Instituto Tecnológico de Costa Rica

# *IV Examen Parcial*
# *Precálculo anual*

Sábado 11 de noviembre | Tiempo máximo disponible: 3 horas
Período 2023 | Valor: 45 puntos

## Instrucciones Generales:

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y pregunta antes de contestar.
2. Esta es una prueba de 45 puntos que consta de tres partes: selección única (18 puntos), respuesta breve (13 puntos) y de desarrollo (14 puntos).
3. Debe trasladar sus respuestas al folleto de respuestas de selección única y respuesta breve. El desarrollo debe ser resuelto completamente en dicho folleto.
4. Las expresiones algebraicas que se presentan en este examen se asumen **bien definidas en** $\mathbb{R}$.
5. En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento necesario para obtener su solución.
6. Escriba con bolígrafo de tinta indeleble azul o negra. No proceden reclamos sobre pruebas escritas con lápiz o que presenten alguna alteración.
7. **No** se permite el uso de celulares.
8. Si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
9. La calculadora que puede utilizar es aquella que contiene solo las operaciones básicas.
10. La prueba debe resolverse individualmente.
11. Dispone de **3 horas** para resolver la prueba.

Nombre: ____________________________________________

Código: ______________________

Colegio: ____________________________________________

## I Parte. Selección única.

Valor: 18 puntos

A continuación se le presentan 18 enunciados, cada uno con cuatro opciones de respuesta de las cuales solo una es correcta. Seleccione la opción que completa correctamente cada enunciado e indíquela en la hoja de respuestas.

1. Sea $P(x, y)$ un punto que pertenece a la circunferencia trigonométrica ubicado en el tercer cuadrante. Si se sabe que $y = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, el valor de $x$ corresponde a

   (A) $\frac{4}{5}$

   (B) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

   (C) $-\frac{4}{5}$

   (D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

2. Suponga que un carrusel da una vuelta completa en un minuto y gira en sentido contrario a las manecillas del reloj. Si un caballito del carrusel está ubicado en el punto $(0, 1)$, después de 90 segundos ¿en cuál punto se ubica?

   (A) $(0, 1)$

   (B) $(-1, 0)$

   (C) $(1, 0)$

   (D) $(0, -1)$

3. El número real $t = -\dfrac{3\pi}{4}$ se asocia al siguiente punto de la circunferencia trigonométrica

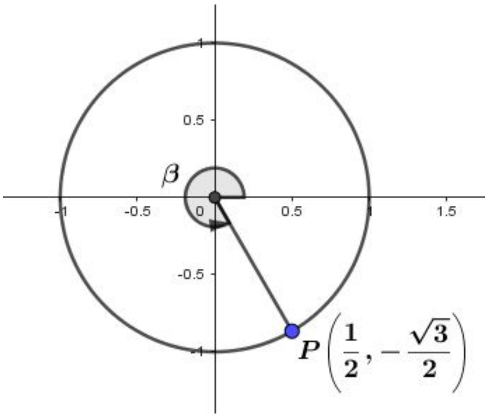
(A) $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(B) $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(C) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(D) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4. Observe la siguiente figura




Con base en la figura anterior $\beta$ toma el siguiente valor

(A) $\dfrac{\pi}{3}$

(B) $\dfrac{\pi}{6}$

(C) $\dfrac{5\pi}{3}$

(D) $-\dfrac{11\pi}{6}$

5. Si $\text{sen}(t) = \frac{3}{5}$ y $t$ pertenece al segundo cuadrante, entonces $\cot(t)$ es equivalente a

   (A) $\frac{4}{3}$

   (B) $\frac{3}{4}$

   (C) $-\frac{3}{4}$

   (D) $-\frac{4}{3}$

6. Si $\cos(t) < 0$ y $\cot(t) > 0$, ¿en cuál cuadrante se ubica el punto terminal determinado por $t$?

   (A) I

   (B) II

   (C) III

   (D) IV

7. Al calcular $\csc\left(\frac{7\pi}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ se obtiene

   (A) $\sqrt{3}$

   (B) $-\sqrt{3}$

   (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

   (D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. El resultado de efectuar $\sec\left(\dfrac{19\pi}{6}\right)+\cot\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$

(A) $\sqrt{3}$

(B) $-\sqrt{3}$

(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

9. El dominio máximo de la función definida por $f(x)=\tan(x)$ corresponde a

(A) $\mathbb{R}$

(B) $\mathbb{R}-\,]-1,1[$

(C) $\mathbb{R}-\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

(D) $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

10. Considere las siguientes afirmaciones sobre las funciones $f$ y $g$ definidas en su dominio máximo cuyos criterios son $f(x)=csc(x)$
y $g(x)=\cot(x)$

I. $f$ es una función impar.

II. El rango de la función $g$ es $\mathbb{R}$.

III. El período de la función $g$ es $2\pi$.

¿Cuales son verdaderas?

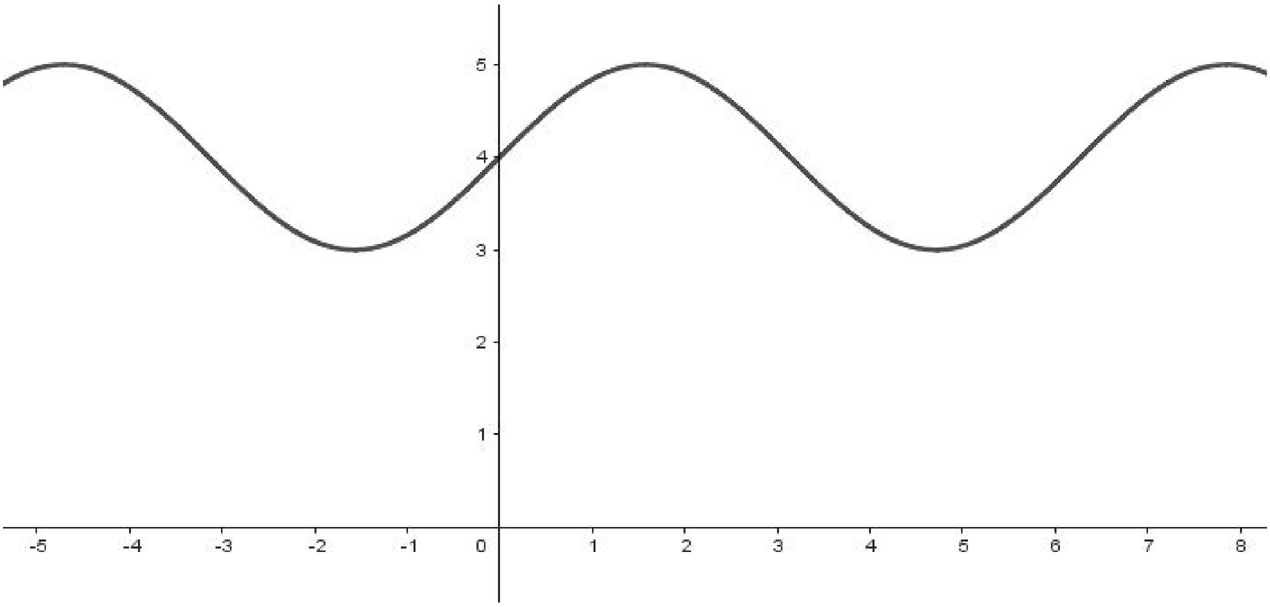
(A) Solo I

(B) I y II

(C) II y III

(D) I y III

11. Observe la siguiente gráfica de la función $f$ que corresponde a una transformación de la función seno.




¿Cuál es el criterio de la función $f$?

(A) $f(x) = \text{sen}(x-4)$

(B) $f(x) = \text{sen}(x) - 4$

(C) $f(x) = \text{sen}(x) + 4$

(D) $f(x) = \text{sen}(x+4)$

12. Al calcular $\dfrac{\text{sen}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\text{sen}^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)}$ se obtiene el siguiente resultado

(A) $\sqrt{2}$

(B) $\dfrac{3}{2}$

(C) $\dfrac{3}{4}$

(D) $\dfrac{1}{2}$

13. Considere las siguientes afirmaciones:

   I. $\csc(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$

   II. $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

   III. $\sec(-x) = -\sec(x)$

   ¿Cuáles son verdaderas?

   (A) I y III

   (B) I y II

   (C) II y III

   (D) Solo II

14. ¿Cuál es el valor exacto de $\cos(45°) \cdot \cos(15°) - \operatorname{sen}(45°) \cdot \operatorname{sen}(15°)$?

   (A) $\dfrac{1}{2}$

   (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   (C) $-\dfrac{1}{2}$

   (D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

15. La expresión $\dfrac{\cot(x) \cdot \sec(x)}{\csc(x)}$ es equivalente a

   (A) $\tan^2(x)$

   (B) $\cot^2(x)$

   (C) 1

   (D) 0

16. Si se sabe que $\tan(\alpha) = \sqrt{3}$ y $\alpha$ está en el tercer cuadrante, entonces al calcular $\tan(2\alpha)$ se obtiene

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\sqrt{3}$

(D) $-\sqrt{3}$

17. La expresión $[\text{sen}(\theta) + \cos(\theta)]^2$ es equivalente a

(A) 1

(B) $1 + \text{sen}(2\theta)$

(C) $1 + \text{sen}(\theta)\cos(\theta)$

(D) $1 - \cos(2\theta)$

18. La expresión $(1 - \cos\beta)(1 + \cos\beta)$ es equivalente a

(A) $\frac{1}{\csc^2\beta}$

(B) $\frac{1}{\sec^2\beta}$

(C) $\csc^2\beta$

(D) $\sec^2\beta$

## II Parte. Respuesta Breve.

Valor: 13 puntos

A continuación se le presentan 13 ítems. Anote en el espacio en blanco la opción que responda correctamente cada uno. Indique la respuesta en la hoja de respuestas.

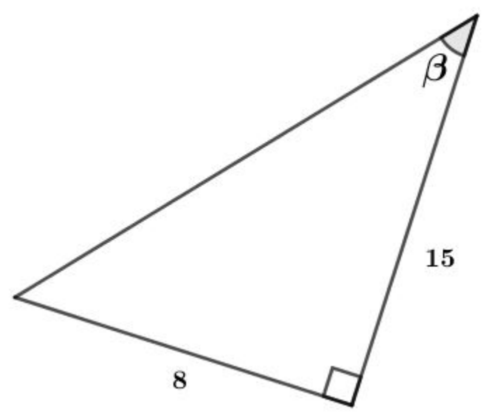
1. ¿Cuál es el punto terminal en la circunferencia trigonométrica determinado por el número real $t = 3\pi$?

   $(-1, 0)$

2. Proponga un ejemplo de un punto que pertenece a la circunferencia trigonométrica

   Cualquier $P(x, y)$ que satisfaga $x^2 + y^2 = 1$

3. Considere la siguiente figura




   Con base en la figura anterior, determine:

   (a) $\cos(\beta)$

   $\frac{15}{17}$

   (b) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$

   $\frac{15}{8}$

   (c) $\csc(\beta)$

   $\frac{17}{8}$

4. Considere la función $g$ definida por $g(x) = \text{sen}(x)$ ¿Cuál es un punto de intersección de la gráfica de $g$ con el eje $X$?

   Cualquiera de la forma $(k\pi, 0); k \in \mathbb{R}$

5. Considere la función $f$ definida por $f(x) = 6\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{3\pi}{2}\right) + 8$. Para esta función determine:

   (a) ¿Cuál es la amplitud?

   6

   (b) ¿Cuál es el período?

   4

   (c) ¿De cuántas unidades es el desplazamiento horizontal?

   3

   (d) ¿Cuál es el rango?

   $[2, 14]$

6. Al calcular $\cos^{-1}\left(\cos\left(\dfrac{17\pi}{6}\right)\right)$ se obtiene el siguiente resultado

   $\dfrac{5\pi}{6}$

7. ¿Por qué no existe la inversa de $\text{sen} : \mathbb{R} \longrightarrow R$, pero sí la de $\text{sen} : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$?

   La primera no cumple la condición de ser biyectiva, pero la segunda sí.

8. ¿Cuántas soluciones distintas tiene la ecuación $\text{sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$?

   2

## III Parte. Desarrollo. Valor: 14 puntos

A continuación se le presentan 2 ejercicios. Resuélvalos de manera clara, correcta y ordenada. Deben aparecer todos los procedimientos necesarios para resolver cada uno de ellos.

1. Halle, en $\mathbb{R}$, el conjunto solución de la siguiente ecuación (exprese los valores en radianes). 7 puntos

$$2\operatorname{sen}^2(\theta) - 3\operatorname{sen}(\theta) - 2 = 0$$

$2\operatorname{sen}^2(\theta) - 3\operatorname{sen}(\theta) - 2 = 0 = 0$

$\Leftrightarrow (2\operatorname{sen}(\theta) + 1)(\operatorname{sen}(\theta) - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}(\theta) + 1 = 0 \vee \operatorname{sen}(\theta) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(\theta) = -\dfrac{1}{2} \vee \operatorname{sen}(\theta) = 2$

Se analiza cada una

- $\operatorname{sen}(\theta) = 2 \Rightarrow S = \varnothing$ $(*)$
- $\operatorname{sen}(\theta) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{7\pi}{6}$ y $\theta = \dfrac{11\pi}{6}$ (dado que la función seno es negativa en el tercer y cuarto cuadrante).
  En general $\theta = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ y $\theta = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ $(**)$

De $*$ y $**$ el conjunto solución corresponde a

$$S = \left\{\theta \in \mathbb{R} : \theta = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee \theta = \frac{11\pi}{6} + 2k; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2. Halle, en $[0, 2\pi]$, el conjunto solución de la siguiente ecuación (exprese los valores en radianes). 7 puntos

$$\tan(2\theta)\cos(\theta) - \cos(\theta) + \tan(2\theta) - 1 = 0$$

$\tan(2\theta)\cos(\theta) - \cos(\theta) + \tan(2\theta) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos(\theta)(\tan(2\theta) - 1) + (\tan(2\theta) - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos\theta + 1)(\tan(2\theta) - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos\theta + 1 = 0 \vee \tan(2\theta) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos(\theta) = -1 \vee \tan(2\theta) = 1$

Se analiza cada una

- $\cos(\theta) = 1 \Rightarrow \theta = \pi$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ solo presenta esa solución $(*)$
- $\tan(2\theta) = 1 \Rightarrow 2\theta = \dfrac{\pi}{4}$ y en general $2\theta = \dfrac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}k; k \in \mathbb{Z}$

  Para obtener los valoresparticulares del intervalo $[0, 2\pi]$ se asignan los valores de $k = 0, 1, 2, 3$ de donde se tiene que $\theta = \dfrac{\pi}{8}, \dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{9\pi}{8}, \dfrac{13\pi}{8}$
  $(**)$

De $*$ y $**$ el conjunto solución corresponde a

$S = \left\{\pi, \dfrac{\pi}{8}, \dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{9\pi}{8}, \dfrac{13\pi}{8}\right\}$