INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA

I Examen Parcial
Precálculo anual

SÁBADO 22 DE ABRIL
PERÍODO 2023

TIEMPO MÁXIMO DISPONIBLE: 3 HORAS
VALOR: 50 PUNTOS

Instrucciones Generales:

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y pregunta antes de contestar.
2. Esta es una prueba de 50 puntos que consta de tres partes: selección única (16 puntos), respuesta breve (15 puntos) y de desarrollo (19 puntos).
3. Debe trasladar sus respuestas al folleto de respuestas de selección única y respuesta breve. El desarrollo debe ser resuelto completamente en dicho folleto.
4. Las expresiones algebraicas que se presentan en este examen se asumen **bien definidas en** $\mathbb{R}$.
5. En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento necesario para obtener su solución.
6. Escriba con bolígrafo de tinta indeleble azul o negra. No proceden reclamos sobre pruebas escritas con lápiz o que presenten alguna alteración.
7. **No** se permite el uso de celulares.
8. Si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
9. La calculadora que puede utilizar es aquella que contiene solo las operaciones básicas.
10. La prueba debe resolverse individualmente.
11. Dispone de **3 horas** para resolver la prueba.

Nombre: ______________________________

Código: ______________________________

Colegio: ______________________________

I Parte. Selección única.

Valor: 16 puntos

A continuación se le presentan 16 enunciados, cada uno con cuatro opciones de respuesta de las cuales solo una es correcta. Seleccione la opción que completa correctamente cada enunciado e indíquela en la hoja de respuestas.

1. Al factorizar completamente $y^9 - (z-1)^3$ uno de los factores corresponde a

   (A) $y^6 + 2y^3(z-1) + (z-1)^2$

   (B) $y^3 + z - 1$

   (C) $y^6 - y^3(z-1) + (z-1)^2$

   (D) $y^3 - z + 1$

2. Un ejemplo de una expresión que **no** es factorizable en $\mathbb{R}$ corresponde a

   (A) $a^6 + b^{12}$

   (B) $a^4 + 6a^2 + 36$

   (C) $36a^4 - 36a^2b^2 + 9b^4$

   (D) $a^4 - 36$

3. Al racionalizar el numerador de $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{21}$ y simplificar se obtiene por resultado

   (A) $\dfrac{1}{7}$

   (B) $\dfrac{1}{3}$

   (C) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

   (D) $\dfrac{1}{7\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}$

4. Al racionalizar la expresión $\dfrac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2}$ se obtiene

(A) $\dfrac{(x+8)(\sqrt[3]{x}+2)}{\sqrt[3]{x^2}-4}$

(B) $\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4$

(C) $\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4$

(D) $\dfrac{(x+8)(\sqrt[3]{x}-2)}{\sqrt[3]{x^2}-4}$

5. Al simplificar la expresión $\dfrac{(2x-5)x-3}{(x-3)(x+1)}$ se obtiene por resultado

(A) $x-4$

(B) 2

(C) $\dfrac{2x+1}{x+1}$

(D) $\dfrac{2x-5}{x+1}$

6. El resultado de efectuar $\dfrac{m^2-9}{m+4} : (2m-6)$ corresponde a

(A) $\dfrac{2(m+3)(m-3)^2}{m+4}$

(B) $\dfrac{m+3}{2(m+4)}$

(C) $\dfrac{m+4}{2(m+3)(m-3)^2}$

(D) $\dfrac{2(m+4)}{m+3}$

7. El resultado de efectuar $\dfrac{a}{ab-b^2} - \dfrac{1}{b}$ corresponde a

(A) $a-b$

(B) $\dfrac{1}{b-a}$

(C) $b-a$

(D) $\dfrac{1}{a-b}$

8. Considere las siguientes afirmaciones:

I. El conjunto solución de la ecuación $\sqrt{x^2} = 6$ es $\{6\}$.

II. El conjunto solución de $x^2 - 4x + 5 = 0$ es $\varnothing$.

III. El conjunto solución de $x - 1 = 6$ es $\{7\}$.

¿Cuáles son verdaderas?

(A) I y III

(B) II y III

(C) I y II

(D) I, II y III

9. Al despejar b en la expresión $A = \dfrac{h}{2}(a+b)$ se obtiene como resultado

(A) $\dfrac{2A}{h} - a$

(B) $\dfrac{hA}{2} - a$

(C) $\dfrac{2A-a}{h}$

(D) $A - \dfrac{ah}{2}$

10. Una persona compró cierto número de confites por ₡240. Si hubiera comprado 3 confites más por el mismo dinero, cada confite le habría costado ₡ 4 menos. Si x representa el número de confites que compró, ¿cuál opción presenta una ecuación que permite determinar la cantidad de confites comprados?

(A) $\dfrac{x}{240} - 4 = \dfrac{x+3}{240}$

(B) $\dfrac{240}{x} = \dfrac{240}{x+3} - 4$

(C) $\dfrac{x}{240} + 4 = \dfrac{x+3}{240}$

(D) $\dfrac{240}{x} = \dfrac{240}{x+3} + 4$

11. Sea L la recta que contiene los puntos $(x, 2)$ y $(-4, 6)$. Si la pendiente de L es $m = 3$, ¿cuál es el valor de x?

(A) -16

(B) -8

(C) $\dfrac{-16}{3}$

(D) $\dfrac{-8}{3}$

12. Considere las siguientes afirmaciones sobre dos rectas L y T

I. Si L es decreciente y T es paralela a L, entonces la pendiente de T es positiva.

II. Si T es una recta vertical y L es perpendicular a T, entonces la pendiente de L es $m = 0$.

III. Si L y T **no** son rectas horizontales ni verticales, pero son perpendiculares, entonces una crece y la otra decrece.

¿Cuáles son verdaderas?

(A) I y II

(B) I y III

(C) II y III

(D) Solo II

13. Considere las siguientes afirmaciones sobre la parábola cyua ecuación es $y = 6x^2 + 12x + c; c \in \mathbb{R}$:

   I. Si $c \geq 7$ la parábola no interseca al eje X.

   II. Interseca al eje Y en $(c, 0)$.

   III. Es cóncava hacia arriba.

   ¿Cuáles son verdaderas?

   (A) I y III

   (B) Solo I

   (C) II y III

   (D) Solo III

14. Considere las siguientes afirmaciones sobre la parábola cuyo criterio está dado por $y = ax^2 - 8x + 2; a \in \mathbb{R}; a \neq 0$:

   I. Si $a = 8$, interseca al eje X.

   II. El eje de simetría corresponde a $x = \dfrac{4}{a}$.

   III. Si $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba.

   ¿Cuáles son verdaderas?

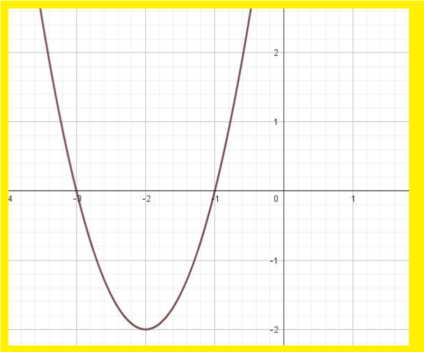
   (A) Solo I y II

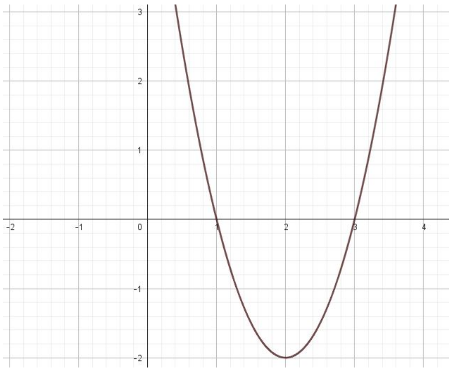
   (B) Solo I y III

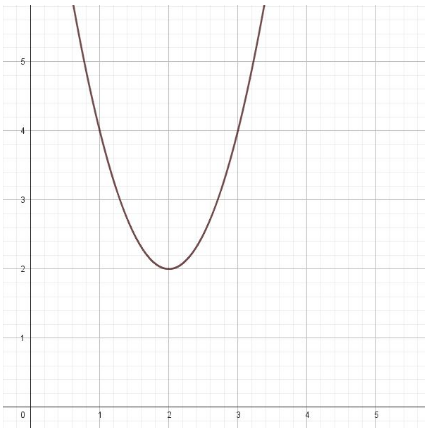
   (C) Solo II y III

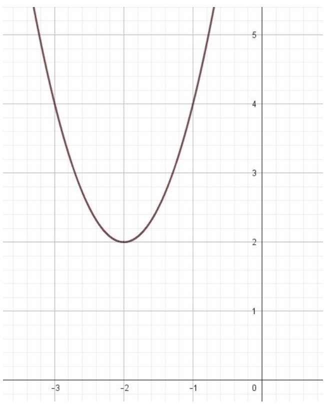
   (D) I, II y III

15. La reresentanción gráfica de la parábola cuya ecuación es $y = 2(x+2)^2 - 2$ corresponde a

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

16. Si se sabe que $P(1,8)$ y $Q(5,-6)$ son los extremos del diámetro de una circunferencia C, ¿cuál es el punto que corresponde al centro de C?

   (A) $(3,1)$

   (B) $(1,3)$

   (C) $(-2,7)$

   (D) $(7,-2)$

II Parte. Respuesta Breve. Valor: 15 puntos

A continuación se le presentan 15 enunciados. Anote en el espacio indicado la información que responda correctamente cada uno. Indique la respuesta en la hoja de respuestas.

1. Al factorizar completamente la expresión $49(x^2 - xy) - 63(xy - y^2)$ se obtiene el siguiente resultado:

   $7(x-y)(7x-9y)$

2. Al factorizar completamente la expresión $ab + 4a - b - 4$ se obtiene el siguiente resultado:

   $(a-1)(b+4)$

3. ¿Cuántos factores distintos se obtienen al factorizar al máximo $ay^2 - 5a$?

   Como $ay^2 - 5a = a(y-\sqrt{5})(y+\sqrt{5})$, hay tres factores distintos

4. ¿Cuáles son las restricciones de la fracción racional $\dfrac{y+4}{y^2+7y-8}$?

   $\{y / y \neq 1 \wedge y \neq -8\}$

5. ¿Cuáles son las soluciones, en $\mathbb{R}$, de la ecuación $(3x+2)^2 = 9$?

   $\frac{1}{3}$ y $-\frac{5}{3}$

6. ¿Cuál es la solución de la ecuación $\dfrac{2x-1}{x+2} = \dfrac{4}{5}$?

$\dfrac{13}{6}$

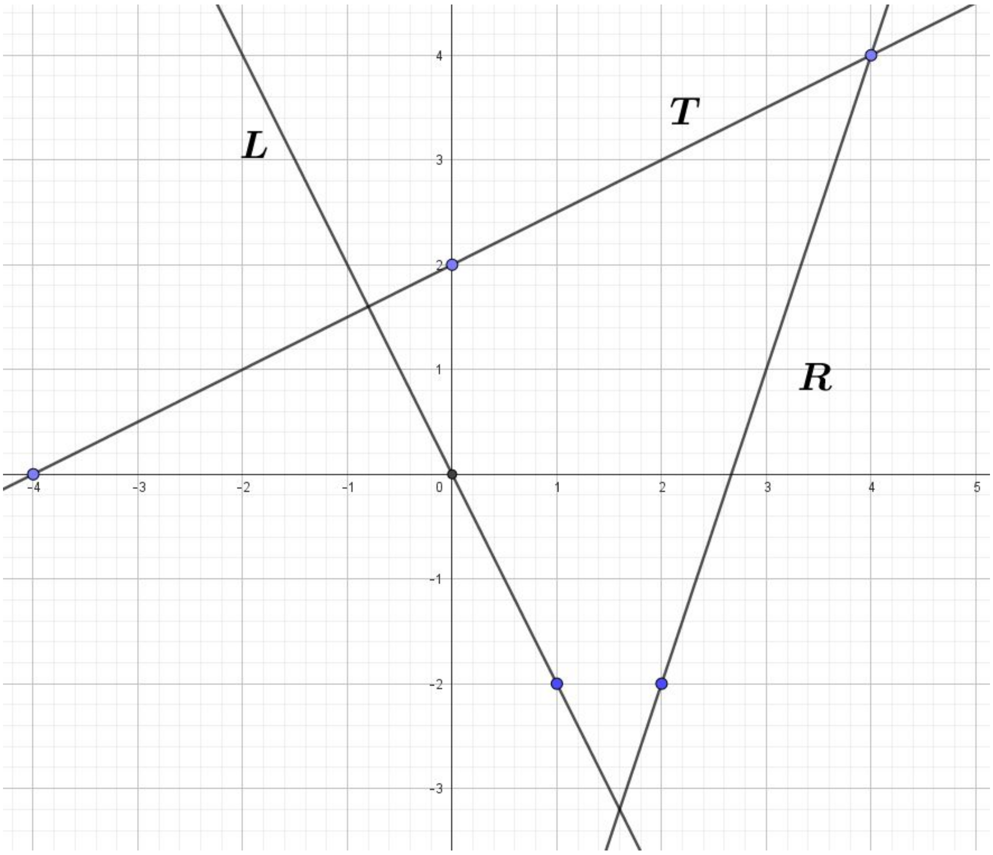
7. La solución, en $\mathbb{R}$, de la ecuación $\sqrt{x-8} = 2$ corresponde a:

12

8. ¿Cuáles son los puntos donde la parábola cuya ecuación es $y = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4}$ interseca al eje X?

$(2, 0)$ y $(-1, 0)$

9. Observe la gráfica de las rectas L, T y R.



Sobre las rectas L, T y R indique lo que se solicita.

(a) ¿Cuál es la ecuación de la recta R?

$y = 3x - 8$

(b) Justifique si el punto $(-2, -14)$ pertenece a la recta R

Sí pertenece a la recta, al sustituir $x = -2$ en la ecuación de la recta R se obtiene que $y = -6 - 8 = -14$

(c) Proponga un ejemplo de la ecuación de una recta paralela a la recta R

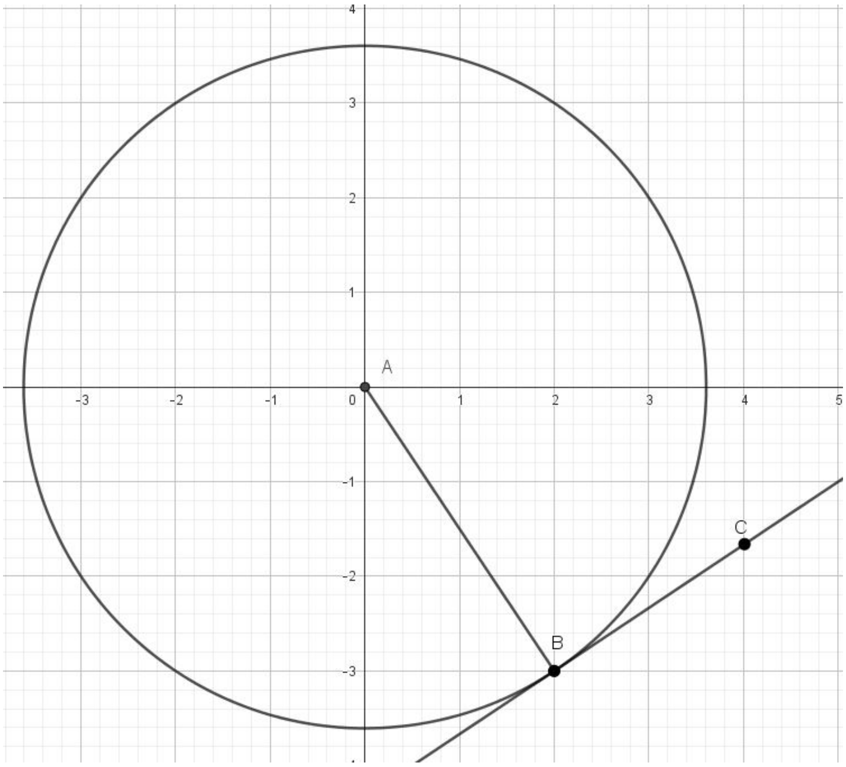
cualquiera la forma $y = 3x + b; b \in \mathbb{R}$

(d) Si se sabe que la pendiente de la recta T es 2, justifique si las rectas L y T son perpendiculares.

Sí son perpendiculares.

La pendiente de la recta T es $m_T = \dfrac{1}{2}$ y la de L es $m_L = -2$ con lo cual $m_T \cdot m_L = -1$

10. Considere la siguiente figura en donde $\overleftrightarrow{BC}$ es tangente en B a la circunferencia de centro A.



Con base en la figura anterior, determine lo que se le indica

(a) ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{AB}$?

$\sqrt{13}(u.l.)$

(b) ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia?

$x^2 + y^2 = 13$

(c) ¿Cuál es la medida del ángulo $\angle ABC$?

$90°$

III Parte. Desarrollo. Valor: 19 puntos

A continuación se le presentan 4 ejercicios. Resuélvalos de manera clara, correcta y ordenada. Deben aparecer todos los procedimientos necesarios para resolver cada uno de ellos.

1. Factorice al máximo el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$ 4 puntos

El conjunto de posibles ceros del polinomio $P(x)$ corresponde a $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$

1. Se aplica división sintética con $x = -1$

1	-2	-13	14	24	-1
	-1	3	10	-24	
1	-3	-10	24	0	

2. Tomando $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$, se aplica división sintética con $x = 2$

1	-3	-10	24	2
	2	-2	-24	
1	-1	-12	0	

3. Finalmente se factoriza pr inspección $R(x) = x^2 - x - 12$, de donde $R(x) = (x-4)(x+3)$

Luego de 1, 2 y 3 se llega a que $P(x) = (x+1)(x-2)(x-4)(x+3)$

2. Halle el conjunto solución de las siguientes ecuaciones

(a) $\sqrt{2x^2+5x+4} - 1 = 2x$ 5 puntos

$\sqrt{2x^2+5x+4} - 1 = 2x$

$\Rightarrow \sqrt{2x^2+5x+4} = 2x+1$
$\Rightarrow 2x^2+5x+4 = 4x^2+4x+1$
$\Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0$
$\Rightarrow (2x-3)(x+1) = 0$
$\Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \vee x = -1$

Nótese que si $x = -1$, $\sqrt{2-5+4} - 1 = 0 \neq 2 \cdot (-1)$ y si $x = \dfrac{3}{2}$, $\sqrt{\dfrac{9}{2} + \dfrac{15}{2} + 4} - 1 = 3 = 2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)$

Luego $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

(b) $\dfrac{4y+1}{4y-1} - \dfrac{6}{16y^2-1} = \dfrac{4y-1}{4y+1}$ 5 puntos

Nótese que $y \neq \dfrac{1}{4}$ y $y \neq -\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{4y+1}{4y-1} - \dfrac{6}{16y^2-1} = \dfrac{4y-1}{4y+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4y+1}{4y-1} - \dfrac{6}{16y^2-1} - \dfrac{4y-1}{4y+1} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(4y+1)^2 - 6 - (4y-1)^2}{(4y-1)(4y+1)} = 0$

$\Leftrightarrow 16y^2 + 8y + 1 - 6 - 16y^2 + 8y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 16y - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3}{8}$

Luego $S = \left\{\dfrac{3}{8}\right\}$

3. Resuelva y simplifique al máximo la siguiente operación 5 puntos

$$\frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + \frac{4}{3-x}$$

$$\frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} + \frac{4}{3-x}$$

$$= \frac{\frac{x^2-x-2}{x^2}}{\frac{x^2-5x+6}{x^2}} + \frac{4}{3-x}$$

$$= \frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6} + \frac{4}{3-x}$$

$$= \frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)(x-2)} + \frac{4}{3-x}$$

$$= \frac{x+1}{x-3} - \frac{4}{x-3}$$

$$= \frac{x-3}{x-3} = 1$$