

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA



III Examen Parcial Precálculo anual

SÁBADO 09 DE SETIEMBRE
PERÍODO 2023

TIEMPO MÁXIMO DISPONIBLE: 3 HORAS
VALOR: 50 PUNTOS

Instrucciones Generales:

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y pregunta antes de contestar.
2. Esta es una prueba de 50 puntos que consta de tres partes: selección única (19 puntos), respuesta breve (22 puntos) y de desarrollo (9 puntos).
3. Debe trasladar sus respuestas al folleto de respuestas de selección única y respuesta breve. El desarrollo debe ser resuelto completamente en dicho folleto.
4. Las expresiones algebraicas que se presentan en este examen se asumen **bien definidas en \mathbb{R}** .
5. En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento necesario para obtener su solución.
6. Escriba con bolígrafo de tinta indeleble azul o negra. No proceden reclamos sobre pruebas escritas con lápiz o que presenten alguna alteración.
7. **No** se permite el uso de celulares.
8. Si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
9. La calculadora que puede utilizar es aquella que contiene solo las operaciones básicas.
10. La prueba debe resolverse individualmente.
11. Dispone de **3 horas** para resolver la prueba.

Nombre: _____

Código: _____

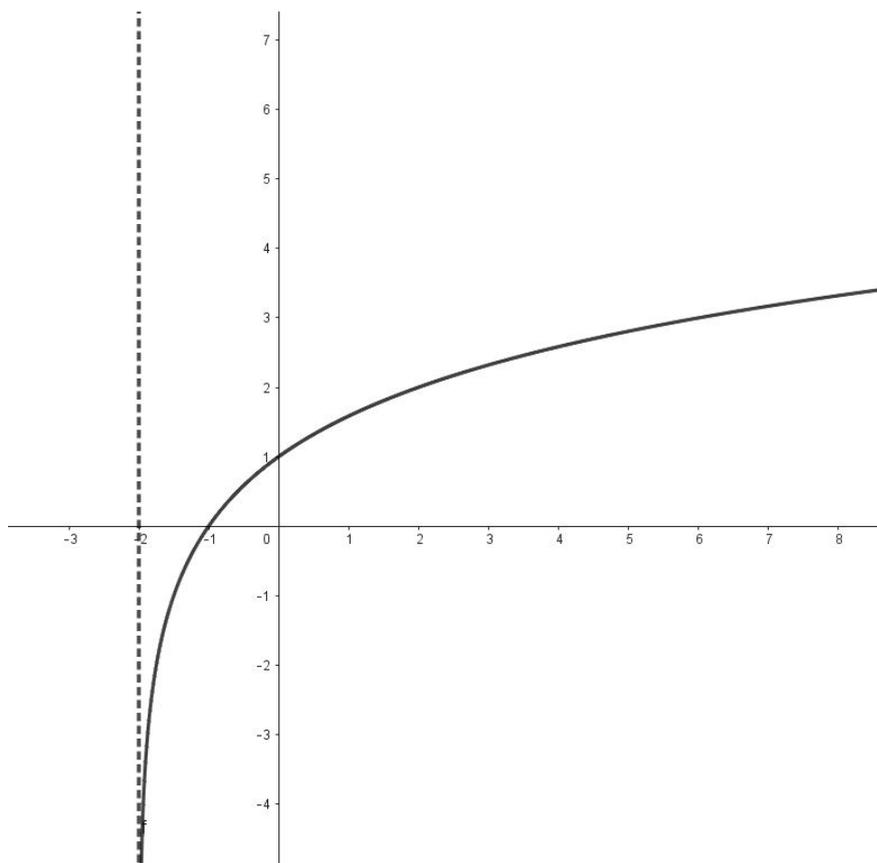
Colegio: _____

I Parte. Selección única.

Valor: 13 puntos

A continuación se le presentan 13 enunciados, cada uno con cuatro opciones de respuesta de las cuales solo una es correcta. Seleccione la opción que completa correctamente cada enunciado e indíquela en la hoja de respuestas.

1. Para una función g se muestra su gráfica a continuación:



¿Cuál corresponde a un posible criterio para la función g ?

(A) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$

(B) $g(x) = \log_2(x + 2)$

(C) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$

(D) $g(x) = \log_2(x - 2)$

2. Sea h una función cuyo criterio es de la forma $h(x) = a^x + b$. Si se sabe que

- I. h es asintótica a $y = 4$
- II. $(-2, 8)$ pertenece al gráfico de h

¿Cuál sería un criterio para la función h ?

(A) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$

(B) $\left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^x - 4$

(C) $\left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^x + 4$

(D) $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4$

3. El dominio máximo de la función h definida por $h(x) = \log_6 |x + 3|$ corresponde a

(A) $] - 3, +\infty[$

(B) $\mathbb{R} - \{-3\}$

(C) $[3, +\infty[$

(D) \mathbb{R}

4. Considere la función g definida por $g(x) = \ln(3x) - 1$ en su dominio máximo y las siguientes afirmaciones:

- I. El ámbito de g corresponde a \mathbb{R} .
- II. g interseca al eje Y en $(0, -1)$.
- III. g es una función creciente.

¿Cuáles son verdaderas?

(A) I y II

(B) I y III

(C) Solo I

(D) Solo III

5. Sea f la función definida por $f(x) = 3^x$. Si la gráfica de una función g se obtiene al trasladar la de f 4 unidades hacia la izquierda y 6 unidades hacia arriba, entonces el criterio de g corresponde a

(A) $g(x) = 3^{x+4} - 6$

(B) $g(x) = 3^{x-4} - 6$

(C) $g(x) = 3^{x-4} + 6$

(D) $g(x) = 3^{x+4} + 6$

6. Para una función h se sabe que:

I. Es decreciente.

II. Su ámbito es $]1, +\infty[$

¿Cuál corresponde a un posible criterio para la función h ?

(A) $h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x + 1$

(B) $h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} - 1$

(C) $h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} + 1$

(D) $h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1$

7. Considere las siguientes afirmaciones para una función f cuyo criterio es $f(x) = 2^{x-4} + 1$

I. Interseca al eje Y en $\left(0, \frac{17}{16}\right)$

II. La imagen de 7 es 9.

III. No existe x en el dominio de f que sea preimagen de 1.

¿Cuáles son verdaderas?

(A) Solo I y II

(B) Solo II y III

(C) Solo I y III

(D) I, II y III

8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = \frac{e^{x-1}}{3}$ una función biyectiva, el criterio de la función inversa de f corresponde a

(A) $3(\ln(x) + 1)$

(B) $1 + 3\ln(x)$

(C) $1 + \ln(3x)$

(D) $3\ln(x + 1)$

9. Considere las siguientes afirmaciones

I. $\log(xy) = \log(x) \cdot \log(y)$

II. $\log_x 6 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}} = 6$

III. $\log_{12} 10 = \frac{1}{\log 12}$

¿Cuáles son verdaderas?

(A) I y II

(B) I y III

(C) II y III

(D) Solo II

10. El valor de $\log_4 8^{100} - \log_4 2^{100}$ corresponde a

(A) 100

(B) 200

(C) $\log_2 8$

(D) $100\log_4 6$

11. Si $y > 0$ y $z > 0$, la expresión $\log\left(\sqrt{\frac{y}{z}}\right)$ es equivalente a

(A) $\frac{\log y}{2 \log z}$

(B) $\frac{1}{2}(\log y - \log z)$

(C) $\sqrt{\log y} - \sqrt{\log z}$

(D) $\sqrt{\frac{\log y}{\log z}}$

12. Si se sabe que $\log_5 11 = m$ y $\log_5 6 = p$, entonces $\log_6 11^2$ es equivalente a

(A) $\frac{2m}{p}$

(B) mp

(C) $\left(\frac{m}{p}\right)^2$

(D) m^2p

13. ¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $5^x = 4^{x-1}$?

(A) $\left\{\log_4 \frac{5}{4}\right\}$

(B) $\left\{\log_{\frac{1}{4}} \frac{4}{5}\right\}$

(C) $\left\{\log_{\frac{4}{5}} 4\right\}$

(D) $\left\{\log_{\frac{5}{4}} 4\right\}$

14. En la escala Richter, la magnitud R de la intensidad I de un sismo está dada por $R = \log\left(\frac{I}{A}\right)$ donde A es cierta intensidad de referencia. Si en un país C un terremoto registró un intensidad I_C y en el país J ocurrió un terremoto con una intensidad 4 veces mayor que la ocurrida en C , la magnitud del terremoto registrado en el país J corresponde a

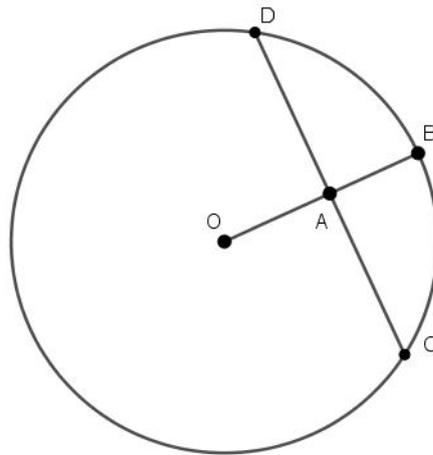
(A) $\log 4 + \log\left(\frac{I_C}{A}\right)$

(B) $4\log\left(\frac{I_C}{A}\right)$

(C) $\log\frac{1}{4} + \log\left(\frac{I_C}{A}\right)$

(D) $\log\left(\frac{I_C}{A}\right)^4$

15. Considere el siguiente círculo de centro O , donde el radio \overline{OB} es perpendicular a la cuerda \overline{CD} .



Si se sabe que \overline{CD} mide 16 cm y \overline{OA} mide 4 cm , ¿cuál es la medida del diámetro del círculo?

(A) $4\sqrt{5}\text{cm}$

(B) $8\sqrt{5}\text{cm}$

(C) $4\sqrt{3}\text{cm}$

(D) $8\sqrt{3}\text{cm}$

16. En un cuadro de fondo blanco se pinta un círculo amarillo, cuyo perímetro es $30\pi cm$ y en el centro de este se pinta un círculo morado de radio $2cm$. ¿cuál es el área de la región pintada solo de amarillo?
- (A) $13\pi cm^2$
- (B) $17\pi cm^2$
- (C) $221\pi cm^2$
- (D) $229\pi cm^2$
17. En un círculo cuyo diámetro es $4\sqrt{2}cm$ se traza un sector circular de área $6\pi cm^2$. La medida, en radianes, del ángulo de dicho sector corresponde a
- (A) $\frac{3\pi}{2}$
- (B) $\frac{3\pi}{4}$
- (C) $\frac{3\pi}{8}$
- (D) $\frac{3\pi}{16}$
18. Si la diagonal de la cara de un cubo mide $8\sqrt{2}dm$, entonces la medida de la diagonal del cubo es
- (A) $8dm$
- (B) $16dm$
- (C) $16\sqrt{2}dm$
- (D) $8\sqrt{3}dm$

19. El área total de un cubo en función de su volumen V queda representada de la siguiente manera

(A) $\sqrt[3]{V^2}$

(B) $6\sqrt[3]{V}$

(C) $6\sqrt[3]{V^2}$

(D) $\sqrt[3]{V}$

II Parte. Respuesta Breve.

Valor: 16 puntos

A continuación se le presentan 16 enunciados. Anote en el espacio en blanco la respuesta correcta de cada uno. Indique la respuesta en la hoja de respuesta.

1. ¿Cuál es la solución de la ecuación $\ln(x + 2) - 1 = 0$?

$e - 2$

2. ¿Cuál es la solución de la ecuación $6e^{y-1} + 3 = 0$?

\emptyset

3. ¿Cuál es la solución de la ecuación $2^{5-x} = 6$?

$5 + \log_2 6$

4. La masa restante de una sustancia con vida media h , en el tiempo t , se modela por medio de la fórmula $m(t) = m_0 e^{-rt}$ donde m_0 corresponde a la masa inicial de la sustancia y $r = \frac{0,69}{h}$. Sabiendo que para el *Radio - 226* la vida media es de 1590 años, responde las siguientes preguntas.

- (a) Si una muestra tiene una masa de 150 *mg*, ¿cuál es una fórmula que modela la masa restante del *Radio - 226* después de t años?

$$m(t) = 150 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{1590} t} = 150 \cdot e^{-0,0004339t}$$

- (b) ¿En cuál año se tendrán 75 *mg* de *Radio - 226*?

1590 años

- (c) ¿Después de cuántos años, aproximadamente, habrá solo 50 *mg* de *Radio - 226*? (tome $\ln 3 \approx 1,098$)

2530 años

5. ¿Cuál es el número total de diagonales que se pueden trazar en un decágono regular?

35

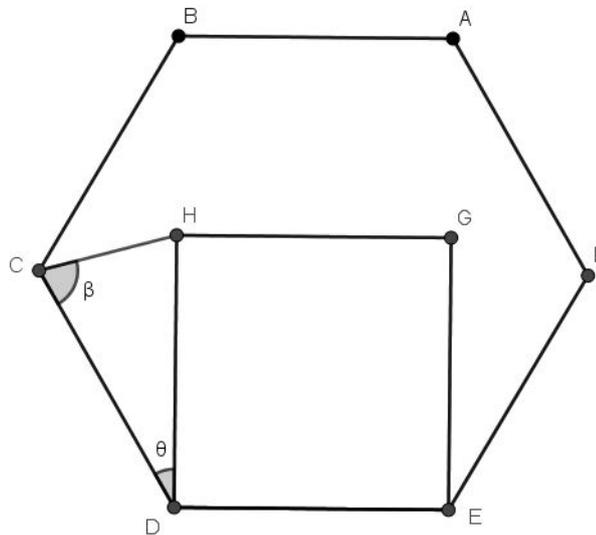
6. ¿Cuál es el polígono regular en el cuál la medida de su ángulo externo es 120° ?

triángulo equilátero

7. ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos exteriores en cualquier polígono regular?

360°

8. Considere la siguiente figura



Si se sabe que $DHGE$ y $DCBAFE$ son polígonos regulares, Determine:

(a) ¿Cuál es la medida del $\angle BAF$?

120°

(b) ¿Cuál es la medida del ángulo θ ?

30°

(c) ¿Cuál es la medida del ángulo β ?

75°

9. ¿Cuál es el área de un cuadrado inscrito en un círculo cuyo radio mide 8 cm ?

$$128\text{ cm}^2$$

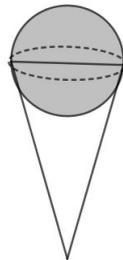
10. La altura de un cilindro circular recto mide el doble del radio de su base. Exprese el área total del cilindro en función del radio R de su base.

$$6R^2\pi\text{ cm}$$

11. Si la medida de la altura de un cono es 8 cm y su radio de la base mide 6 cm , ¿cuál es el área lateral del cono?

$$60\pi\text{ cm}$$

12. Un cono de helado tiene 4 cm de diámetro en la parte superior y 8 cm de altura. Se vierte en él una bola de helado esférica de manera que la mitad de ella queda dentro del cono como se muestra en la siguiente figura



Determine

(a) El volumen de la bola de helado.

$$\frac{32\pi}{3}\text{ cm}$$

(b) ¿Cuál es la capacidad del cono de helado?

$$\frac{32\pi}{3}\text{ cm}$$

(c) Si el helado se derrite, ¿qué altura dentro del cono alcanza ?

Abarca toda la altura

13. Una pirámide tiene base hexagonal regular cuyo lado mide de 6 *cm* de lado y su arista lateral mide 10*cm*.

(a) ¿Cuál es la longitud de la altura de la pirámide?

8 *cm*

(b) ¿Cuál es el área de la base de la pirámide?

$54\sqrt{3}cm^2$

(c) ¿Cuál es el volumen de la pirámide?

$144\sqrt{3}cm^3$

III Parte. Desarrollo.

Valor: 9 puntos

A continuación se le presentan 2 ejercicios. Resuélvalos de manera clara, correcta y ordenada. Deben aparecer todos los procedimientos necesarios para resolver cada uno de ellos.

Halle el conjunto solución de las siguientes ecuaciones

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = \frac{1}{64}$

4 puntos

Nótese que $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 2^{-x^2} \cdot 2^{2x+2}$ y $\frac{1}{64} = 2^{-6}$

De donde la ecuación por resolver queda de la siguiente manera

$$2^{-x^2} \cdot 2^{2x+2} = 2^{-6} \Leftrightarrow 2^{-x^2+2x+2} = 2^{-6}$$

De lo anterior se tiene que

$$-x^2 + 2x + 2 = -6 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = -2$$

De lo anterior y por * se tiene que:

Luego $S = \{4, -2\}$

2. $\log_2(m^2 - 3m + 6) - \log_2(m - 1) = 2$

5 puntos

$$\log_2(m^2 - 3m + 6) - \log_2(m - 1) = 2$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{m^2 - 3m + 6}{m - 1}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 - 3m + 6}{m - 1} = 4$$

$$\Rightarrow m^2 - 3m + 6 = 4m - 4$$

$$\Rightarrow m^2 - 7m + 10$$

$$\Rightarrow (m - 5)(m - 2) = 0$$

$$\Rightarrow m = 2 \vee m = 5$$

Se analizan los valores obtenidos:

(a) Si $m = 2$, se tiene que $\log_2(4) - \log_2(1) = 2$

(b) Si $m = 5$, $\log_2(16) - \log_2(4) = 4 - 2 = 2$

Luego $S = \{2, 5\}$