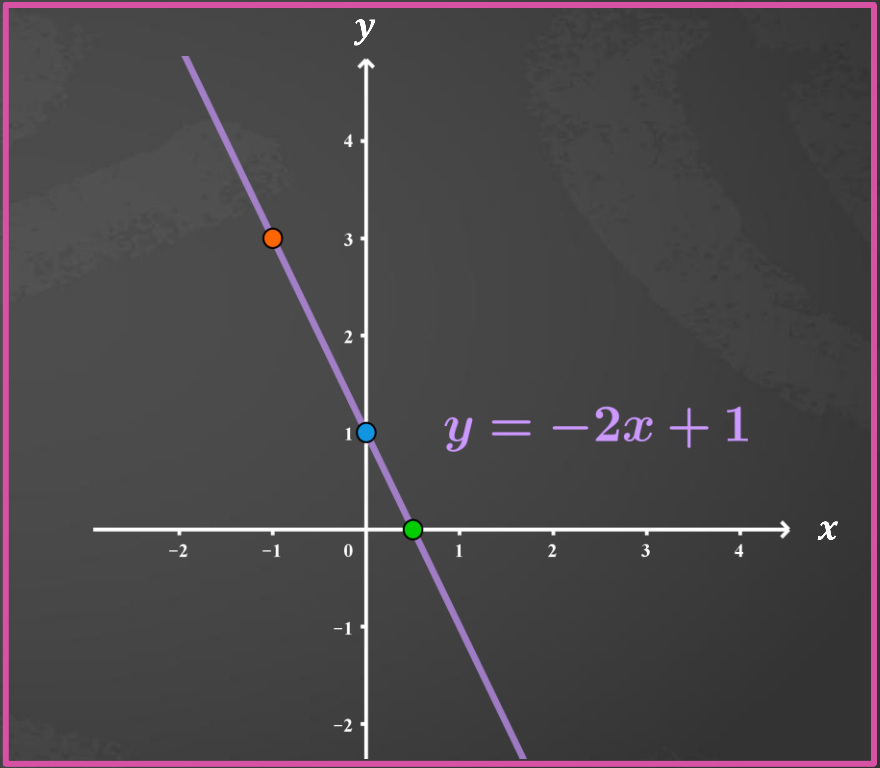
$\mathbb{R}$

Ámbito:

$\mathbb{R}$

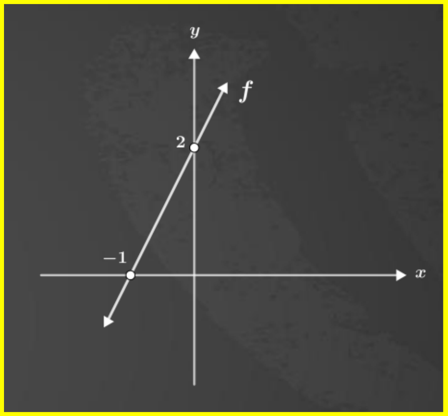
Inyectividad:

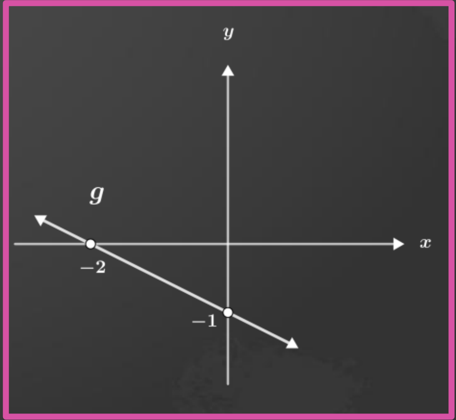
Sí es inyectiva.



Ejemplo 11

Considere las representaciones gráficas de las funciones f y g:





De acuerdo con la información considere las siguientes proposiciones

I. La pendiente de g es $\frac{-1}{2}$.

II. La intersección de la gráfica de f con el eje de las ordenadas es $(-1,0)$.

De ellas cuál o cuáles son verdaderas

A) Ambas

B) Solo la I

C) Solo la II

Ejemplo 11

Solución

Para la I. calculamos la pendiente de g utilizando los puntos $(-2{,}0)$ y $(0,-1)$.

$$\boxed{m = \frac{0 - -1}{-2 - 0} = \frac{-1}{2}}$$

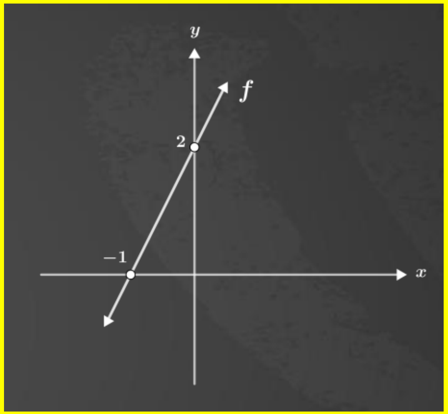
De donde obtenemos que la proposición I. es verdadera.

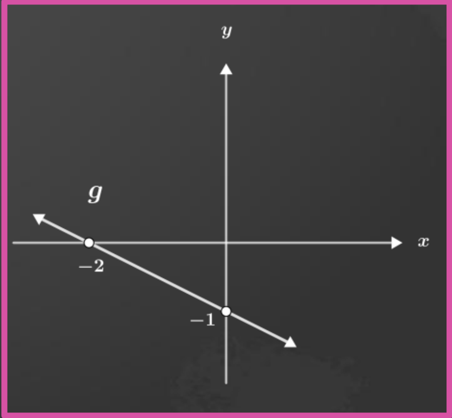
Para la II. vemos que el punto $(-1{,}0)$ es la intersección de la gráfica de f con el eje de las abscisas, por lo tanto la proposición es falsa.

Ejemplo

11

Considere las representaciones gráficas de las funciones f y g:





De acuerdo con la información considere las siguientes proposiciones

I. La pendiente de g es $\frac{-1}{2}$.

II. La intersección de la gráfica de f con el eje de las ordenadas es $(-1,0)$.

De ellas cuál o cuáles son verdaderas

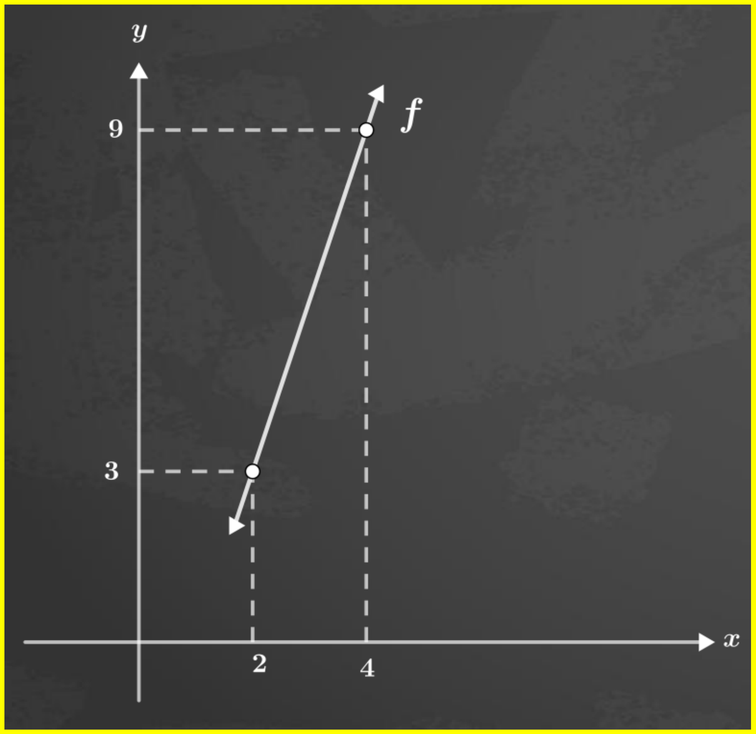
A) Ambas

B) Solo la I

C) Solo la II

Ejemplo 12

Considere la siguiente representación gráfica de la función f



De acuerdo con la información, ¿cuál es la ecuación de la recta que corresponde a la gráfica de f?

A) $y = 3x - 1$

B) $y = 3x - 3$

C) $y = \frac{x+7}{3}$

Ejemplo 12

Solución

Primero calculamos la pendiente de f utilizando los puntos $(2,3)$ y $(4,9)$.

$$\boxed{m=\frac{3-9}{2-4}=\frac{-6}{-2}=3}$$

De donde obtenemos que la ecuación de la recta tiene la forma:

$$y=3x+b$$

Ahora procedemos a calcular el valor de b y para ello utilizaremos el punto $(2,3)$.

Ejemplo 12

Solución

Sustituyendo los valores del punto (2,3) en el criterio de la función:

$$\Rightarrow 3 = 3(2) + b.$$

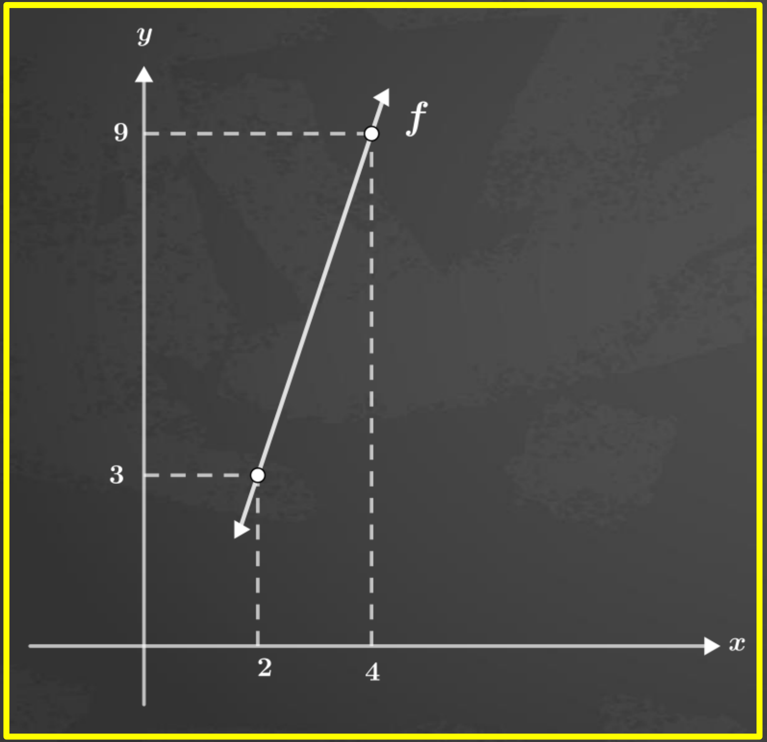
$$b = -3$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta que contiene al punto (2,3) y tiene pendiente $m = 3$ es

$$\boxed{\boldsymbol{y = 3x - 3}}$$

Ejemplo 12

Considere la siguiente representación gráfica de la función f



De acuerdo con la información, ¿cuál es la ecuación de la recta que corresponde a la gráfica de f?

A) $y = 3x - 1$

B) $y = 3x - 3$

C) $y = \frac{x+7}{3}$

Ejemplo 13

Considere las siguientes proposiciones relacionadas con la función f dada por $f(x) = 2x + 3$:

I. La gráfica de la función f es decreciente.
II. La intersección de la gráfica de f con el eje y es $(0,3)$.
III. Si la diferencia entre dos elementos del dominio de f es 1, entonces la diferencia entre sus respectivas imágenes es 2.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

A) Todas.
B) Solo la I.
C) Solo la II.

Ejemplo 13

Solución

Para la I. veamos que la pendiente de la función $f(x) = 2x + 3$ es 2. por lo tanto la función f es creciente y no decreciente.

Ejemplo 13

Solución

Para la II. Veamos que m y b en el criterio de la función ocupan los valores de 2 y 3 respectivamente.

Por ende, tenemos las intersecciones con los ejes de la siguiente manera:

Con el eje y

$$(0, b) = (0,3)$$

Con el eje x

$$\left(\frac{-b}{m}, 0\right) = \left(\frac{-3}{2}, 0\right)$$

Ejemplo 13

Solución

Para la III. si tomamos dos valores distintos del dominio, x_1 y x_2 tenemos que $x_1 - x_2 = 1$, para ellos debemos verificar que $f(x_1) - f(x_2) = 2$

Recordemos que la pendiente de f es 2 entonces se cumple lo siguiente, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = 2$ de ahí como $x_1 - x_2 = 1$, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{1} = 2$

por ende obtenemos que efectivamente $f(x_1) - f(x_2) = 2$

Ejemplo 13

Considere las siguientes proposiciones relacionadas con la función f dada por $f(x) = 2x + 3$:

I. La gráfica de la función f es decreciente.
II. La intersección de la gráfica de f con el eje y es $(0,3)$.
III. Si la diferencia entre dos elementos del dominio de f es 1, entonces la diferencia entre sus respectivas imágenes es 2.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

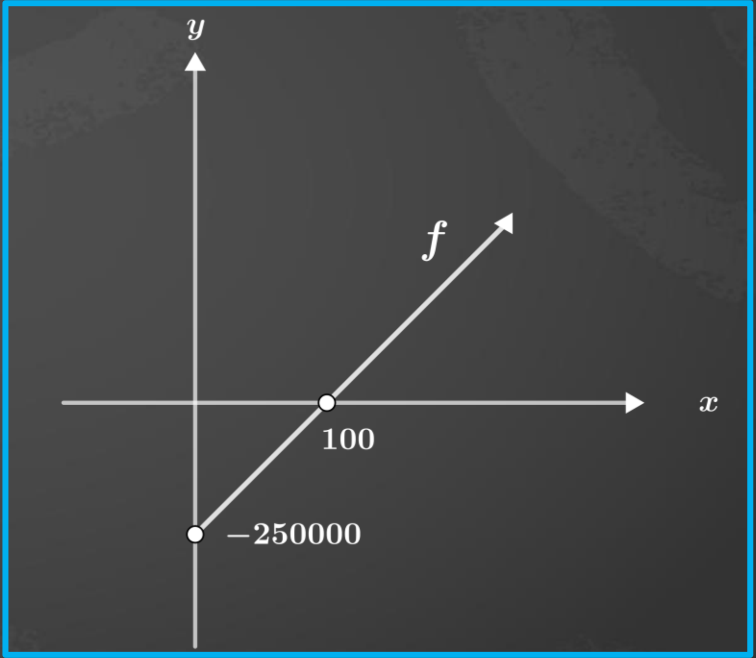
A) Todas.
B) Solo la I.
C) Solo la II.

Ejemplo

14

Considere la siguiente información para responder el siguiente ítem.

La siguiente representación gráfica de la función lineal f corresponde a la ganancia $f(x)$ obtenida por vender x unidades de un producto:



Ejemplo

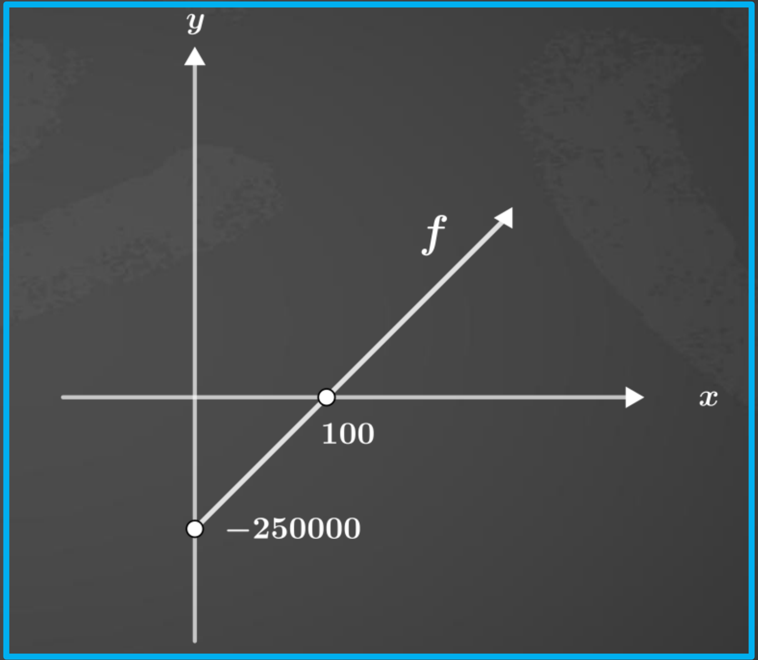
14

2. ¿Cuántas unidades del producto se deben vender como mínimo para no tener pérdidas?

A) 0

B) 100

C) 250000



Ejemplo 15

Considere la siguiente representación tabular de una función lineal f

x	-1	0	1	2
$f(x)$	6	1	-4	-9

De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

I. f es creciente.

II. El criterio de f corresponde a $f(x) = 1 - 5x$.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Solo la I

C) Solo la II

Ejemplo

15

Solución

Primero calculamos la pendiente de f utilizando los puntos $(0,1)$ y $(2,-9)$

$$\boxed{m = \frac{1 - -9}{0 - 2} = \frac{10}{-2} = -5}$$

De ahí, como la pendiente es mayor a cero la función es decreciente y por ende la proposición I es falsa.

Ejemplo 15

Solución

De la parte anterior obtenemos que la ecuación de la recta tiene la forma:

$$y = -5x + b$$

Ahora, para calcular b sustituimos los valores del punto $(-1,6)$ en el criterio de la función:

$$6 = -5(-1) + b$$

$$b = 1$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta que contiene al punto $(2,3)$ y tiene pendiente $m = 3$ es

$$\boxed{\boldsymbol{y = -5x + 1}}$$

Ejemplo 15

Considere la siguiente representación tabular de una función lineal f

x	-1	0	1	2
$f(x)$	6	1	-4	-9

De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

I. f es creciente.

II. El criterio de f corresponde a $f(x) = 1 - 5x$.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Solo la I

C) Solo la II

¡Muchas gracias!