Universidad de Costa Rica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

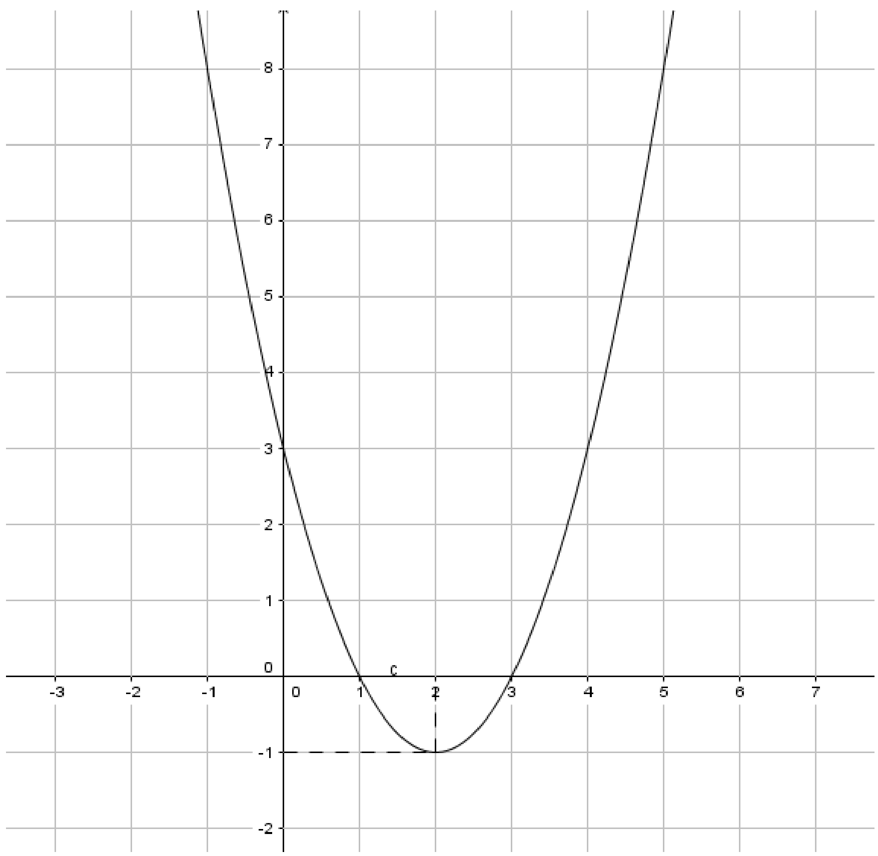
CÁLCULO

18 de junio de 2016

INSTRUCCIONES GENERALES:

- Lea cuidadosamente, cada instrucción y pregunta, antes de contestar.
- Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra indeleble para resolver este examen.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **respuesta o procedimiento** está **desordenado**, **este no se calificará.**
- Recuerde que sólo puede utilizar calculadora que únicamente efectúe las operaciones básicas. No se permite el uso de calculadora científica.
- La prueba debe resolverse individualmente.
- **Este examen consta de dos partes: respuesta breve y desarrollo, para un total de 52 puntos.**
- **El tiempo máximo disponible para resolver la prueba es de tres horas**.

I Parte. Respuesta Breve. Considere la siguiente gráfica de la función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f'(x)$. Escriba en el espacio indicado lo que se le solicita. (5 puntos, 1 punto cada respuesta correcta)



1. El conjunto solución de $f''(x) > 0$: _______________

2. Un intervalo en el cual f es estrictamente creciente: _______________

3. Un intervalo en el cual f es cóncava hacia abajo: _______________

4. Un valor a tal que $f(a)$ es un máximo relativo de f: $a =$____________

5. Un valor b tal que $(b, f(b))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f: $b =$____________

II Parte. Desarrollo. Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. (5 puntos) Considere la curva definida por $x^4 + y^4 + 2 = 4xy^3$. Verifique que la recta tangente a esa curva en el punto $(-1, -1)$ es paralela al eje de las abscisas (eje X).

2. Si $y = f(x)$ determine y' en cada caso:

    a. (4 puntos) $y = (x+1)^{\tan x}$ con $x > -1$.

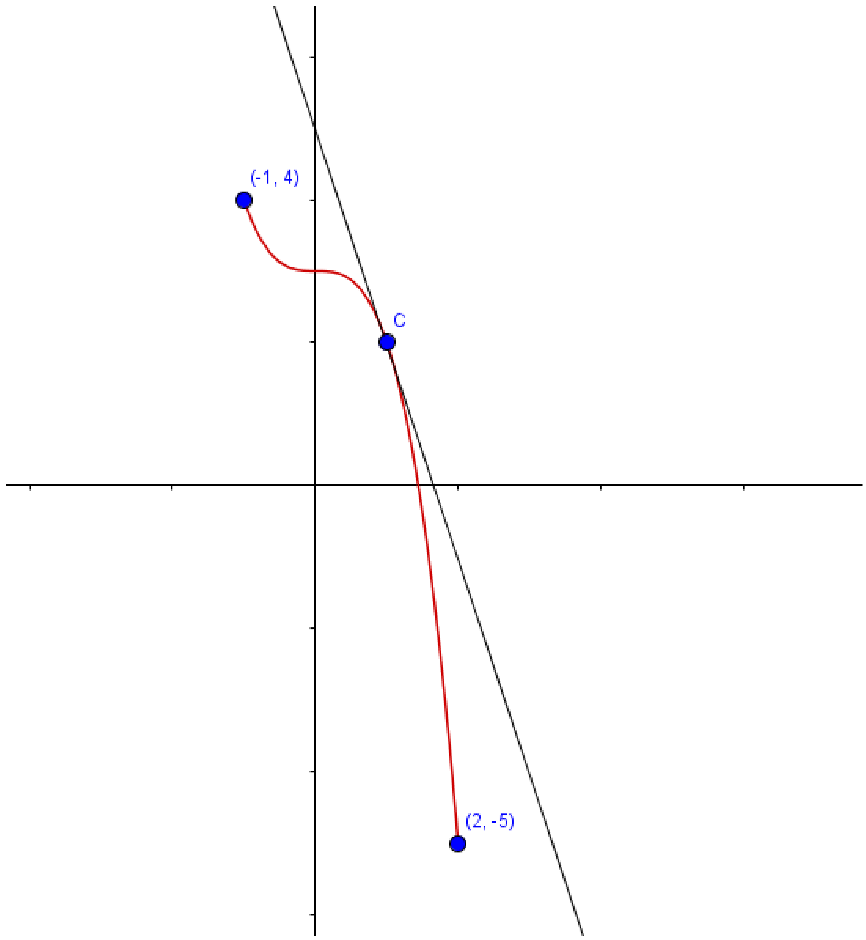
    b. (6 puntos) $y = \frac{\arctan(2^x + \log x)}{\arccos(e^x)}$

3. Calcule los siguientes límites:

    a. (5 puntos) $\lim_{x \to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$

    b. (6 puntos) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$

4. (3 puntos) Considere la siguiente gráfica de la función f para la cual se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor Medio. En este caso, el número cuya existencia garantiza la conclusión de este teorema es 1. Enuncie las hipótesis del teorema del Valor Medio y determine la pendiente de la recta tangente a esta curva en $C(1,2)$.



5. Resuelva los siguientes problemas:

a. (4 puntos) La medida de uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo disminuye a razón de $\frac{\pi}{36}\,\frac{rad}{s}$. La hipotenusa es constante y mide 20 cm. Calcule con qué rapidez cambia la medida del cateto opuesto a ese ángulo cuando este mide $\frac{\pi}{3}$ rad.

b. (7 puntos) El área de un rectángulo es 8 cm^2. Se desea trazar un segmento cuyos extremos sean un vértice y el punto medio de uno de los lados que no contienen a dicho vértice. ¿Cuál es la longitud mínima posible de dicho segmento?

6. Considere la función f definida en su dominio máximo con criterio $f(x) = \frac{x^2-x+4}{x-1}$.

a. (2 puntos) Determine la ecuación de la asíntota oblicua de la gráfica de f .

b. (5 puntos)Trace la gráfica de f tomando en cuenta la siguiente información:

   i. La única intersección de la gráfica de f con los ejes es el punto $(0, -4)$
   ii. La recta de ecuación $x = 1$ es asíntota vertical de la gráfica de f .
   iii. El conjunto solución de $f'(x) < 0$ es $]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$
   iv. El conjunto solución de $f''(x) < 0$ es $]-\infty, 1[$
   v. $f(-1) = -3$ y $f(3) = 5$