

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA



II Examen Parcial Precálculo anual

SÁBADO 17 DE JUNIO
PERÍODO 2023

TIEMPO MÁXIMO DISPONIBLE: 3 HORAS
VALOR: 50 PUNTOS

Instrucciones Generales:

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y pregunta antes de contestar.
2. Esta es una prueba de 50 puntos que consta de tres partes: selección única (20 puntos), respuesta breve (21 puntos) y de desarrollo (9 puntos).
3. Debe trasladar sus respuestas al folleto de respuestas de selección única y respuesta breve. El desarrollo debe ser resuelto completamente en dicho folleto.
4. Las expresiones algebraicas que se presentan en este examen se asumen **bien definidas en \mathbb{R}** .
5. En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento necesario para obtener su solución.
6. Escriba con bolígrafo de tinta indeleble azul o negra. No proceden reclamos sobre pruebas escritas con lápiz o que presenten alguna alteración.
7. **No** se permite el uso de celulares.
8. Si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
9. La calculadora que puede utilizar es aquella que contiene solo las operaciones básicas.
10. La prueba debe resolverse individualmente.
11. Dispone de **3 horas** para resolver la prueba.

Nombre: _____

Código: _____

Colegio: _____

I Parte. Selección única.

Valor: 20 puntos

A continuación se le presentan 20 enunciados, cada uno con cuatro opciones de respuesta de las cuales solo una es correcta. Seleccione la opción que completa correctamente cada enunciado e indíquela en la hoja de respuestas.

1. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y considere las siguientes afirmaciones:

I. Si $a < 0$ el conjunto solución de $ax + b \geq c$ corresponde a $\left[\frac{c-b}{a}, +\infty\right[$.

II. Si $b > c$, el conjunto solución de $bx \leq cx$ corresponde a $] -\infty, 0]$.

De las afirmaciones anteriores, ¿cuáles son correctas?

(A) Solo I

(B) Solo II

(C) I y II

(D) Ninguna

2. El conjunto solución de la inecuación $x^2 > 3x + 28$ corresponde a

(A) $[-4, 7]$

(B) $] -4, 7[$

(C) $] -\infty, -4] \cup [7, +\infty[$

(D) $] -\infty, -4[\cup] 7, +\infty[$

3. El conjunto solución de la inecuación $(x + 2)^2(x + 1)(x - 4) \leq 0$ corresponde a

(A) $[-1, 4] \cup \{-2\}$

(B) $[-2, -1] \cup \{4\}$

(C) $] -\infty, -1] \cup [4, +\infty[$

(D) $] -\infty, -2] \cup [-1, 4]$

4. Considere las siguientes afirmaciones:

- I. Si $x(x + 2) > 6$, entonces necesariamente $x > 6$ y $x + 2 > 6$.
- II. Si $(x + 1)(x + 3) < 0$, entonces necesariamente $x + 1 < 0$ y $x + 3 > 0$.
- III. El conjunto solución de $x^2 + 3x + 6 < 0$ es \emptyset .

De las afirmaciones anteriores, ¿cuáles son correctas?

- (A) I y II
- (B) II y III
- (C) I y III
- (D) Solo III

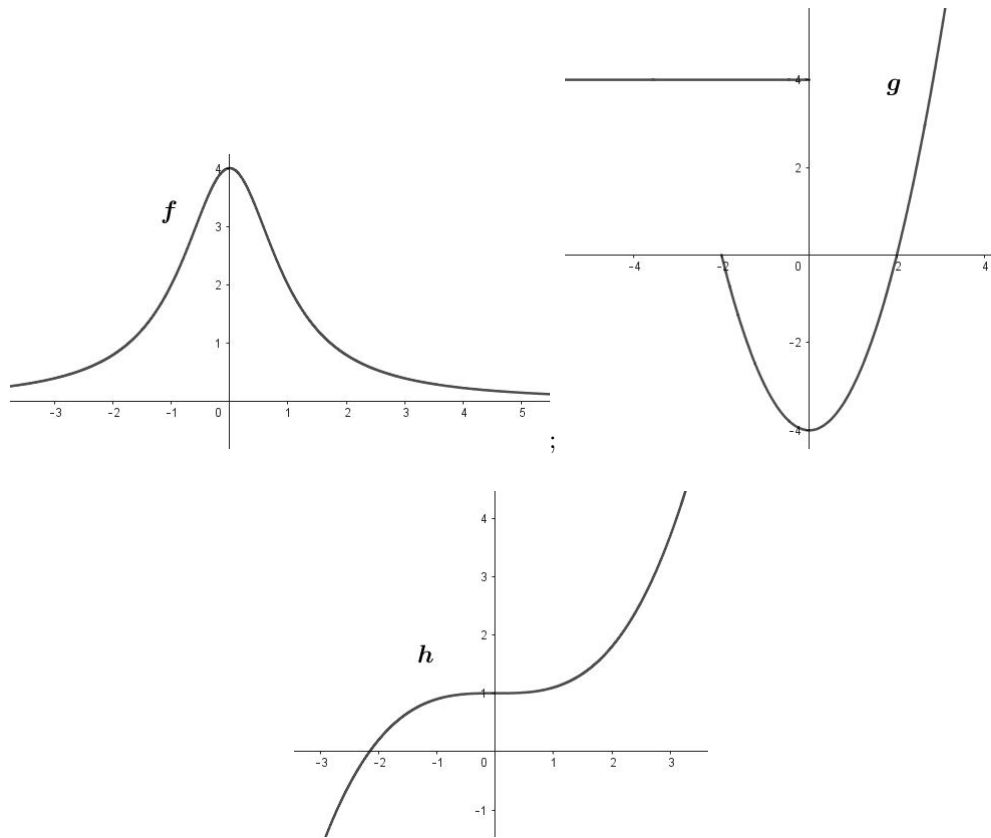
5. El conjunto solución de la inecuación $\left| \frac{x + 1}{2} \right| \leq 8$ corresponde a

- (A) $] -\infty, 15]$
- (B) $[-17, +\infty[$
- (C) $[-17, 15]$
- (D) $] -\infty, -17] \cup [15, +\infty[$

6. El conjunto solución de la inecuación $|8x + 3| - 13 > 0$ corresponde a

- (A) $] -\infty, -2[\cup \left] \frac{5}{4}, +\infty \right[$
- (B) $] -2, +\infty[$
- (C) $\left] -2, \frac{5}{4} \right[$
- (D) \emptyset

7. Observe las siguientes gráficas para relaciones f , g y h de \mathbb{R} en \mathbb{R} :



¿Cuáles de las gráficas anteriores corresponden a una función?

(A) f y g

(B) f y h

(C) g y h

(D) Solo h

8. Sea $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \mathbb{Z}$ una función cuyo gráfico es $G_f = \{(1, 4), (2, 7), (3, 10), (a, 1), (b, -2)\}$, ¿cuál podría ser un posible valor para a y b ?

(A) $a = 1$ y $b = 5$

(B) $a = 4$ y $b = 4$

(C) $a = 5$ y $b = 4$

(D) $a = 2$ y $b = 7$

9. Sea h una función cuyo gráfico está dado por $G_h = \{(0, 3), (-2, 1), (1, 5), (-3, 4), (3, 9), (-1, 1)\}$ y considere las siguientes afirmaciones

I. $h(3) = 0$

II. Si $h(a) = 1$, entonces $a = -2 \vee a = -1$

III. El ámbito de h es $\{1, 3, 4, 5, 9\}$

De las afirmaciones anteriores, ¿cuáles son correctas?

(A) I y II

(B) II y III

(C) Solo II

(D) Solo III

10. La función $g : [-2, 3[\cup]3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ cuyo criterio es $g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$ interseca al eje X en el siguiente punto

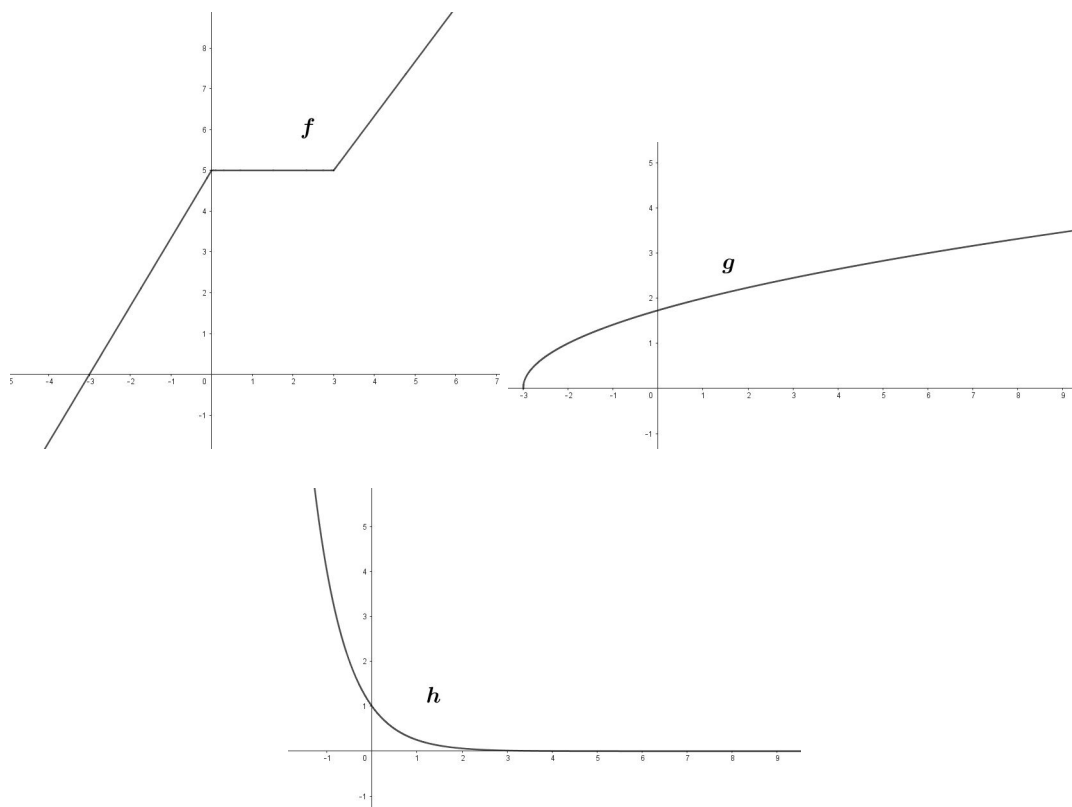
(A) $(0, -2)$

(B) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, 0\right)$

(C) $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

(D) $(-2, 0)$

11. Observe las siguientes gráficas correspondientes a tres funciones f , g y h .



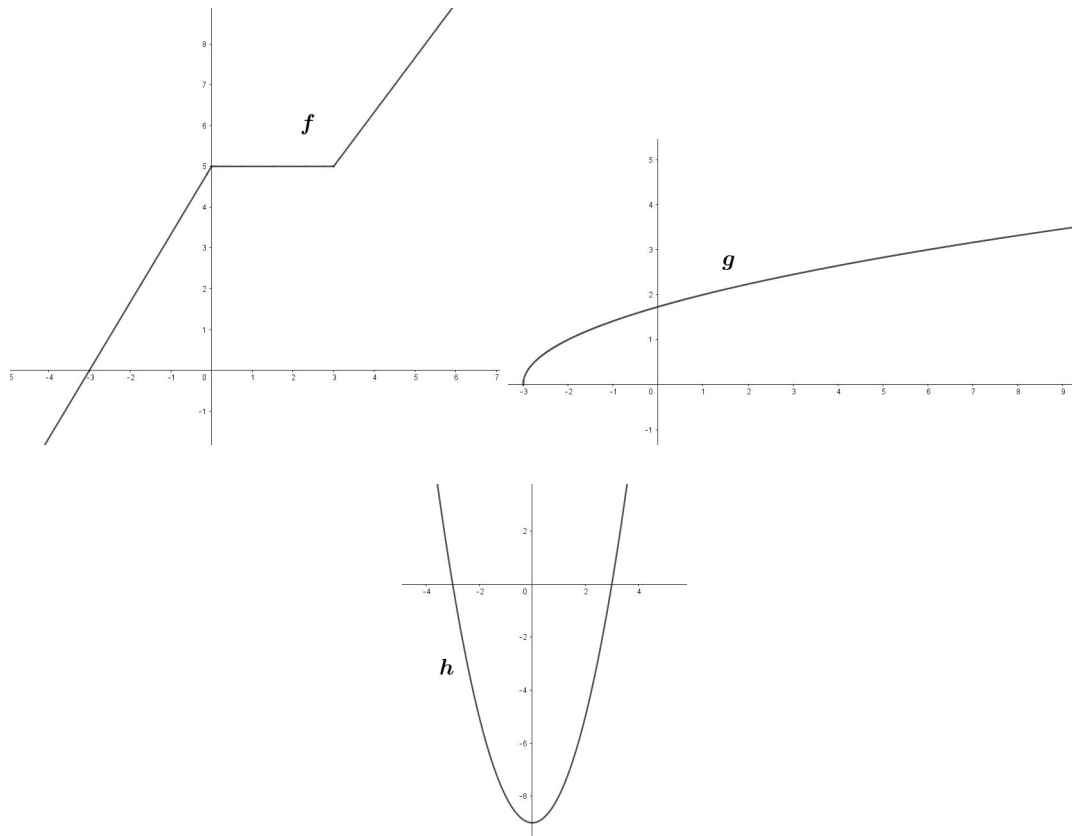
¿Cuáles de las funciones anteriores son crecientes?

- (A) f y h
- (B) g y h
- (C) f y g
- (D) f , g y h

12. Sea $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $h(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x+5}$, ¿cuál es el dominio máximo de h ?

- (A) $\mathbb{R} - \{-5\}$
- (B) $[-5, +\infty[$
- (C) $[-5, +\infty[- \{5\}$
- (D) $] -5, +\infty[$

13. Observe la gráfica de las funciones f, g y h



¿Cuáles de las funciones anteriores son inyectivas?

- (A) f y g
- (B) g y h
- (C) Solo f
- (D) Solo g

14. Considere las siguientes afirmaciones sobre una función biyectiva f

- I. La función f posee inversa y satisface que $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$.
- II. Si la inversa de f corresponde a la función g , se cumple que $(g \circ f)(x) = x$.
- III. Si (a, b) es un elemento del gráfico de f , entonces (b, a) pertenece al gráfico de f^{-1} .

De las afirmaciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

- (A) I y II
- (B) II y III
- (C) Solo II
- (D) Solo III

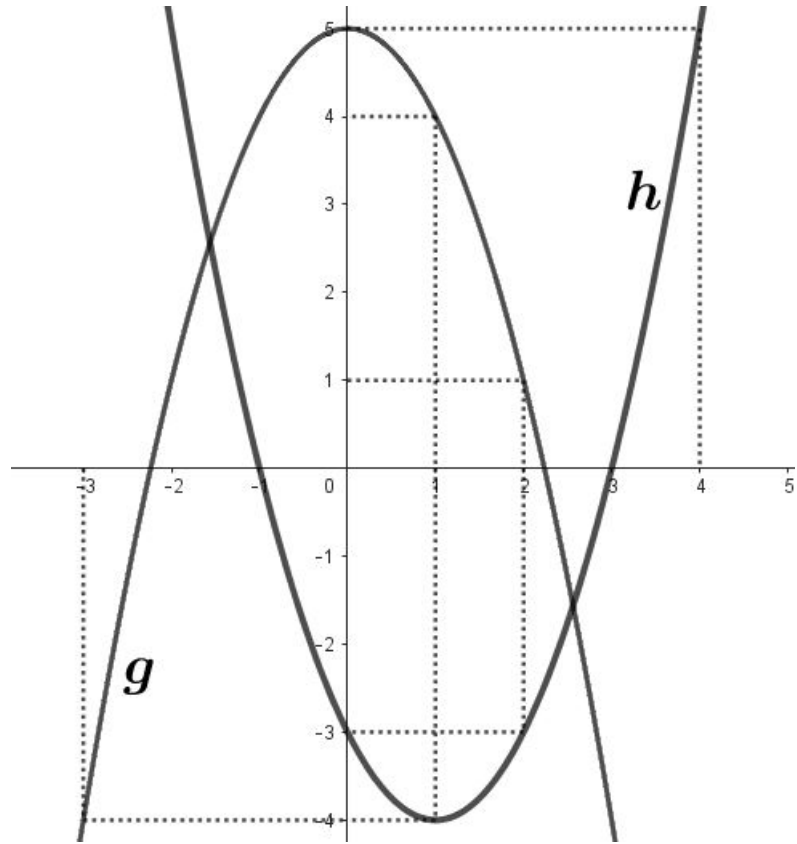
15. Sean f y g dos funciones definidas en su dominio máximo y cuyos criterios son, respectivamente, $f(x) = \frac{1}{x-1}$ y $g(x) = x - 3$. ¿Cuál es el dominio máximo de $(f \circ g)(x)$?

- (A) $\mathbb{R} - \{4\}$
- (B) $\mathbb{R} - \{1\}$
- (C) $\mathbb{R} - \{1, 4\}$
- (D) \mathbb{R}

16. Considere f, g dos funciones cuyos criterios respectivos son $f(x) = \sqrt[3]{1+2x}$ y $g(x) = 3x - 1$. Al calcular $(f \circ g)(x)$ se obtiene

- (A) $\sqrt[3]{6x}$
- (B) $3\sqrt[3]{2x}$
- (C) $\sqrt[3]{6x-1}$
- (D) $3\sqrt[3]{1+2x} - 1$

17. Considere las gráficas de las funciones g y h dadas a continuación



¿Cuál es el resultado de calcular $(g \circ h)(2) + \left(\frac{h}{g}\right)(0)$?

(A) $-\frac{17}{5}$

(B) $-\frac{18}{5}$

(C) $\frac{22}{5}$

(D) $-\frac{23}{5}$

18. Sea $f :]-\infty, 3] \rightarrow [0, +\infty[$ una función biyectiva cuyo criterio es $f(x) = (x - 3)^2$. ¿Cuál es el criterio de la función inversa de f ?

(A) $\sqrt{x} - 3$

(B) $3 + \sqrt{x}$

(C) $3 - \sqrt{x}$

(D) $-\sqrt{x} - 3$

19. Se sabe que una temperatura de 0 grados Celsius ($0^\circ C$) equivale a 32 grados Fahrenheit ($32^\circ F$) y que $100^\circ C$ equivalen a $212^\circ F$. Al expresar la temperatura en $^\circ F$ como función lineal de la temperatura $^\circ C$ se obtiene que

(A) $F(C) = \frac{17}{53}C + 32$

(B) $F(C) = \frac{53}{17}C - \frac{1696}{17}$

(C) $F(C) = \frac{9}{5}C + 32$

(D) $F(C) = \frac{5}{9}C - \frac{160}{9}$

20. Una panadería determinó que el ingreso mensual obtenido al vender x unidades de un nuevo tipo de pan está dado por la función $T(x) = 80x - 0,4x^2$, ¿cuál es el ingreso máximo (en dólares) que puede obtener cada mes por la venta de ese producto?

(A) \$40

(B) \$100

(C) \$2560

(D) \$4000

II Parte. Respuesta Breve.

Valor: 21 puntos

A continuación se le presentan 21 enunciados. Anote en el espacio en blanco la respuesta que responda correctamente cada uno y pásela a en la hoja de respuestas.

1. El conjunto solución de la inecuación $|3x - 5| + 3 \leq 0$ corresponde a

\emptyset

2. Sea $k \in \mathbb{R}$. Si se sabe que el \emptyset corresponde al conjunto solución de la inecuación $k^2x + 2 \geq 10 + 4x$, ¿cuál puede ser un valor para k ?

$k = 2 \vee k = -2$

3. Sea $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función cuyo criterio es

$$g(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < -2 \\ 1 - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ -2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- (a) ¿Cuál es el conjunto D que corresponde al dominio máximo de g ?

$\mathbb{R} - \{1\}$

- (b) ¿cuál es la imagen de -2?

-3

- (c) ¿Cuál es la imagen de 4?

-2

- (d) ¿Cuál es la preimagen de 0 ?

-1

- (e) ¿Cuál es el punto de intersección con el eje Y?

(0, 1)

4. Para cada uno de los siguientes criterios indique el dominio máximo D para el cual $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función.

(a) Si $f(x) = 8\sqrt{x+3}$, D corresponde a

$$[-3, +\infty[$$

(b) Si $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-81}}$, D corresponde a

$$\mathbb{R} - \{9, -9\}$$

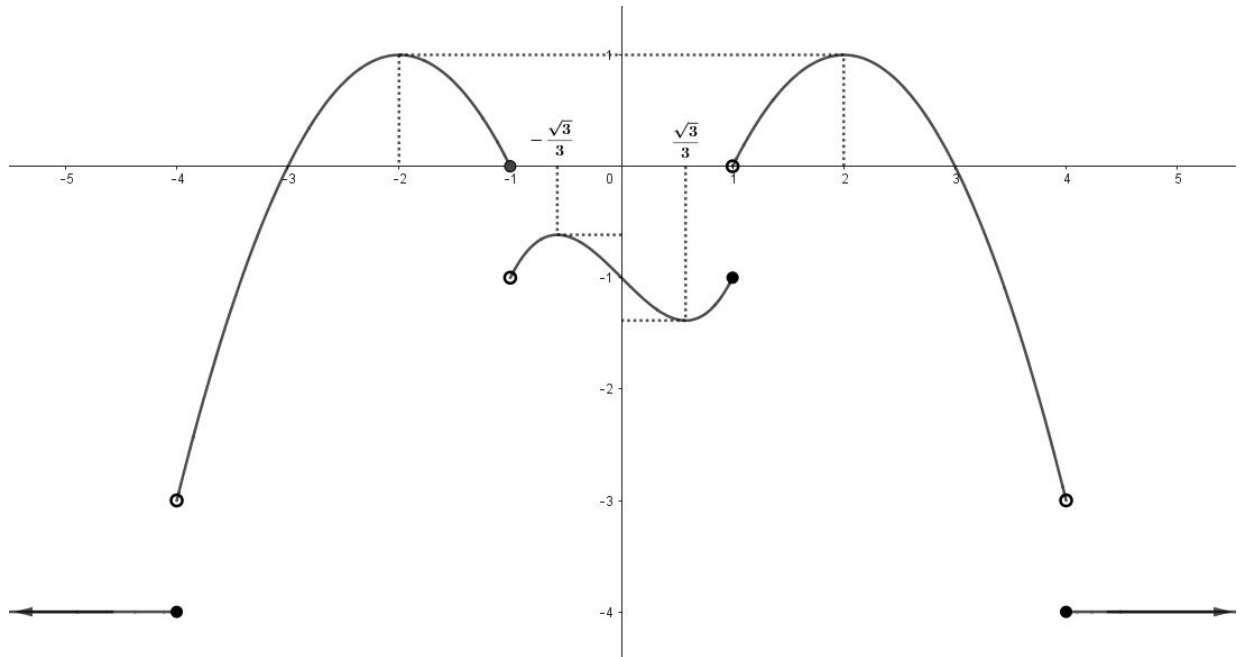
(c) Si $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+x+3}$, D corresponde a

$$\mathbb{R}$$

5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3 - 5x$ una función biyectiva.
¿Cuál es el criterio de la función inversa de f ?

$$f^{-1}(x) = \frac{3-x}{5}$$

6. Sea f una función cuya gráfica es la siguiente



Determine:

(a) Dominio de f

\mathbb{R}

(b) Ámbito de f

$] -3, 1] \cup \{4\}$

(c) Los puntos de intersección con el eje X

$(3, 0), (-3, 0), (-1, 0)$

(d) Un intervalo donde la función es estrictamente decreciente

cualquier subconjunto de $] -2, -1[; \frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} [;] 2, 4[$

(e) Un intervalos donde la función es estrictamente creciente

cualquier subintervalo de $] -4, -2[; -1, -\frac{\sqrt{3}}{3} [; \frac{\sqrt{3}}{3}, 2 [$

(f) Un intervalo donde la función es constante

Tomar cualquier subconjunto de $]-\infty, -4]$ o $[4, +\infty[$

(g) ¿Cuántas preimágenes tiene 1?

dos

(h) ¿Cuál es la imagen de 4?

-4

(i) ¿Cuál es el conjunto solución de $f(x) > 0$?

$]-3, -1[\cup]1, 3[$

(j) Calcule $\frac{f(0) - f(5)}{3}$

1

III Parte. Desarrollo.

Valor: 9 puntos

A continuación se le presentan 2 ejercicios. Resuélvalos de manera clara, correcta y ordenada. Deben aparecer todos los procedimientos necesarios para resolver cada uno de ellos.

1. Halle el conjunto solución de la siguiente inecuación.

4 puntos

$$\frac{-3(x^2 + 4)(1 - x)(x + 6)}{x^2 - 9} \geq 0$$

Nótese que la inecuación por resolver se puede expresar como

$$\frac{(x^2 + 4)(1 - x)(x + 6)}{(x - 3)(x + 3)} \leq 0$$

Se construye una tabla de valores para analizarla

	$-\infty$	-6	-3	1	3	$+\infty$
$x + 6$	-	•	+	+	+	+
$x + 3$	-	-	•	+	+	+
$1 - x$	+	+	+	•	-	-
$x - 3$	-	-	-	-	•	+
$x^2 + 4$	+	+	+	+	+	+
*	-	+	-	+	-	-

De lo anterior el conjunto solución corresponde a

$$]-\infty, -6] \cup]-3, 1] \cup]3, +\infty[$$

2. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4 - (x + 3)^2 & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ -x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Realice la gráfica de la función f

5 puntos

