INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA

SOLUCIÓN
Segundo examen parcial
Pre-Cálculo
Modalidad anual

SÁBADO 17 DE JUNIO DE 2017

I Parte. Selección Única. Valor: 24 puntos

A continuación se le presentan 24 enunciados, cada uno con cuatro opciones de respuesta de las cuales solo una es correcta. Seleccione la opción que completa de forma correcta cada enunciado y márquela en la hoja de respuestas.

1. Una solución de la inecuación $x - x\sqrt{3} < 2 - 2\sqrt{3}$ es

   a) -2

   b) 0

   c) 2

   d) 4

   $x - x\sqrt{3} < 2 - 2\sqrt{3}$
   $x(1-\sqrt{3}) < 2(1-\sqrt{3})$
   $x > 2$
   Respuesta: d).

2. El conjunto solución de $(x-2)(4-x)(x^2+1) > 0$ corresponde a

   a) $]2,4[$

   b) $]-4,-2[$

   c) $\mathbb{R}-]2,4[$

   d) $]-\infty,2[\cup]4,+\infty[$

$(x-2)(4-x)(x^2+1)>0$ es equivalente a $(x-2)(4-x)>0$ pues x^2+1 es positivo para cualquier valor de x. La gráfica de $y=(x-2)(4-x)$ es una parábola cóncva hacia abajo que interseca al eje X en 2 y 4, por lo tanto $y>0$ en $]2,4[$. La respuesta es a).

3. El conjunto solución de $x^3-3x^2 \leqslant 4x-12$ corresponde a

   a) $[-2,2]$

   b) $[3,+\infty[$

   c) $[-2,2] \cup [3,+\infty[$

   d) $]-\infty,-2] \cup [2,3]$

   $x^3-3x^2 \leqslant 4x-12$
   $x^2(x-3) \leqslant 4(x-3)$
   $x^2(x-3)-4(x-3) \leqslant 0$
   $(x^2-4)(x-3) \leqslant 0$
   $(x-2)(x+2)(x-3) \leqslant 0$
   La respuesta es d).

4. La inecuación $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}<\frac{2x}{x^2-1}$ es equivalente a

   a) $\dfrac{3-x}{x^2-1}<0$

   b) $\dfrac{1-x}{x^2-1}<0$

   c) $1-x<0$

   d) $3-x<0$

   $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}<\frac{2x}{x^2-1}$
   $\frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{2x}{(x+1)(x-1)}<0$
   $\frac{2x+2-x+1-2x)}{(x-1)(x+1)}<0$
   $\frac{3-x}{(x-1)(x+1)}<0$
   La respuesta es la opción a).

5. El conjunto solución de $\dfrac{x+1}{x-1} < 1$ corresponde a

   a) $\varnothing$

   b) $\{1\}$

   c) $\mathbb{R} - \{1\}$

   d) $]-\infty, 1[$

$$\frac{x+1}{x-1} < 1$$

$$\frac{x+1}{x-1} - 1 <$$

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} < 0$$

$$\frac{x+1-x+1}{x-1} < 0$$

$$\frac{2}{x-1} < 0$$

$$x - 1 < 0$$

$$x < 1$$

La respuesta es la opción d).

6. El conjunto solución de $|x| < 2$ corresponde a

   a) $]-2, 2[$

   b) $]0, 2[$

   c) $]-\infty, 2[$

   d) $]2, +\infty[$

La respuesta es la opción a).

7. Si f es una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales y el codominio es el intervalo $[0, +\infty[$ entonces un posible criterio corresponde a

   a) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$

   b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

   c) $f(x) = \sqrt{x} + 1$

   d) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

   La respuesta es la opción b).

8. Si P representa el perímetro de un cuadrado de área A entonces al expresar el perímetro en función del área se obtiene que $P(A)$ es igual a

   a) $\sqrt{A}$

   b) $4\sqrt{A}$

   c) $\sqrt{4A}$

   d) $\sqrt{\dfrac{A}{4}}$

   Como $A = l^2$ entonces $l = \sqrt{A}$ y como $P = 4l$ se tiene que $P = 4\sqrt{A}$ La respuesta es la opción b).

9. Sean A el conjunto de todos los habitantes de Costa Rica, B el conjunto de todas las letras mayúsculas del abecedario en español y $f : A \to B$, la función que le asigna a cada elemento de A la inicial del primer nombre en B. Considere las siguientes afirmaciones:

   I. Si $f(a_1) = f(a_2)$ entonces a_1 y a_2 son personas con el mismo nombre.

   II. A alguien que se llama Luis Guillermo, la imagen que le corresponde bajo esa función es la letra L.

   III. La función es inyectiva.

   De ellas son verdaderas

   a) solamente II

   b) solamente I

   c) I y III

d) II y III

La respuesta es la opción a). La primera proposición es falsa pues los nombres pueden tener la misma inicial y ser diferentes. No es inyectiva pues por ejemplo A es imagen tanto de Ana como de Andrés.

10. Para la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x-4}{x-2}$ donde A es el dominio máximo, un número que no pertenece al ámbito de f corresponde a

    a) 0

    b) 1

    c) 2

    d) 4

    Como $x - 4$ nunca es igual a $x - 2$ entonces el cociente nunca puede ser igual a 1. La respuesta es la opción b).

11. Considere los siguientes criterios de funciones definidas en su dominio máximo:

$$f(x) = \sqrt{x} + 2$$
$$g(x) = -2 - |x| \; h(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$$

¿Para cuáles de ellas se cumple que la gráfica interseca al eje X?

a) f y h.

b) Solo h.

c) Solo f.

d) Solo g.

$\sqrt{x} + 2$ es siempre mayor o igual que 2 y $-2 - |x|$ es siempre menor o igual que -2, por lo tanto en ninguna de las dos funciones hay preimagen para 0. La gráfica de h contiene al punto $(2, 0)$. La opción correcta es la b).

12. Considere una función f estrictamente creciente y otra función g estrictamente decreciente, ambas definidas en el conjunto de los números reales, tales que $f(4) = g(6) = 0$. Analice las siguientes proposiciones:

    I. $f(5) = g(5)$

    II. $f(0) < g(0)$

    III. $f(7) - g(7) < 0$

    De ellas, con certeza son verdaderas

    a) Solo I

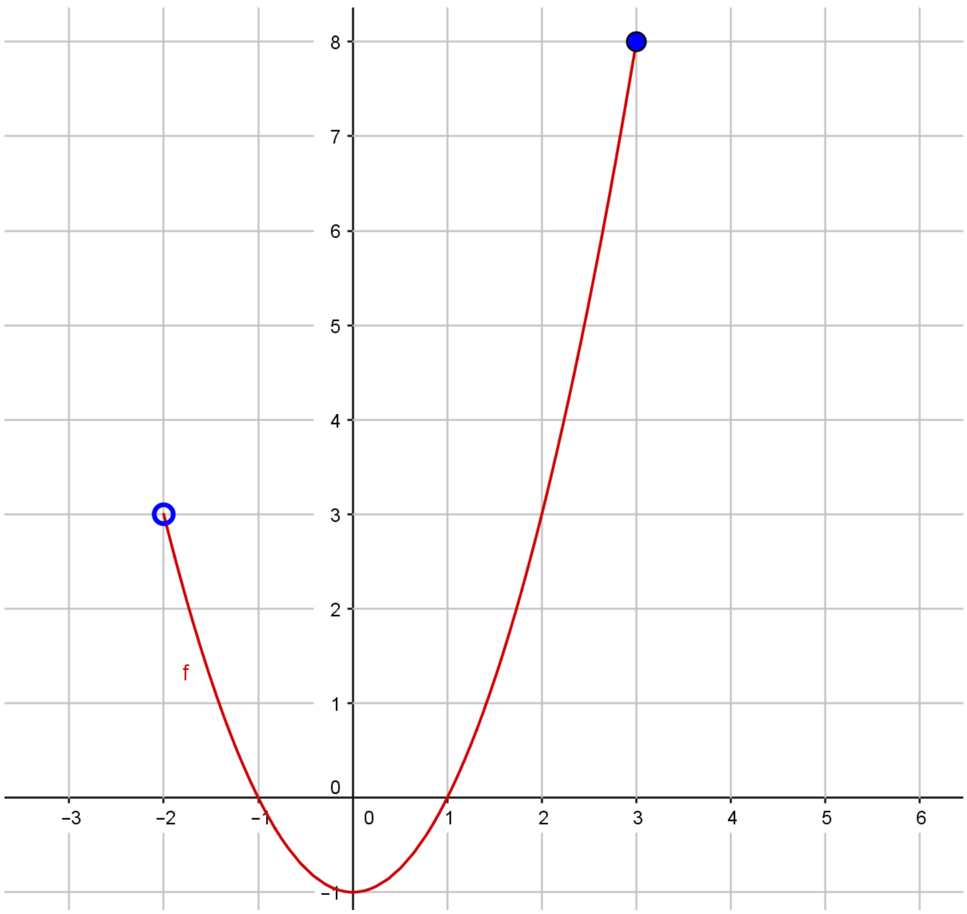
    b) Solo II

    c) Solo III

    d) Solo I y II

    Como f es estrictamente creciente y es igual a 0 en 4, entonces es positiva para los números mayores que 4 y negativa para los menores que 4.
    Como g es estrictamente decreciente y es igual a 0 en 6, entonces es negativa para los números mayores que 6 y positiva para los menores que 6.
    En 5 ambas son positivas pero podrían ser diferentes.
    En 0 f es negativa y g es positiva.
    En 7 f es pisitiva y g es negativa.
    La opción correcta es la b).

13. Considere la gráfica de la función f:



El ámbito de f corresponde a

a) $]-2,3]$

b) $[-1,8]$

c) $[-1,3[$

d) $[-1,8]-\{3\}$

La respuesta es la opción b).

14. Si $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función tal que su ámbito es el conjunto de los números reales y su gráfica interseca al eje X en dos puntos, entonces se puede asegurar que g

    a) es inyectiva pero no es sobreyectiva.

    b) es sobreyectiva pero no es inyectiva.

    c) no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

    d) es inyectiva y sobreyectiva.

La opción correcta es la b).

15. Sean f y g dos funciones definidas para todos los números reales tales que $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+1}$ y $g(x) = x - 2$ si se sabe que $g(f(a)) = 0$ entonces un posible valor para a es

   a) $\dfrac{2}{5}$

   b) -2

   c) 2

   d) 0

   $f(a) = \dfrac{5a}{a^2+1}$ entonces $g(f(a)) = \dfrac{5a}{a^2+1} - 2$

   $\dfrac{5a}{a^2+1} - 2 = 0$

   $\dfrac{5a}{a^2+1} = 2$

   $5a = 2a^2 + 2$

   $0 = 2a^2 - 5a + 2$

   $0 = (2a-1)(a-2)$

   La respuesta es la opción c).

16. Sean f y g dos funciones definidas en su dominio máximo, con $f(x) = \dfrac{5x}{x-1}$ y $g(x) = x^2 - 1$. El dominio de la función fg corresponde a

   a) $\mathbb{R}$

   b) $\mathbb{R} - \{1\}$

   c) $\mathbb{R} - \{-1\}$

   d) $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

   El dominio de la función fg es la intersección de los dominios de f y g: $\mathbb{R} - \{1\}$ y $\mathbb{R}$. Por lo tanto la opción correcta es la b).

17. Considere las siguientes afirmaciones sobre la gráfica de una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = kx$ para una constante k:

   I. Contiene al origen del sistema de coordenadas.
   II. Es una recta creciente.
   III. $g(k) = g(-k)$

   De ellas, con certeza son verdaderas

   a) I y II

   b) I y III

   c) solamente I

   d) solamente II

   $g(x) = 0$ para cualquier valor de k pero la recta es creciente solo si $k > 0$. La opción correcta es la c).

18. Si el dominio de una función definida por $p(x) = -2x-1$ es $]-2, 1]$ entonces su ámbito corresponde a

   a) $]-3, 3]$

   b) $[-3, 3[$

   c) $]-1, \frac{1}{2}]$

d) $[-1, \frac{1}{2}[$

Como $p(1) = -3$ y cuando $x = -2$ entonces $-2x - 1 = 3$ se tiene que la opcióncorrecta es la b).

19. El costo, en miles de colones, de producir q decenas de cierto artículo está dado por $C(q) = 25+35q$. Si se han gastado 375 000 colones es porque se han producido

    a) 10 unidades

    b) 100 unidades

    c) 10 285 unidades

    d) 12 625 unidades

    $C(q) = 25 + 35q$
    $375 = 25 + 35q$
    $350 = 35q$
    $10 = q$
    Como 10 decenas son 100 unidades, la opción correcta es la b).

20. Considere las siguientes relaciones:

    I. El área de un círculo en función de su diámetro.
    II. La suma del sucesor y el antecesor de un número x en función de ese número x.
    III. El volumen de un cubo en función de la medida de su arista.

    ¿Cuáles de ellas corresponden a funciones cuadráticas?

    a) I y II

    b) I y III

    c) solamente I

    d) solamente II

    $A(d) = \pi(\frac{d}{2})^2 = \frac{\pi d^2}{4}$
    $S(x) = x + 1 + x - 1 = 2x$
    $V(a) = a^3$ es cúbica. La respuesta es la opción c).

21. Si el dominio de la función definida por $f(x) = x^2 - 4x - 2$ es $\mathbb{R}$, entonces el ámbito corresponde a

   a) $\mathbb{R}$

   b) $[-6, 2]$

   c) $[-6, +\infty[$

   d) $[2, +\infty[$

   Como el vértice de la parábola es el punto de coordeadas $(2, -6)$ y además es cóncava hacia arriba entonces la opción correcta es la c).

22. Si el dominio de la función definida por $f(x) = -x^2 + 4x$ es $]1, 3[$, entonces el ámbito corresponde a

   a) $\mathbb{R} - \{3\}$

   b) $\{3\}$

   c) $[2, 3[$

   d) $]3, 4]$

   $f(1) = 3,\ f(3) = 3$ y el vértice es el punto $(2, 4)$ entonces la opción correcta es la d).

23. La función definida en su dominio máximo por $f(x) = -x^2 + 4x$ es creciente en el intervalo

   a) $]-\infty, 2[$

   b) $]2, +\infty[$

   c) $]-\infty, 4[$

   d) $]-4, +\infty[$

   La gráfica es una parábola cóncava hacia abajo cuyo eje de simetría es la recta de ecuación $x = 2$, por lo tanto la opción correcta es la a).

24. Si la función cuadrática f es creciente en $]-\infty, 3[$ y el vértice de la gráfica es el punto de coordenadas $(3, -5)$ entonces la función es

    a) cóncava hacia abajo y no interseca al eje X

    b) cóncava hacia arriba y no interseca al eje X

    c) cóncava hacia arriba e interseca al eje X en dos puntos

    d) cóncava hacia abajo e interseca al eje X en dos puntos

    La opción correcta es la a).

II Parte. Respuesta corta. Valor: 16 puntos.

Instrucciones: Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios y escriba lo que se solicita en el espacio brindado en cada uno de ellos.

1. Indique el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

    a) $\dfrac{x-2}{x} > 0$

    $S =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

    b) $\dfrac{-x^2-2}{x^2+x+1} < 0$

    $S = \mathbb{R}$

    c) $|x| > 3$

    $S =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$

2. Determine la preimagen de 4 bajo la función definida por $h(x) = \sqrt{x+5} + 3$

    $4 = \sqrt{x+5} + 3$

    $1 = \sqrt{x+5}$
    $1 = x + 5$
    $-4 = x$

3. Determine el punto de intersección de la gráfica de $f(x) = x^2 - x - 2$ con el eje X si el dominio es $\mathbb{R}^-$.
 $0 = x^2 - x - 2$

 $0 = (x-2)(x+1)$
 $x = -1$
 El punto de intersección es $(-1, 0)$

---

4. Determine el dominio máximo de una función cuyo criterio es $f(x) = \sqrt{12 - 4x}$.

 $0 \leqslant 12 - 4x$
 $4x \leqslant 12$
 $x \leqslant 3$
 $D =]-\infty, 3]$

---

5. Si f es una función inyectiva tal que $f(4) = f(a+3) = 5$ entonces ¿cuál es el valor de a? Por ser

 inyectiva entonces se debe cumplir que $a + 3 = 4$ por lo que $a = 1$.

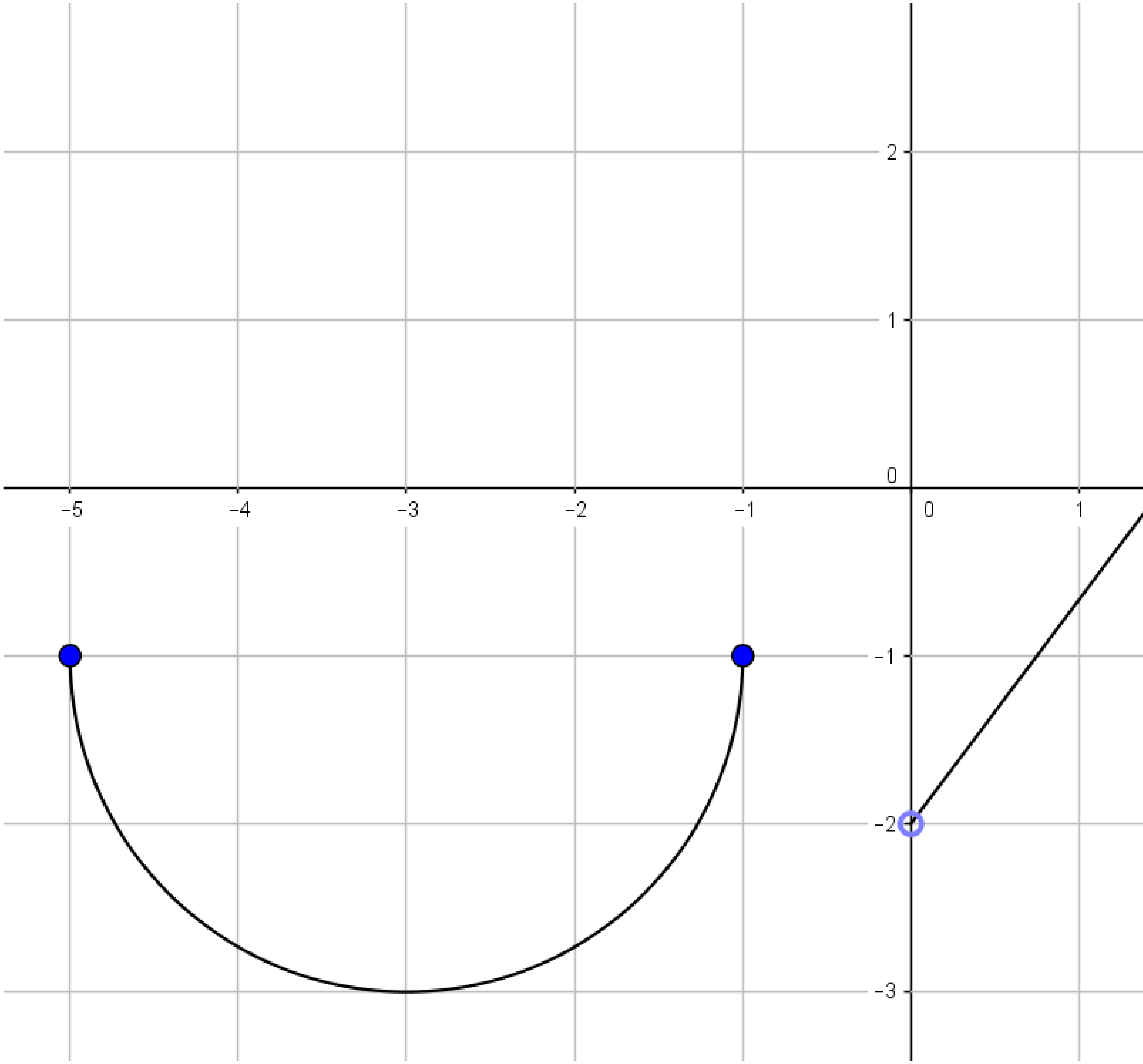
---

6. Si $f(x) = 4x - 1$ ¿cuál es el criterio de fof?

 $(fof)(x) = 4(4x-1) - 1 = 16x - 5$

---

7. De acuerdo con la siguiente gráfica de la función f indique lo que se le solicita:



a. Dominio: $[-5,-1] \cup]0,3]$

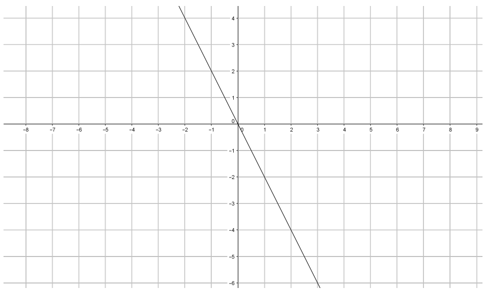
b. Menor preimagen de -1: -5

c. Cantidad de preimágenes de -2: 2

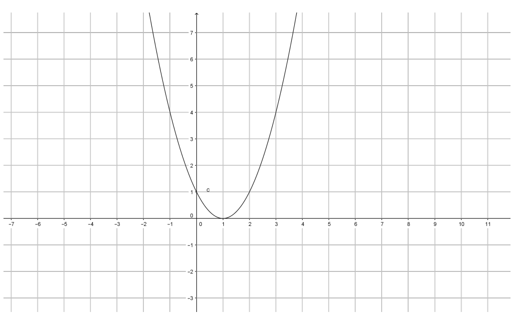
d. Ámbito: $[-3, 2]$

e. Intervalo donde es decreciente: Cualquier intervalo que sea subconjunto de $[-5, -3]$.

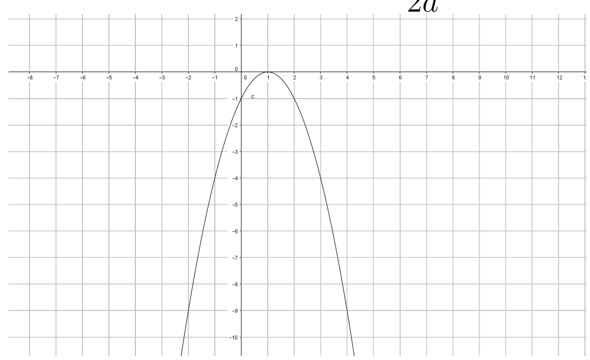
8. Trace la gráfica de $r(x) = -2x$, si el dominio es $\mathbb{R}$



9. Trace la gráfica de una función $g(x) = ax^2 + bx + c$, si el dominio es $\mathbb{R}$, $\dfrac{-b}{2a} = 1$ y $b^2 - 4ac = 0$.

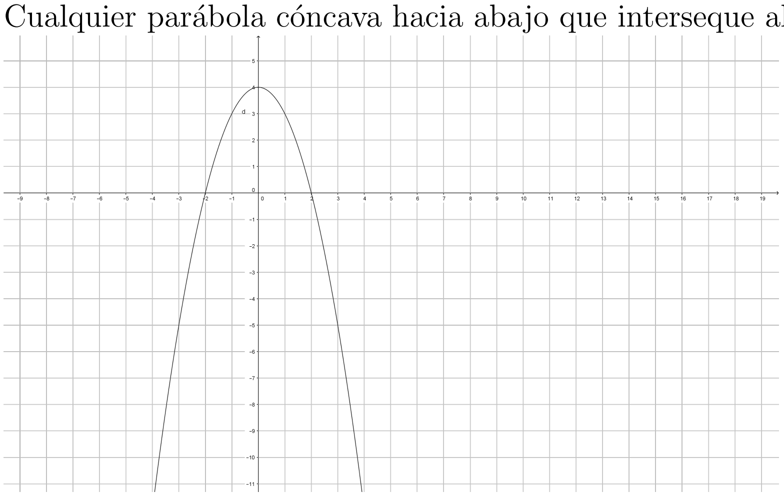


o bien



10. Trace la gráfica de una función $k(x) = ax^2 + bx + c$, si el dominio es $\mathbb{R}$, $a < 0$ y $c > 0$.

Cualquier parábola cóncava hacia abajo que interseque al eje Y en un valor positivo.



III Parte. Desarrollo. Total: 20 puntos

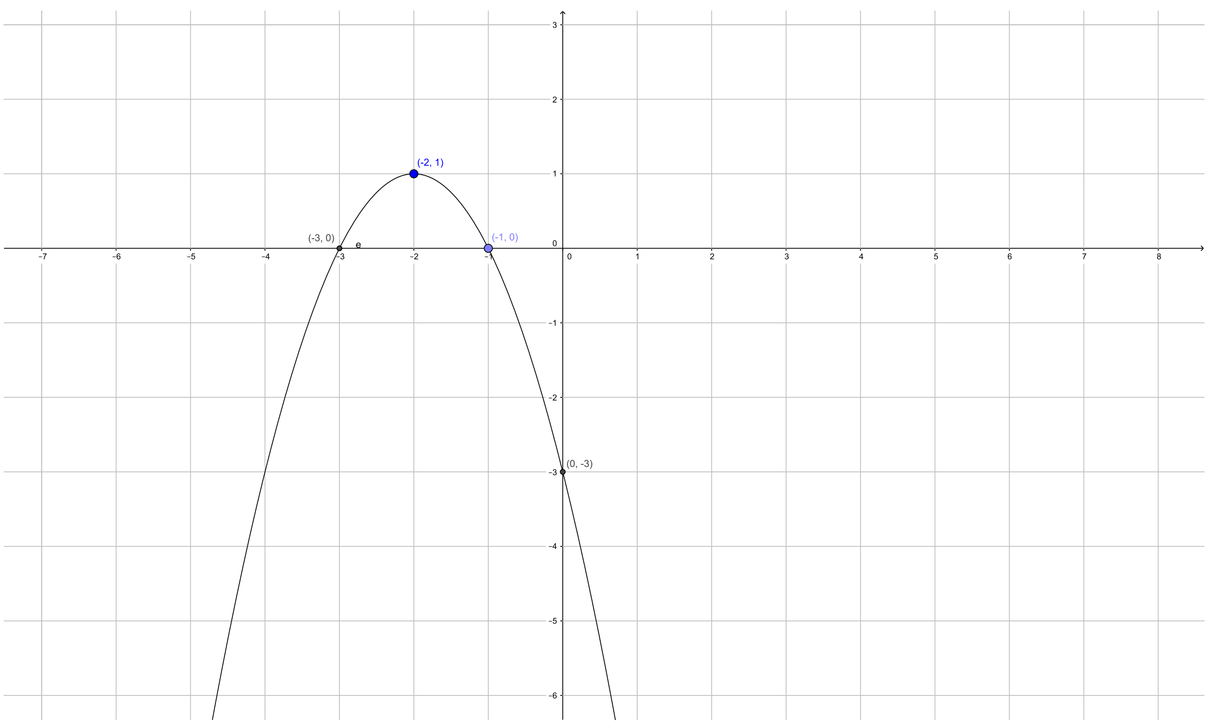
A continuación se le presentan 4 ejercicios. Resuélvalos en forma clara, correcta y ordenada. Deben aparecer todos los procedimientos necesarios para resolver cada uno de ellos.

1. Determine el conjunto solución de $(x^2-x)^2-(x^2-x)-2\leqslant 0$ 5 puntos

$(x^2-x)^2-(x^2-x)-2\leqslant 0$
$(x^2-x-2)(x^2-x+1)\leqslant 0$
$(x-2)(x+1)(x^2-x+1)\leqslant 0$
$(x-2)(x+1)\leqslant 0$

$S=[-1,2]$

2. Haga un bosquejo de la gráfica de la función $f(x)=-(x+2)^2+1$, si su dominio es $\mathbb{R}$. Señale las intersecciones con los ejes y el vértice. 5 puntos



3. Determine el dominio máximo de la función definida por $h(x) = \sqrt{\frac{x}{x-3} - 4}$ 5 puntos

$$
\begin{aligned}
&0 \leqslant \frac{x}{x-3} - 4 \\
&0 \leqslant \frac{x}{x-3} - \frac{4(x-3)}{x-3} \\
&0 \leqslant \frac{x-4x+12}{x-3} \\
&0 \leqslant \frac{-3x+12}{x-3} \\
&0 \leqslant \frac{-3(x-4)}{x-3} \\
&\frac{x-4}{x-3} \leqslant 0
\end{aligned}
$$

$D = [3, 4]$

4. Un proyectil es lanzado hacia arriba desde el suelo. Después de t segundos la altura a la que se encuentra está dada por $h(t) = 24t - \frac{9}{2}t^2$. Derermine la altura máxima que alcanza el proyectil, el tiempo que tarda en alcanzarla y la cantidad de segundos que deben transcurrir para que toque el suelo nuevamente. 5 puntos

Vértice: $(\frac{8}{3}, 32)$

Intersecciones con eje X: $(0, 0)$ y $(\frac{16}{3}, 0)$

Por lo tanto la altura máxima que alcanza el proyectil es de 32 y tarda $\frac{8}{3}$s en alcanzarla. Además, vuelve a tocar el suelo a los $\frac{16}{3}$s.