INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA

Primer Examen Parcial
Pre-Cálculo
Modalidad anual

SÁBADO 22 DE ABRIL DE 2017

Instrucciones Generales:

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y pregunta antes de contestar.
2. Esta es una prueba de 50 puntos que consta de tres partes: selección única (20 puntos), respuesta corta (10 puntos) y de desarrollo (20 puntos).
3. Las expresiones algebraicas que se presentan en este examen se asumen bien definidas en $\mathbb{R}$.
4. En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento necesario para obtener su solución.
5. Escriba con bolígrafo de tinta indeleble azul o negra. No proceden reclamos sobre pruebas escritas con lápiz o que presenten alguna alteración.
6. No se permite el uso de celulares.
7. Si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
8. La calculadora que puede utilizar es aquella que contiene solo las operaciones básicas.
9. La prueba debe resolverse individualmente.
10. Dispone de 3 horas para resolver la prueba.

Nombre: ____

Código: ______________________

Colegio: ____

I Parte. Selección Única.

Valor: 20 puntos

A continuación se le presentan 20 enunciados, cada uno con cuatro opciones de respuesta de las cuales solo una es correcta. Seleccione la opción que completa de forma correcta cada enunciado y márquela en la hoja de respuestas.

1. Para racionalizar el numerador de $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[3]{2}+1}$ se puede multiplicar tanto el numerador como el denominador de la fracción por

   a) $\sqrt[3]{2}+1$

   b) $\sqrt{2}-1$

   c) $\sqrt{2}+1$ (respuesta)

   d) $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1$

2. Si $x > 1$, la expresión $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ es equivalente a

   a) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$

   b) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ (respuesta)

   c) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

   d) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x+1)\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x+1)\sqrt{x^2-1}}{x^2-1} = \frac{(x+1)\sqrt{x^2-1}}{(x+1)(x-1)} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$$

3. Si $x \neq 0$, $x \neq 1$ y $x \neq -1$, la fracción $\dfrac{2 - \dfrac{2}{x}}{4 - \dfrac{4}{x^2}}$ es equivalente a

a) $\dfrac{2x - 2}{x}$

b) $\dfrac{x}{2x + 2}$ (respuesta)

c) $\dfrac{2x + 2}{x}$

d) $\dfrac{1}{2(x + 1)}$

$$\frac{2 - \dfrac{2}{x}}{4 - \dfrac{4}{x^2}} = \frac{\dfrac{2x - 2}{x}}{\dfrac{4x^2 - 4}{x^2}} = \frac{x^2(2x - 2)}{x(4x^2 - 4)} = \frac{x(2x - 2)}{(2x - 2)(2x + 2)} = \frac{x}{2x + 2}$$

4. Si $x \neq 2$, la expresión $\dfrac{x^2 + 4}{x - 2} + \dfrac{4x}{2 - x}$ es equivalente a

a) $x - 2$ (respuesta)

b) $x + 2$

c) $\dfrac{(x^2 + 4)(2 - x) + 4x(x - 2)}{(x - 2)^2}$

d) $\dfrac{(x^2 + 4)(2 - x) - 4x(x - 2)}{x - 2}$

$$\frac{x^2 + 4}{x - 2} + \frac{4x}{2 - x} = \frac{x^2 + 4}{x - 2} - \frac{4x}{x - 2} = \frac{x^2 + 4 - 4x}{x - 2} = \frac{(x - 2)^2}{x - 2} = x - 2$$

5. Considere las siguientes ecuaciones:

   I. $x^2 = 4$ $\qquad S = \{2, -2\}$
   II. $x^3 = 8$ $\qquad S = \{2\}$
   III. $(x+2)^2 = 0$ $\qquad S = \{-2\}$

   ¿Cuáles de ellas tienen solo una solución real?

   a) I y III

   b) I y II

   c) II y III (respuesta)

   d) Solo III

6. La ecuación $-2x^2 + 3kx - 1 = 0$ tiene una única solución real solamente si k es igual a

   a) $\frac{8}{9}$

   b) $\frac{8}{3}$

   c) $-\sqrt{\frac{8}{9}}$

   d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ o $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$ (respuesta)

   Se debe cumplir que $9k^2 - 8 = 0$ o sea $k^2 = \frac{8}{9}$ entonces $|k| = \frac{\sqrt{8}}{3}$

7. El conjunto solución de la ecuación $|x - 2| + 4 = 0$ es

   a) $\{\ \}$ (respuesta)

   b) $\{6\}$

   c) $\{-2\}$

   d) $\{-2, 6\}$

8. La ecuación $\sqrt{3}\ x^2 + 7x = -8$ tiene

   a) cero soluciones reales (respuesta)

   b) una única solución real

   c) dos soluciones racionales distintas

   d) una solución racional y una irracional

   Se calcula el discriminante: $7^2 - 4(\sqrt{3})(8) = 49 - 32\sqrt{3} < 0$

9. La ecuación $x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{1}{4}} - 27 = 0$ tiene

   a) cero soluciones reales.

   b) solo una solución real. (respuesta)

   c) dos soluciones racionales.

   d) dos soluciones irracionales.

   $x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{1}{4}} - 27 = 0$
   $x^{\frac{2}{4}} + 6x^{\frac{1}{4}} - 27 = 0$
   $(x^{\frac{1}{4}} + 9)(x^{\frac{1}{4}} - 3) = 0$
   $x^{\frac{1}{4}} = -9$ o $x^{\frac{1}{4}} = 3$
   $x = 3^4 = 81$

10. El conjunto solución de $\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2} = 0$ es

    a) $\{0, 1\}$

    b) $\{1\}$ (respuesta)

    c) $\{-1\}$

    d) $\{\}$

    $\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2} = 0$ entonces $\dfrac{2x-2}{x^2} = 0$ por lo que $x = 1$

11. ¿Cuántas soluciones reales distintas tiene la ecuación $x^4 - 4x^2 = 0$?

   a) 1

   b) 2

   c) 3 (respuesta)

   d) 4

$x^2(x^2 - 4) = 0$
$x^2(x-2)(x+2) = 0$
S={0,2,-2}

12. El conjunto solución de $\dfrac{6x - 2(x^2-4)}{x^2 - 5x - 14} = 0$ corresponde a

   a) $\{4, -1\}$ (respuesta)

   b) $\{1, -4\}$

   c) $\{7, -2\}$

   d) $\{4, -2, 7, -1\}$

$$\frac{6x - 2x^2 + 8}{x^2 - 5x - 14} = 0$$
$$\frac{-2(x^2 - 3x - 4)}{(x-7)(x+2)} = 0$$
$$\frac{-2(x-4)(x+1)}{(x-7)(x+2)} = 0$$

13. La ecuación $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ es equivalente a

   a) $(x-1)(x+2)(2x+1) = 0$ (respuesta)

   b) $(x-1)(x-2)(2x+1) = 0$

   c) $(x-1)(x+2)(2x-1) = 0$

   d) $(x+1)(x+2)(2x+1) = 0$

$2x^3 - 2 + 3x^2 - 3x = 0$
$2(x^3-1) + 3x(x-1) = 0$
$2(x-1)(x^2+x+1) + 3x(x-1) = 0$
$(x-1)((2x^2+2x+2)+3x) = 0$
$(x-1)(2x^2+5x+2) = 0$
$(x-1)(2x+1)(x+2) = 0$

14. El conjunto solución de $x^{-2} + 2x^{-1} - 3 = 0$ corrresponde a

   a) $\{1, -3\}$

   b) $\{-1, 3\}$

   c) $\{-1, \frac{1}{3}\}$

   d) $\{1, -\frac{1}{3}\}$ (respuesta)

$(x^{-1})^2 + 2x^{-1} - 3 = 0$
$(x^{-1}+3)(x^{-1}-1) = 0$
$x^{-1} = -3$ o $x^{-1} = 1$

15. Considere la circunferencia de ecuación $(x-2)^2+(y+3)^2 = 9$ y analice las siguientes afirmaciones:

I. El diámetro mide 18 unidades. (falso porque el radio es 3 y el diámetro es 6)

II. Es tangente al eje X. (verdadero porque el radio es 3 y el centro es (2,-3))

III. El centro se ubica en el segundo cuadrante. (falso porque el centro es (2,-3) y se ubica en el IV cuadrante)

¿Cuáles de ellas son verdaderas?

a) I y II

b) II y III

c) Solo II (respuesta)

d) Solo III

16. Considere las siguientes ecuaciones:

I. $10y - 3 = 4x$ (pendiente $\frac{2}{5}$)

II. $2x + 5y = 11$ (pendiente $-\frac{2}{5}$)

III. $y = \frac{5}{2}x + 1$ (pendiente $-\frac{5}{2}$)

¿Cuáles de ellas corresponden a rectas perpendiculares a la recta determinada por $2y + 5x = 0$? (pendiente $-\frac{5}{2}$)

a) Solo I y III

b) Solo III

c) Solo II

d) Solo I (respuesta)

17. Considere el triángulo cuyos vértices son $A(0,0), B(0,4)$ y $C(6,0)$ entonces la pendiente de la altura sobre el lado $\overline{BC}$ es

   a) $\frac{2}{3}$

   b) $\frac{3}{2}$ (respuesta)

   c) $-\frac{2}{3}$

   d) $-\frac{3}{2}$

   Pendiente de la base: $\frac{0-4}{6-0} = -\frac{2}{3}$. La base y la altura son perpendicualres.

18. ¿En qué cuadrante se ubica el vértice de la parábola de ecuación $y = (x+3)^2 - 5$?

   a) I

   b) II

   c) III (respuesta)

   d) IV

   Vértice: $(-3,-5)$ pues la ecuación está escrita de la forma $y = a(x-h)^2 + k$ donde el vértice es (h,k)

19. La ecuación de la recta que contiene a los puntos de coordenadas $(1,3)$ y $(-5,3)$ corresponde a

   a) $x = 1$

   b) $x = -5$

   c) $y = 3$ (respuesta)

   d) $y = x + 2$

   Se trata de una recta horizontal pues los dos puntos tienen la misma ordenada.

20. La ecuación de la recta que interseca al eje X en $(3,0)$ y al eje Y en $(0,-1)$ corresponde a

   a) $y = \frac{1}{3}x - 1$ (respuesta)

   b) $y = \frac{1}{3}x + 3$

   c) $y = 3x - 1$

   d) $y = 3x + 3$

   La ecuación tiene la forma $y = mx + b$ donde $m = \dfrac{-1-0}{0-3} = \dfrac{1}{3}$ y $b = -1$

II Parte. Respuesta corta.

Valor: 10 puntos.

Instrucciones: Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios y escriba lo que se solicita en el espacio brindado en cada uno de ellos.

1. Escriba la fracción simplificada al máximo que se obtiene al racionalizar el denominador de la expresión $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$ con $x \neq 1$:

   $$\frac{1(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{x-1}$$

2. Escriba la fracción simplificada al máximo que se obtiene al racionalizar el numerador de la expresión $\dfrac{\sqrt{a+h}+\sqrt{h}}{h}$ con $h \neq 0$:

   $$\frac{(\sqrt{a+h}+\sqrt{h})(\sqrt{a+h}-\sqrt{h})}{h(\sqrt{a+h}-\sqrt{h})} = \frac{a+h-h}{h(\sqrt{a+h}-\sqrt{h})} = \frac{a}{h(\sqrt{a+h}-\sqrt{h})}$$

3. Escriba la fracción que se obtiene al simplificar al máximo la expresión $\dfrac{4-3x-x^2}{x^4-x}$ con $x \neq 0$ y $x \neq 1$:

   $$-\frac{x^2+3x-4}{x(x^3-1)} = -\frac{(x+4)(x-1)}{x(x-1)(x^2+x+1)} = -\frac{x+4}{x(x^2+x+1)}$$

4. Escriba la fracción que se obtiene al simplificar al máximo la expresión $\dfrac{\frac{1}{x}-1}{1-x}$ con $x \neq 0$ y $x \neq 1$:

$$\frac{\frac{1-x}{x}}{1-x} = \frac{1-x}{x(1-x)} = \frac{1}{x}$$

5. ¿Cuál es la distancia del punto $(2,-3)$ al origen del sistema de coordenadas?

$d = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

6. Si $M(-2,3)$ es el punto medio entre $P(-4,5)$ y $Q(a,b)$, ¿cuál es el valor de a?

$-2 = \dfrac{-4+a}{2}$ entonces $a-4=-4$ por lo tanto $a=0$.

7. Si los puntos $(3,-5)$ y $(1,b)$ pertenecen a una recta de pendiente -2 , ¿cuál es el valor de b?

$-2 = \dfrac{b+5}{-2}$ entonces $b+5=4$ y por lo tanto $b=-1$

8. Escriba una ecuación de una recta paralela a la determinada por $3x+5y=10$:

Cualquiera con pendiente $-\dfrac{3}{5}$ como por ejemplo $3x+5y=7$

9. ¿Cuál es la medida del radio de una circunferencia en la cual $(-1,3,)$ y $(3,1)$ son los extremos de un diámetro?

El diámetro es $d = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ por lo tanto el radio es $r = \sqrt{5}$

10. Indique un posible valor de c para el cual la parábola de ecuación $y = 3x^2 - 5x + c$ no interseca al eje X.

Cualquiera que cumpla con que $25 - 12c < 0$, por ejemplo $c = 3$.

III Parte. Desarrollo. Total: 20 puntos

A continuación se le presentan 4 ejercicios. Resuélvalos en forma clara, correcta y ordenada. Deben aparecer todos los procedimientos necesarios para resolver cada uno de ellos.

1. Resuelva la siguiente operación de fracciones. Simplifique el resultado al máximo. 7 puntos

$$\frac{4b^3-12b^2+9b}{b^2(2b-3)-3b(2b-3)+4(3-2b)}\left(\frac{1}{b}-\frac{2}{2b-3}\right)$$

$$=\frac{b(4b^2-12b+9)}{(2b-3)(b^2-3b-4)}\left(\frac{2b-3-2b}{b(2b-3)}\right)$$

$$=\frac{b(2b-3)^2}{(2b-3)(b-4)(b+1)}\left(\frac{-3}{b(2b-3)}\right)$$

$$=\frac{-3}{(b-4)(b+1)}$$

con $b \neq 0, b \neq \frac{3}{2}, b \neq -1, b \neq 4$

2. En un rectángulo el largo mide 1 cm más que el cuadrado de lo que mide el ancho. Si el área del cuadrilátero es $30cm^2$, determine la medida del ancho. 4 puntos

   Sea x la medida del ancho, entonces la medida del largo es $1+x^2$. Como el área es $30cm^2$ se tiene que:

   $30 = x(x^2+1)$
   $0 = x^3+x-30$
   $0 = (x-3)(3x^2+3x+10)$

   Como 3 es la única solución real de la ecuación entonces el ancho mide $3cm$

3. Determine el conjunto solución de la ecuación $\sqrt{x^2+9} = x + \sqrt{3}$ 4 puntos

$(\sqrt{x^2+9})^2 = (x+\sqrt{3})^2$
$x^2 + 9 = x^2 + 2x\sqrt{3} + 3$
$9 = 2x\sqrt{3} + 3$
$6 = 2x\sqrt{3}$
$\dfrac{3}{\sqrt{3}} = x$
$\sqrt{3} = x$

4. Verifique que la recta de ecuación $x + y = 3$ es tangente a la circunferencia de ecuación $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 8$ y determine las coordenadas del punto de tangencia. 5 puntos

$x + y = 3$ es equivalente a $y = 3 - x$

Sustituyendo en la ecuación de la parábola se tiene:

$(x-4)^2 + (3-x-3)^2 = 8$
$(x-4)^2 + (-x)^2 = 8$
$x^2 - 8x + 16 + x^2 = 8$
$2x^2 - 8x + 8 = 0$
$x^2 - 4x + 4 = 0$
$(x-2)^2 = 0$
$x = 2$

Como hay exactamente un punto de intersección entonces la recta y la parábola son tangentes. El punto de tangencia es $(2,1)$