Instituto Tecnológico de Costa Rica

Primer Examen Parcial
Pre-Cálculo
Modalidad bianual

SOLUCIÓN

Sábado 20 de mayo de 2017

Instrucciones Generales:

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y pregunta antes de contestar.
2. Esta es una prueba de 50 puntos que consta de tres partes: selección única (20 puntos), respuesta corta (10 puntos) y de desarrollo (20 puntos).
3. Las expresiones algebraicas que se presentan en este examen se asumen bien definidas en $\mathbb{R}$.
4. En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento necesario para obtener su solución.
5. Escriba con bolígrafo de tinta indeleble azul o negra. No proceden reclamos sobre pruebas escritas con lápiz o que presenten alguna alteración.
6. No se permite el uso de celulares.
7. Si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
8. La calculadora que puede utilizar es aquella que contiene solo las operaciones básicas.
9. La prueba debe resolverse individualmente.
10. Dispone de un máximo de 3 horas para resolver la prueba.

I Parte. Selección Única. Valor: 20 puntos

A continuación se le presentan 20 enunciados, cada uno con cuatro opciones de respuesta de las cuales solo una es correcta. Seleccione la opción que completa de forma correcta cada enunciado y márquela en la hoja de respuestas.

1. Para racionalizar el denominador de $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[3]{2}+1}$ se puede multiplicar tanto el numerador como el denominador de la fracción por

   a) $\sqrt[3]{2}-1$

   b) $\sqrt{2}+1$

   c) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$

   d) $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1$

   Respuesta: d)

2. Si $x>1$, la expresión $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$ es equivalente a

   a) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

   b) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

   c) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

   d) $\dfrac{x^2-1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

   $$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\frac{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-1}}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

   Respuesta: b

3. Considere las siguientes igualdades:

   I. $-x^2 + 4 = (x+2)(2-x)$
   II. $x^3 - 8x = x(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})$
   III. $x^2 + 3x - 4 = (x-4)(1+x)$

   ¿Cuáles de ellas son verdaderas?

   a) Solo I y II

   b) Solo I y III

   c) Solo II y III

   d) I, II y III

   I. $-x^2 + 4 = 4 - x^2 = (2-x)(2+x) = (x+2)(2-x)$ Verdadero
   II. $x^3 - 8x = x(x^2 - 8) = x(x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8}) = x(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})$ Verdadero
   III. $x^2 - 3x + 4 = (x-4)(1+x)$ Falso

   Respuesta: c

4. Un factor del polinomio $2x^3 + x^2 + 2x + 1$ corresponde a

   a) $x + 1$

   b) $x - 1$

   c) $2x - 1$

   d) $x^2 + 1$

   $2x^3 + x^2 + 2x + 1 = (2x^3 + x^2) + (2x + 1) = x^2(2x+1) + (2x+1) = (2x+1)(x^2+1)$
   Respuesta: d

5. Si $x \neq 0$, $x \neq 1$ y $x \neq -1$, la fracción $\dfrac{4-\dfrac{4}{x^2}}{2-\dfrac{2}{x}}$ es equivalente a

a) $\dfrac{x}{2x-2}$

b) $\dfrac{2x+2}{x}$

c) $\dfrac{x}{2x+2}$

d) $2(x+1)$

$$\frac{4-\dfrac{4}{x^2}}{2-\dfrac{2}{x}} = \frac{\left(2-\dfrac{2}{x}\right)\left(2+\dfrac{2}{x}\right)}{2-\dfrac{2}{x}} = 2+\frac{2}{x} = \frac{2x+2}{x}$$

Respuesta: b

6. Si $x \neq 2$, la expresión $\dfrac{x^2-4}{x-2} + \dfrac{4-2x}{2-x}$ es equivalente a

a) x

b) $x+4$

c) $\dfrac{x^2-2x}{(x-2)(2-x)}$

d) $\dfrac{x^2+2x-8}{(x-2)(2-x)}$

$$\frac{x^2-4}{x-2} + \frac{4-2x}{2-x} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} + \frac{2(2-x)}{2-x} = x+2+2 = x+4$$

Respuesta: b

7. Al simplificar el resultado de $\dfrac{8-x^3}{x^2-4} \div \dfrac{x^3+2x^2+4x}{2x+x^2}$ se obtiene

   a) -1

   b) 0

   c) 1

   d) x

   $$\frac{8-x^3}{x^2-4} \div \frac{x^3+2x^2+4x}{2x+x^2} = \frac{(2-x)(4+2x+x^2)}{(x-2)(x+2)}\frac{x(x+2)}{x(x^2+2x+4)} = \frac{-(x-2)}{(x-2)} = -1$$

   Respuesta: a

8. Al simplificar el resultado de $\left(1-\dfrac{x}{x+1}\right)^{-1}$ se obtiene

   a) $x+1$

   b) $\dfrac{-1}{x}$

   c) $\dfrac{1}{x}$

   d) $\dfrac{1}{x+1}$

   $$\left(1-\frac{x}{x+1}\right)^{-1} = \left(\frac{x+1-x}{x+1}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{x+1}\right)^{-1} = x+1$$
   Respuesta: a

9. Considere la siguientes afirmaciones:

   I. $\dfrac{x+1}{-x-1} = -1$

   II. $\dfrac{x^2+4}{x+2} = x+2$

   III. $\dfrac{(-x-3)^2}{(x+3)^2} = 1$

   ¿Cuáles de ellas son verdaderas?

   a) I y II

   b) I y III

   c) II y III

   d) I, II y III

   I. $\dfrac{x+1}{-x-1} = \dfrac{x+1}{-(x+1)} = -1$ Verdadero

   II. $\dfrac{x^2+4}{x+2} = x+2$ Falso

   III. $\dfrac{(-x-3)^2}{(x+3)^2} = \dfrac{(-(x+3))^2}{(x+3)^2} = \dfrac{(x+3)^2}{(x+3)^2} = 1$ Verdadero

   Respuesta: b

10. Si $P(z)$ es una expresión algebraica para la cual se cumple que $\dfrac{z^2+z-2}{z+2} + P(z) = 0$ entonces $P(z) =$

    a) $z-1$

    b) $1-z$

    c) $\dfrac{1}{z-1}$

    d) $\dfrac{1}{1-z}$

    $P(z) = -\dfrac{z^2+z-2}{z+2} = -\dfrac{(z+2)(z-1)}{z+2} = -(z-1) = 1-z$

    Respuesta: b

11. Un valor de k para el cual la ecuación $kx^2 + 4x + 1 = 0$ no tiene soluciones reales es

   a) 0

   b) 2

   c) 4

   d) 6

   Para que no tenga soluciones debe suceder que $\Delta = 16 - 4k < 0$ o sea $16 < 4k$ por lo tanto $k > 4$
   Respuesta: d.

12. Considere las siguientes ecuaciones:

   I. $x^2 - 3x - 4 = 0$
   II. $x^2 + x + 5 = 0$
   III. $x^2 + 4x + 4 = 0$

   ¿Cuáles de ellas tienen al menos una solución real?

   a) Solo I

   b) I y III

   c) II y III

   d) Solo III

   I. $\Delta = 25 > 0$ La ecuación tiene dos soluciones.
   II. $\Delta = -19 < 0$ No tiene soluciones reales.
   III. $\Delta = 0$ Tiene una solución real.

   Respuesta: b.

13. El conjunto solución de la ecuación $\quad 4+|x-2|=4 \quad$ corresponde a

   a) $\{\ \}$

   b) $\{2\}$

   c) $\{-2\}$

   d) $\{-2,2\}$

   $|x-2|=0$ si y solo si $x=2$.
   Respuesta: b.

14. Sobre las soluciones de la ecuación $-x^2+\sqrt{5}\,x=1$ se puede asegurar que tiene

   a) cero soluciones reales

   b) una única solución real

   c) dos soluciones racionales distintas

   d) dos soluciones irracionales distintas

   $-x^2+\sqrt{5}\,x-1=0$
   $x^2-\sqrt{5}\,x+1=0$
   $\Delta=5-4=1$
   $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}, x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$
   Respuesta: d

15. La solución de la ecuación $\quad y^{\frac{1}{4}}+6y^{\frac{1}{8}}-27=0 \quad$ corresponde a

   a) 3

   b) 9

   c) 3^8

   d) 9^8

   $(y^{\frac{1}{8}})^2+6y^{\frac{1}{8}}-27=0$ es equivalente a $(y^{\frac{1}{8}}+9)(y^{\frac{1}{8}}-3)=0$
   $y^{\frac{1}{8}}=-9$ o bien $y^{\frac{1}{8}}=3$ pero $y^{\frac{1}{8}}>0$ entonces $\sqrt[8]{y}=3$ por lo que $y=3^8$
   Respuesta: c.

16. El conjunto solución de $\dfrac{2-x}{x-2} - \dfrac{x^2-2x}{x-2} = 0$ corresponde a

   a) $\mathbb{R} - \{2\}$

   b) $\{1\}$

   c) $\{-1\}$

   d) $\varnothing$

   $\dfrac{-(x-2)}{x-2} - \dfrac{x(x-2)}{x-2} = 0$
   es equivalente a $-1 - x = 0$
   $x = 1$

17. ¿Cuántas soluciones reales distintas tiene la ecuación $(x-3)^4 - (x-3)^2 = 0$?

   a) 1

   b) 2

   c) 3

   d) 4

   $(x-3)^4 - (x-3)^2 = 0$ es equivalente a $(x-3)^2[(x-3)^2 - 1] = 0$
   $(x-3)^2[(x-3) - 1][(x-3) + 1] = 0$
   $(x-3)^2(x-4)(x-2) = 0$

   Las soluciones son 2, 3 y 4.
   Respuesta: c.

18. El conjunto solución de $\dfrac{5x-2(x^2-9)}{x^2-9}=0$ corresponde a

   a) $\left\{\dfrac{2}{5}\right\}$

   b) $\left\{\dfrac{9}{2},-2\right\}$

   c) $\left\{\dfrac{-9}{2},2\right\}$

   d) $\left\{\dfrac{2}{5},3,-3\right\}$

$\dfrac{5x-2x^2+18}{x^2-9}=0$ es equivalente a $2x^2-5x-18=0$
$(2x-9)(x+2)=0$
$x=\frac{9}{2}$ o $x=-2$

Respuesta: b.

19. Se sabe que $x=5$ es una solución de la ecuación $x^3-2x^2-13x-10=0$, las otras dos soluciones son

   a) $x=1$ y $x=2$

   b) $x=1$ y $x=-2$

   c) $x=-1$ y $x=2$

   d) $x=-1$ y $x=-2$

Al dividir $x^3-2x^2-13x-10$ por $x-5$ se obtiene x^2+3x+2 que es equivalente a $(x+2)(x+1)$ por lo que las otras dos soluciones de la ecuación son $x=-2$ y $x=-1$.
Respuesta: d.

20. El conjunto solución de $x^{-2} = 2x^{-1}$ corrresponde a

   a) $\{\frac{1}{2}\}$

   b) $\{-\frac{1}{2}\}$

   c) $\{0, \dfrac{1}{2}\}$

   d) $\{0, -\dfrac{1}{2}\}$

$x^{-2} - 2x^{-1} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{1-2x}{x^2}$ Por lo tanto la solución de la ecuación es $x = \dfrac{1}{2}$

II Parte. Respuesta corta.

Valor: 10 puntos.

Instrucciones: Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios y escriba lo que se solicita en el espacio brindado en cada uno de ellos.

1. Escriba la fracción simplificada al máximo que se obtiene al racionalizar el denominador de la expresión $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-x}}$ con $x > 1$:

   $$\frac{x-1}{\sqrt{x^2-x}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2-x}} = \frac{(x-1)\sqrt{x^2-x}}{x^2-x} = \frac{(x-1)\sqrt{x^2-x}}{x(x-1)} = \frac{\sqrt{x^2-x}}{x}$$

2. Escriba la fracción simplificada al máximo que se obtiene al racionalizar el numerador de la expresión $\dfrac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{2a}$ con $a > 0$ y $h > 0$:

   $$\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{2a} = \frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{2a} \cdot \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}} = \frac{a+h-a}{2a(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})} = \frac{h}{2a(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})}$$

3. Escriba la fracción que se obtiene al simplificar al máximo la expresión $\dfrac{25-x^2}{x^2-3x-10}$ con $x \neq 5$ y $x \neq -2$: $\dfrac{25-x^2}{x^2-3x-10} = \dfrac{(5-x)(5+x)}{(x-5)(x+2)} = \dfrac{-(5+x)}{(x+2)}$

4. Escriba la fracción que se obtiene al simplificar al máximo la expresión $\quad(1-x^{-1})^{-1}\quad$ con $x \neq 0$ y $x \neq 1$:

   $(1-x^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{1-x^{-1}} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{\frac{x-1}{x}} = \dfrac{x}{x-1}$

---

5. Escriba la expresión que se obtiene al simplificar al máximo $\quad \dfrac{x}{x+1} \cdot \dfrac{x^2+x}{x^2}\quad$ con $x \neq 0$ y $x \neq -1$:

   $\dfrac{x}{x+1} \cdot \dfrac{x(x+1)}{x^2} = \dfrac{x^2(x+1)}{x^2(x+1)} = 1$

---

6. Escriba el conjunto solución de $\quad x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$.

   $\Delta = 3 + 4 = 7$ por lo tanto $S = \left\{ \dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}, \dfrac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2} \right\}$

---

7. Escriba el conjunto solución de $\quad (x-7)^3(x^3-7) = 0$.

   $S = \{7, \sqrt[3]{7}\}$

---

8. Escriba la expresión correspondiente al discriminante de $\quad x^2 - 3x + 4v = 0\quad$ para una constante positiva v:

   $\Delta = 9 - 16v$

---

9. Escriba el conjunto solución de $\quad |x| - 2 = 2$.

   $|x| = 4$ entonces $S = \{4, -4\}$

---

10. Indique un posible valor de c para el cual la ecuación $\quad |x| + c = 0\quad$ tiene solución.

$|x| = -c$ entonces debe cumplirse que $-c \geqslant 0$ es decir $c \leqslant 0$.

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Escuela de Matemática

Proyecto Matemática para la Enseñanza Media (MATEM)

Primer examen parcial

Pre-Cálculo
Modalidad bianual

Sábado 20 de mayo de 2017

Nombre: ____

Código: ________________________

Colegio: ____

III Parte. Desarrollo. Total: 20 puntos

A continuación se le presentan 4 ejercicios. Resuélvalos en forma clara, correcta y ordenada. Deben aparecer todos los procedimientos necesarios para resolver cada uno de ellos.

1. Racionalice el denominador de la siguiente expresión y simplifique el resultado al máximo: 4 puntos

$$\frac{k^2-1}{\sqrt{k^2-3k}-2}$$

Solución:

$$\frac{(k+1)(k-1)}{\sqrt{k^2-3k}-2} \cdot \frac{\sqrt{k^2-3k}+2}{\sqrt{k^2-3k}+2} = \frac{(k+1)(k-1)(\sqrt{k^2-3k}+2)}{k^2-3k-4}$$

$$= \frac{(k+1)(k-1)(\sqrt{k^2-3k}+2)}{(k-4)(k+1)} = \frac{(k-1)(\sqrt{k^2-3k}+2)}{k-4}$$

2. Resuelva la siguiente operación de fracciones. Simplifique el resultado al máximo. 6 puntos

$$\frac{3x+5}{x^2-25} + \frac{3-x}{5x+x^2} - \frac{2}{x-5}$$

Solución:

$$\frac{3x+5}{(x-5)(x+5)} + \frac{3-x}{x(x+5)} - \frac{2}{x-5}$$

$$= \frac{x(3x+5)}{x(x-5)(x+5)} + \frac{(3-x)(x-5)}{x(x+5)(x-5)} - \frac{2x(x+5)}{(x-5)x(x+5)}$$

$$= \frac{3x^2+5x+3x-15-x^2+5x-2x^2-10x}{x(x-5)(x+5)}$$

$$= \frac{3x-15}{x(x-5)(x+5)}$$

$$= \frac{3(x-5)}{x(x-5)(x+5)}$$

$$= \frac{3}{x(x+5)}$$

3. Las medidas del largo y ancho de un rectángulo, en centímetros, son números enteros. Lo que mide el largo es el triple del antecesor de lo que mide del ancho. Determine la medida del largo si la diagonal del cuadrilátero mide 13 cm. 6 puntos

   Solución:

   Si x representa la medida del ancho entonces la del largo es $3(x-1)$.

   Por el teorema de Pitágoras se tiene que $13^2 = x^2 + 9(x-1)^2$

   Al resolver la ecuación se tiene:

   $169 = x^2 + 9(x^2 - 2x + 1)$

   $0 = x^2 + 9x^2 - 18x + 9 - 169$

   $0 = 10x^2 - 18x - 160$

   $0 = 5x^2 - 9x - 80$

   $0 = (5x + 16)(x - 5)$

   Por lo tanto $x = 5$ y el largo mide 12 cm.

4. Determine las soluciones reales de la ecuación $3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 10x - 4 = 0$ 4 puntos

   Solución

   Un cero del polinomio $3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 10x - 4 = 0$ es -2.

   Al dividir $3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 10x - 4$ por $x + 2$ se obtiene $3x^3 - x^2 + 6x - 2$ el cual se puede factorizar de la siguiente manera:

   $3x^3 - x^2 + 6x - 2 = x^2(3x - 1) + 2(3x - 1) = (3x - 1)(x^2 + 2)$

   Por lo tanto las únicas soluciones reales de la ecuación son $x = -2$ y $x = \dfrac{1}{3}$.