Instituto Tecnológico de Costa Rica

Segundo examen parcial
Pre-Cálculo
Modalidad anual - Undécimo año
SOLUCIÓN

Sábado 17 de junio de 2017

Instrucciones Generales:

I Parte. Selección Única. Valor: 20 puntos

A continuación se le presentan 20 enunciados, cada uno con cuatro opciones de respuesta de las cuales solo una es correcta. Seleccione la opción que completa de forma correcta cada enunciado y márquela en la hoja de respuestas.

1. Una solución de la inecuación $x - x\sqrt{3} < 2 - 2\sqrt{3}$ es

   a) -2

   b) 0

   c) 2

   d) 4

   $x - x\sqrt{3} < 2 - 2\sqrt{3}$
   $x(1-\sqrt{3}) < 2(1-\sqrt{3})$
   $x > 2$
   Respuesta: d).

2. El conjunto solución de $-x^2 + 4x + 5 < 0$ es

   a) $]-1, 5[$

   b) $]-5, 1[$

   c) $]-\infty, -1[\cup]5, +\infty[$

   d) $]-\infty, -5[\cup]1, +\infty[$

   $-x^2 + 4x + 5 < 0$
   $x^2 - 4x - 5 > 0$
   $(x-5)(x+1)$
   $y = x^2 - 4x - 5$ es la ecuación de una parábola cóncava hacia arriba que interseca al eje X en -1 y 5. La opción correcta es la c).

3. El conjunto solución de $(2x+1)^2 > 0$ corresponde a

   a) $\varnothing$

   b) $\{-\frac{1}{2}\}$

   c) $\mathbb{R}$

   d) $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$

   $(2x+1)^2$ es positivo para cualquier número real diferente de $-\frac{1}{2}$ por lo que la respuesta es la opción d).

4. El conjunto solución de $(x-2)(4-x)(x^2+1) > 0$ corresponde a

   a) $]2,4[$

   b) $]-4,-2[$

   c) $\mathbb{R}-]2,4[$

   d) $]-\infty,2[\cup]4,+\infty[$

$(x-2)(4-x)(x^2+1) > 0$ es equivalente a $(x-2)(4-x) > 0$ pues x^2+1 es positivo para cualquier valor de x. La gráfica de $y = (x-2)(4-x)$ es una parábola cóncva hacia abajo que interseca al eje X en 2 y 4, por lo tanto $y > 0$ en $]2,4[$. La respuesta es a).

5. El conjunto solución de $x^3 - 3x^2 \leqslant 4x - 12$ corresponde a

   a) $[-2,2]$

   b) $[3,+\infty[$

   c) $[-2,2] \cup [3,+\infty[$

   d) $]-\infty,-2] \cup [2,3]$

$x^3 - 3x^2 \leqslant 4x - 12$
$x^2(x-3) \leqslant 4(x-3)$
$x^2(x-3) - 4(x-3) \leqslant 0$
$(x^2-4)(x-3) \leqslant 0$
$(x-2)(x+2)(x-3) \leqslant 0$
La respuesta es d).

6. La inecuación $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} < \frac{2x}{x^2-1}$ es equivalente a

   a) $\dfrac{3-x}{x^2-1} < 0$

   b) $\dfrac{1-x}{x^2-1} < 0$

   c) $1 - x < 0$

   d) $3 - x < 0$

$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} < \frac{2x}{x^2-1}$
$\frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{2x}{(x+1)(x-1)} < 0$

$\frac{2x+2-x+1-2x)}{(x-1)(x+1)} < 0$

$\frac{3-x}{(x-1)(x+1)} < 0$

La respuesta es la opción a).

7. El conjunto solución de $\dfrac{x+1}{x-1} < 1$ corresponde a

   a) $\varnothing$

   b) $\{1\}$

   c) $\mathbb{R} - \{1\}$

   d) $]-\infty, 1[$

$\dfrac{x+1}{x-1} < 1$
$\dfrac{x+1}{x-1} - 1 <$

$\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x-1} < 0$

$\dfrac{x+1-x+1}{x-1} < 0$

$\dfrac{2}{x-1} < 0$

$x - 1 < 0$

$x < 1$

La respuesta es la opción d).

8. El conjunto solución de $|x| < 2$ corresponde a

   a) $]-2, 2[$

   b) $]0, 2[$

   c) $]-\infty, 2[$

   d) $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

   La respuesta es la opción a).

9. Considere la siguientes inecuaciones:

   I. $|x-2| \leqslant 0$

   II. $|x-2| \leqslant -2$

   III. $|x-2| \geqslant 2$

   De ellas, tienen conjunto solución no vacío:

   a) I y II.

   b) I y III.

   c) II y III

   d) I, II y III.

   La primera proposición se cumple para $x = 2$. La segunda es falsa para cualquier número real. La tercera tiene infinitas soluciones (números mayores o iguales que 2, o, menores o iguales que -2) Por lo tanto la respuesta es la opción c).

10. Considere la siguientes inecuaciones:

    I. $x^3 \leqslant 8$

    II. $x^2 \leqslant 4$

    III. $-x \leqslant -2$

    De ellas, tienen como conjunto solución al intervalo $]-\infty, 2]$

    a) solamente II.

b) solamente I.

c) I y III.

d) I y II

$x^3 \leqslant 8$ es equivalente a $x < 2$ por lo tanto su conjunto solución es $]-\infty, 2]$.
$x^2 \leqslant 4$ es equivalente a $|x| < 2$ por lo tanto su conjunto solución es $]-\infty, 2] \cup]2, +\infty[$.
$-x \leqslant -2$ es equivante a $2 \leqslant x$ por lo que su conjunto solución más bien es $[2, +\infty[$ La respuesta es la opción b).

11. Si f es una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales y el codominio es el intervalo $[0, +\infty[$ entonces un posible criterio corresponde a

    a) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$

    b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

    c) $f(x) = \sqrt{x} + 1$

    d) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

    La respuesta es la opción b).

12. Si P representa el perímetro de un cuadrado de área A entonces al expresar el perímetro en función del área se obtiene que $P(A) =$

    a) $\sqrt{A}$

    b) $4\sqrt{A}$

    c) $\sqrt{4A}$

    d) $\sqrt{\dfrac{A}{4}}$

    Como $A = l^2$ entonces $l = \sqrt{A}$ y como $P = 4l$ se tiene que $P = 4\sqrt{A}$ La respuesta es la opción b).

13. Considere los siguientes criterios de funciones definidas en su dominio máximo:

$$f(x) = \sqrt{x} + 2$$
$$g(x) = -2 - |x|$$

¿Para cuáles de ellas se cumple que la gráfica interseca al eje X?

a) Ninguna.

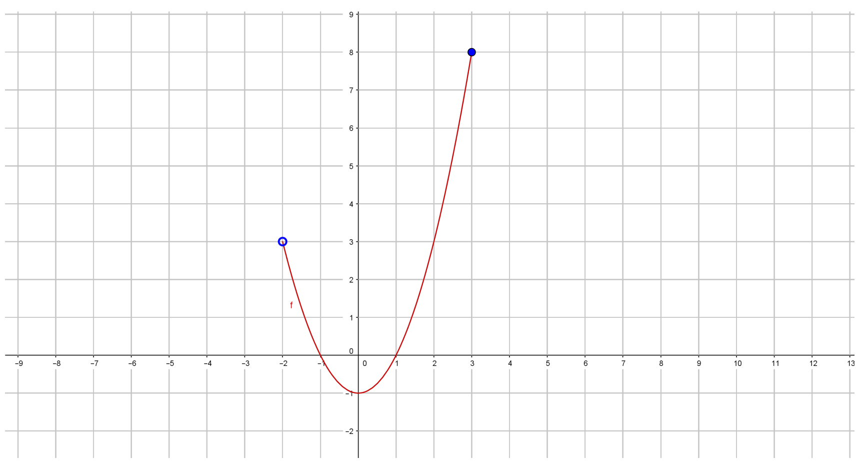
b) Ambas.

c) Solo f.

d) Solo g.

$\sqrt{x}+2$ es siempre mayor o igual que 2 y $-2-|x|$ es siempre menor o igual que -2, por lo tanto en ninguna de las dos funciones hay preimagen para 0. La opción correcta es la a).

14. Considere la gráfica de la función f:



El ámbito de f corresponde a

a) $]-2,3]$

b) $[-1,8]$

c) $[-1,3[$

d) $[-1,8]-\{3\}$

La respuesta es la opción b).

15. Si $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función tal que su ámbito es el conjunto de los números reales y su gráfica interseca al eje X en dos puntos, entonces se puede asegurar que g

a) es inyectiva pero no es sobreyectiva.

b) es sobreyectiva pero no es inyectiva.

c) no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

d) es inyectiva y sobreyectiva.

La opción correcta es la b).

16. Si f es una función biyectiva con $f(x) = 2^{x-2} + 3$ entonces $f^{-1}(x) =$

    a) $\log(x - 3) + 2$

    b) $\log(x + 2) - 3$

    c) $\log_2(x + 2) - 3$

    d) $\log_2(x - 3) + 2$

    $x = 2^{y-2} + 3$
    $x - 3 = 2^{y-2}$
    $log_2(x - 3) = y - 2$
    $log_2(x - 3) + 2 = y$

    La respuesta correcta es la opción d).

17. Si $\log_3(\frac{x}{4}) = -2$ entonces el valor de x corresponde a

    a) 36

    b) $\frac{3}{2}$

    c) -13

    d) $\frac{4}{9}$

$log_3(\dfrac{x}{4}) = -2$
$3^{-2} = \dfrac{x}{4}$
$\dfrac{4}{9} = x$ Respuesta: d)

18. El criterio de una función decreciente corresponde a

    a) $f(x) = \left(\dfrac{41}{7}\right)^{-x}$

    b) $g(x) = (4)^{\dfrac{x}{2}}$

    c) $h(x) = ln(x)$

    d) $k(x) = -log_{0,25}(x)$

    La opción correcta es la a).

19. La asíntota de la gráfica de la función definida por $f(x) = 4^{x-2} + 3$ en su dominio máximo corresponde a

    a) $x = 3$

    b) $x = 2$

    c) $y = 3$

    d) $y = 2$

    La opción correcta es la c).

20. La expresion $ln(x^2 - 4) - ln(x^2 - x - 2)$ es equivalente a

    a) $ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$

    b) $ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)$

c) $ln(x-2)$

d) $ln(x-6)$

$$ln(x^2-4) - ln(x^2-x-2) = ln\frac{(x^2-4)}{(x^2-x-2)} = ln\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x+1)} = ln\frac{x+2}{x+1}$$

Respuesta: opción b).

II Parte. Respuesta corta.

Valor: 16 puntos.

Instrucciones: Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios y escriba lo que se solicita en el espacio brindado en cada uno de ellos.

1. Indique el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{x-2}{x} > 0$

$S =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

b) $\dfrac{-x^2-2}{x^2+x+1} < 0$

$S = \mathbb{R}$

c) $|x| > 3$

$S =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$

d) $x^4 + x^2 > x^2 - 1$

$x^4 + x^2 > x^2 - 1$
$x^4 > -1$
$S = \mathbb{R}$

e) $x^2 - x < 0$

$x^2 - x < 0$
$x(x-1) < 0$
$S =]0, 1[$

---

2. Escriba la preimagen de 4 bajo la función definida por $h(x) = \sqrt{x+5} + 3$
   $4 = \sqrt{x+5} + 3$

   $1 = \sqrt{x+5}$
   $1 = x + 5$
   $-4 = x$

---

3. Escriba el punto de intersección de la gráfica de $f(x) = x^2 - x - 2$ con el eje X si el dominio es $\mathbb{R}^-$.

   $0 = x^2 - x - 2$
   $0 = (x-2)(x+1)$
   $x = -1$
   El punto de intersección es $(-1, 0)$

---

4. Escriba el dominio máximo de una función cuyo criterio es $f(x) = \sqrt{12 - 4x}$.
   $0 \leqslant 12 - 4x$

   $4x \leqslant 12$
   $x \leqslant 3$
   $D =]-\infty, 3]$

---

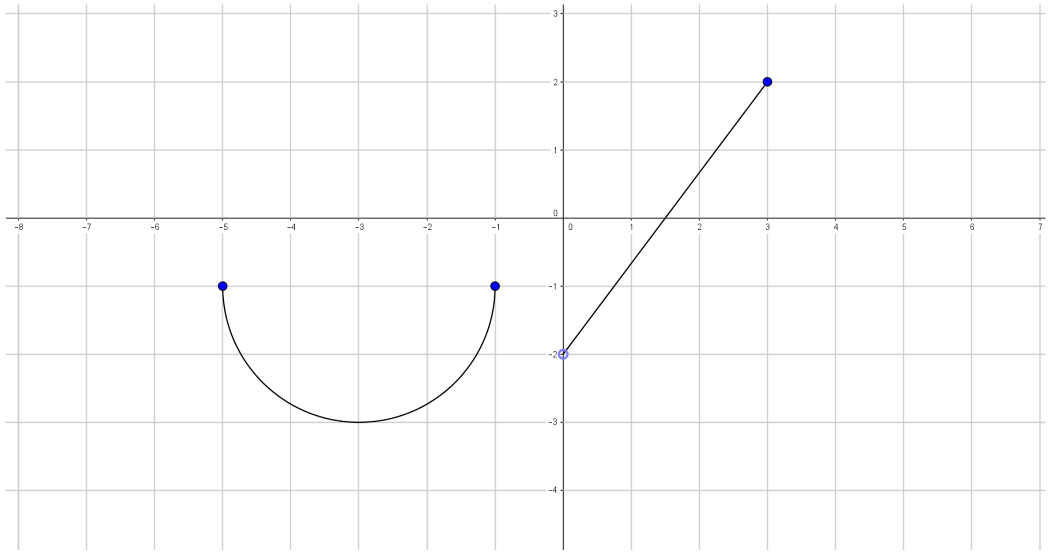
5. Si f es una función inyectiva tal que $f(4) = f(a+3) = 5$ entonces ¿cuál es el valor de a?
   Por ser inyectiva entonces se debe cumplir que $a + 3 = 4$ por lo que $a = 1$.

---

6. Si $f(x) = 4x - 1$ ¿cuál es el criterio de fof?
   $(fof)(x) = 4(4x-1) - 1 = 16x - 5$

---

7. De acuerdo con la siguiente gráfica de la función f indique lo que se le solicita:



   a. Dominio: $[-5,-1] \cup]0,3]$

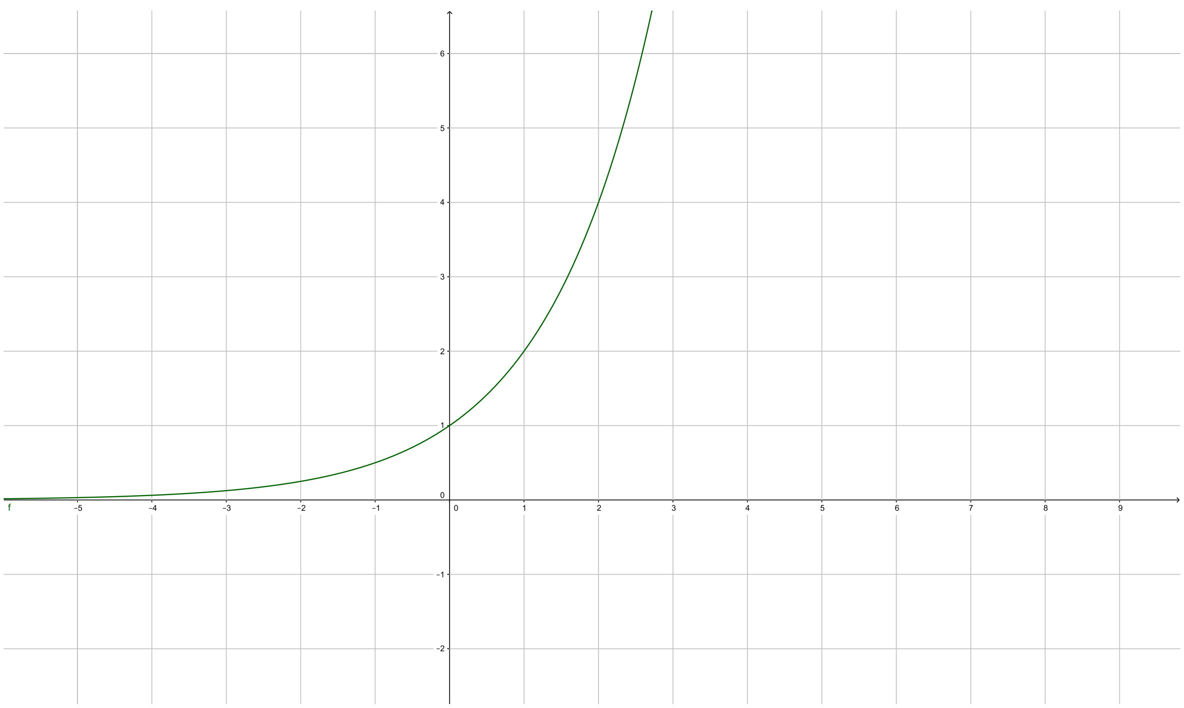
   b. Menor preimagen de -1: -5

   c. Cantidad de preimágenes de -2: 2

   d. Ámbito: $[-3,2]$

   e. Intervalo donde es decreciente: Cualquier intervalo que sea subconjunto de $[-5,-3]$.

8. Trace la gráfica de $r(x) = 2^x$, si el dominio es $\mathbb{R}$



9. Trace la gráfica de una función $g(x) = log_a(x)$, si el dominio es $\mathbb{R}^+$ y $0 < a < 1$.

10. Escriba como un solo logaritmo: $\dfrac{log(3) + log(4)}{log(5)}$

$$\frac{log(3) + log(4)}{log(5)} = \frac{log(12)}{log(5)} = log_5(12)$$

---

11. Escriba como un solo logaritmo: $2ln(x-3) - ln(x)$

$$ln(x-3)^2 - ln(x) = ln\frac{(x-3)^2}{x}$$

---

12. Indique el valor de x para que se cumpla la igualdad $2^{x-1} = log10$

$2^{x-1} = 1$

$2^{x-1} = 2^0$
$x - 1 = 0$
$x = 1$

III Parte. Desarrollo. Total: 20 puntos

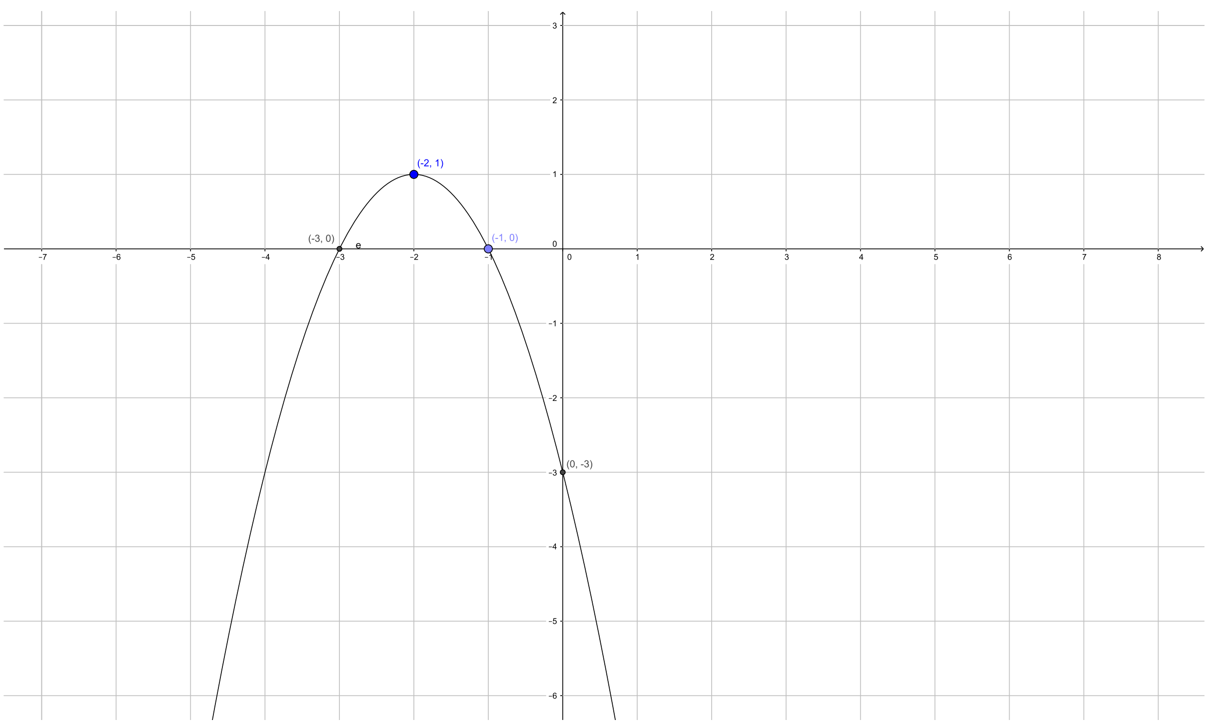
A continuación se le presentan 4 ejercicios. Resuélvalos en forma clara, correcta y ordenada. Deben aparecer todos los procedimientos necesarios para resolver cada uno de ellos.

1. Determine el conjunto solución de $(x^2-x)^2-(x^2-x)-2 \leqslant 0$ 5 puntos

   $(x^2-x)^2-(x^2-x)-2 \leqslant 0$
   $(x^2-x-2)(x^2-x+1) \leqslant 0$
   $(x-2)(x+1)(x^2-x+1) \leqslant 0$
   $(x-2)(x+1) \leqslant 0$

   $S=[-1,2]$

2. Haga un bosquejo de la gráfica de la función $f(x)=-(x+2)^2+1$, si su dominio es $\mathbb{R}$. Señale las intersecciones con los ejes y el vértice. 5 puntos



3. Determine el conjunto solución de:

a) $3^{x+1} = 2^{x-1}$ 4 puntos

$ln3^{x+1} = ln2^{x-1}$
$(x+1)ln3 = (x-1)ln2$
$xln3 + ln3 = xln2 - ln2$
$xln3 - xln2 = -ln3 - ln2$
$x(ln3 - ln2) = -ln3 - ln2$
$$x = \frac{-ln3 - ln2}{ln3 - ln2}$$

b) $log_3[log_2(x^2 - x)] = 0$ 6 puntos

$log_3[log_2(x^2 - x)] = 0$
$log_2(x^2 - x) = 1$
$x^2 - x = 2$
$x^2 - x - 2 = 0$
$(x-2)(x+1) = 0$
$x = 2, x = -1$
$S = \{2, -1\}$