TEC | Tecnológico de Costa Rica

Escuela de Matemática

Nivelación en Matemática I Parte

Proyecto Éxito Académico en Matemática

2021

En este libro digital se incluyen enlaces a diferentes sitios web, los autores no se hacen responsables si el o los autores o administradores del sitio referenciado eliminan, bloquean o modifican el contenido de la página.

Las imágenes que se utilizan en este libro digital fueron diseñadas por el departamento de Comunicación Visual del Instituto Tecnológico de Costa Rica o bien por sus autores.

Créditos

Colaboraron los estudiantes:

- Alcázar Chavarria Bryan Alonso
- Binns Sánchez Eduardo
- Camacho Zamora Richard
- Chinchilla Chinchilla Michelle
- Durán Silva Rolando Andrés
- Gómez Ramírez María José
- Guillén Méndez Jean Carlo
- Hernández López Carmen Aracely
- Madrigal Ramírez Yislein
- Porras Clarke Karin
- Ramírez Obando Bryan Josué
- Rigioni Esquivel Pablo
- Rodriguez Flores Ariana
- Segura Siles Verónica
- Solís Zúñiga Armando Gabriel

Coordinación académica y revisión:

- Figueroa Flores Nuria
- López Mora Verónica
- Sánchez Fernández Ivonne

Prefacio

El Proyecto Éxito Académico surgió en el año 2006 como un plan desarrollado en las Escuelas de Matemática de las universidades estatales en coordinación con los departamentos o unidades de asesoría estudiantil o psicoeducativa, liderados por la Comisión de Vicerrectores de Vida Estudiantil del Consejo Nacional de Rectores (CONARE).

Este proyecto tiene como objetivo apoyar el mejoramiento de los procesos de enseñanza aprendizaje en el sistema educativo universitario estatal costarricense por medio del impulso de actividades que desarrollen destrezas, competencias prácticas y actitudes favorables de los y las estudiantes hacia el estudio. En sus orígenes Éxito Académico en el TEC se denominó Proyecto Rendimiento Académico en Matemática (RAMA), pues únicamente contemplaba la participación de las Escuelas de Matemática, pero ahora incluye a la Escuela de Química y a la de Física. Cada ciclo lectivo las escuelas brindan talleres semanales como apoyo a los cursos básicos de cada escuela.

En el año 2017 se decide ampliar la oferta y brindar a los estudiantes de primer ingreso un taller de nivelación alrededor de contenidos que son clave para enfrentar con éxito su primer curso de matemática universitaria.

El presente documento es elaborado para el proceso de nivelación para estudiantes de primer ingreso al TEC, recopila contenidos que serán profundizados en los cursos Matemática Elemental, Matemática General y Matemática Básica para Administración. Tomó como base parte del material elaborado por los profesores pensionados Alcides Astorga y Julio Rodríguez. La primera parte abarca nociones básicas de números reales, expresiones algebraicas y factorización de polinomios. Su segunda parte incluye resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, función lineal y función cuadrática, gráficas de funciones lineales y cuadráticas. Invitamos al lector a prestar especial atención a los ejemplos desarrollados y a ejecutar los ejercicios propuestos.

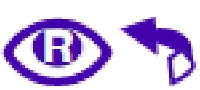
En la comunidad Éxito Académico-Matemática de la plataforma TEC Digital encontrará material adicional (libros, folletos, videos, exámenes de semestres anteriores) para complementar su estudio.

Cualquier consulta diríjase su tutor o bien escribiendo un correo a la dirección tecexitoacademico@tec.ac.cr

MSc. Nuria V. Figueroa Flores
Coordinación Académica
Escuela de Matemática

Licda. Verónica López Mora
Coordinación Académica
Escuela de Matemática

A lo largo de este documento se utilizan una serie de imágenes y símbolos para representar secciones determinadas. A continuación, mostramos los significados de las mismas.

Símbolo	**Sección**	**Descripción**
	Lee con atención	Los párrafos que siguen son de lectura cuidadosa, incluye elementos importantes para el desarrollo de los ejemplos.
	Video	Al dar clic, tendrá acceso a la resolución paso a paso del ejemplo propuesto. Procure comprender el detalle que se muestra en el documento antes de observar el video.
	Listado de ejercicios	Señala el inicio de la sección de ejercicios propuestos.
	Importante	Este símbolo acompaña elementos que son relevantes para los siguientes ejemplos.
	Ver respuesta	Al dar clic este icono te dirige a la respuesta del ejercicio
	Regresar a ejercicio	Este icono regresa al ejercicio cuya respuesta acompaña.

Índice general

1 **Operaciones con Números Reales** — Página 2

1.1 Potencias 4
 1.1.1 Leyes de potencias 5
1.2 Radicales 9
 1.2.1 Radical de un número positivo 10
 1.2.2 Radical de un número negativo 10
 1.2.3 Leyes de Radicales 11
1.3 Valor absoluto 17
 1.3.1 Propiedades del valor absoluto 21
1.4 Ejercicios 23

2 **Expresiones Algebraicas** — Página 25

2.1 Monomios 25
2.2 Sumas y restas de monomios 26
2.3 Suma y resta de polinomios 28
 2.3.1 Multiplicación de monomios 29
 2.3.2 Multiplicación de polinomios 30
 2.3.3 Productos notables 31
2.4 División de expresiones algebraicas 34
 2.4.1 División monomio entre monomio 34
 2.4.2 División polinomio entre monomio 37
 2.4.3 División polinomio entre polinomio 38
 2.4.4 División Sintética 42
2.5 Ejercicios 45

3 **Factorización de Polinomios** — Página 47

3.1 Factor común 48
3.2 Factorización por productos notables 50
3.3 Factorización por Agrupación 53

3.4 Factorización de polinomios cuadráticos 55
3.4.1 Completación de cuadrados 55
3.4.2 Factorización por fórmula general 57
3.4.3 Inspección o tanteo 60
3.5 Factorización de polinomios de grado mayor que 2, con coeficientes enteros 63
3.6 Esquema de factorización 67
3.7 Ejercicios 68

4 Simplificación de fracciones algebraicas Página 71
4.1 Multiplicación y división de fracciones algebraicas 73
4.2 Suma y resta de fracciones algebraicas 75
4.3 Operaciones combinadas 78
4.4 Ejercicios 79

5 Racionalización Página 80
5.1 Racionalización de expresiones algebraicas 80
5.1.1 Caso I 81
5.1.2 Caso II 83
5.1.3 Caso III 86
5.2 Ejercicios 90

6 Soluciones a los ejercicios Página 91

Capítulo 1

Operaciones con Números Reales

Primero vamos a recordar características de algunos conjuntos antes de empezar a trabajar con las operaciones sobre los números reales.

a) **Conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$**: Los números naturales son los números que utilizamos para contar, el conjunto formado por estos números se denota por $\mathbb{N}$. Es un conjunto infinito, posee un primer elemento y se puede escribir por extensión como:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

b) **Conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$**: El conjunto de los números enteros es un conjunto que resulta de ampliar $\mathbb{N}$. Este conjunto,denotado por $\mathbb{Z}$, además del cero incluye números enteros negativos y positivos. Es un conjunto infinito, pero no posee un primer elemento. Se escribe por extensión como:

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

c) **Conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$**: El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}$. Reúne a todas las fracciones que podemos formar al tomar como numerador y denominador elementos de $\mathbb{Z}$, con la restricción de no dividir por cero. Es un conjunto infinito, no posee un primer elemento, pero tiene la característica que entre dos de sus elementos siempre encontraremos otro. Esto es, entre dos fracciones (cualesquiera) siempre encontraremos otra fracción. Con esto decimos que el conjunto es denso. Se define por compresión como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \right\}$$

Podemos decir que los elementos de $\mathbb{Q}$ son números cuya expansión decimal es finita o bien periódica. El siguiente conjunto contiene números racionales:

$$\left\{-1.\overline{31}, -1, \frac{-1}{2}, 0, 2.75, 7.13\overline{01}, 1000\right\}$$

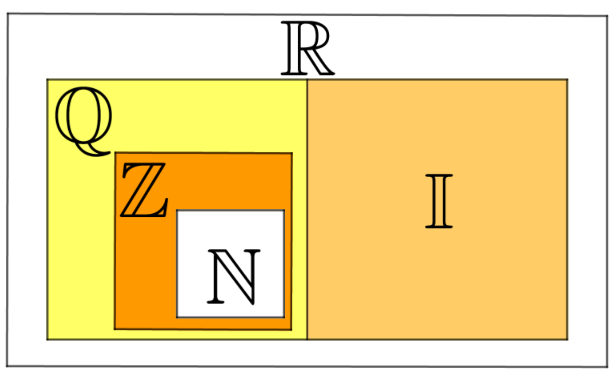
d) **Conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$**: El conjunto de los números irracionales reúne a todos aquellos números que poseen una expansión decimal infinita y no periódica. El siguiente conjunto está formado por números irracionales:

$$\left\{-\sqrt{50}, -5.23625..., \sqrt{3}, e, \pi, 102.368...\right\}$$

Con lo anterior podemos establecer que:

- En el conjunto de los números naturales está incluido el conjunto de los números enteros, esto lo escribimos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- El conjunto de los números enteros está incluido en los números racionales, por lo que escribimos $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- Los números reales $\mathbb{R}$ es la unión de los números racionales y los irracionales, así que escribimos $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

De esta forma, podemos afirmar que cualquier número natural, entero, racional o irracional es un número real.



Tal como vimos en primaria y secundaria, con los números reales podemos realizar operaciones combinadas haciendo uso de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias y radicales.
Para realizar estas operaciones es importante recordar que respetamos el orden de lectura, este es de izquierda a derecha, y dando prioridad como sigue:

Primero: Resolver las operaciones dentro de paréntesis (), llaves [ ] y corchetes {} en ese orden.

Segundo: Resolver potencias y radicales.

Luego: Resolver multiplicaciones y divisiones.

Finalmente: Resolver sumas y restas.

Cabe mencionar que la prioridad de las operaciones se pueden aplicar tanto para expresiones aritméticas como para expresiones algebraicas.

A continuación seguiremos con las definiciones y principales propiedades para potencias, radicales y valor absoluto lo que nos permite resolver luego operaciones combinadas con números reales.

1.1 Potencias

Antes de dar la definición de potencia analicemos las siguiente igualdades:

1) $5 + 5 + 5 = 5 \cdot 3 = 15$

2) $\underbrace{9 + 9 + \ldots + 9}_{8 \text{ veces}} = 9 \cdot 8 = 72$

3) $\underbrace{-2 + -2 + \ldots + -2}_{n \text{ veces}} = -2 \cdot n = -2n$

Los ejemplos anteriores recuerdan que la multiplicación es una forma abreviada de la suma. Al multiplicar, se suma un factor tantas veces como lo dice el segundo factor. Note que en el ejemplo 1) el 5 se suma 3 veces.

Una potencia es una forma abreviada de la multiplicación. Como puede observarse en los ejemplos que siguen la base se multiplica por si misma tantas veces como lo indica el exponente.

Ejemplo 1.1

1) $(-7)^4 = \underbrace{(-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7)}_{4 \text{ veces}}$

2) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{50} = \underbrace{\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2}{3}}_{50 \text{ veces}}$

Ejemplo 1.2

1) $(-7)^4 = \underbrace{(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)}_{4 \text{ veces}}$

2) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{50} = \underbrace{\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2}{3}}_{50 \text{ veces}}$

Generalizando los ejemplos anteriores, se obtiene la definición de potencias:

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Denominamos a como base, y es un número real diferente de cero $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. El valor n es un número entero.
Para realizar operaciones con potencias es necesario conocer sus leyes y adquirir la habilidad para aplicarlas, por medio de la práctica constante.

1.1.1 Leyes de potencias

Las leyes de potencias son indispensables para realizar y simplificar expresiones, estas pueden ser aritméticas o algebraicas. A continuación tenemos una lista de las principales propiedades de las potencias.

Propiedades Importantes

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$

1) $a^1 = a$

2) $a^0 = 1, a \neq 0$

3) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

4) $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$

5) $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}, a \neq 0$

6) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} a \neq 0$

7) $(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, si $a^n \in \mathbb{R}$ y $b^n \in \mathbb{R}$

8) $\left[\dfrac{a}{b}\right]^n = \dfrac{a^n}{b^n}, b \neq 0$

Seguidamente se presentan ejemplos resueltos, analice con cuidado cada paso de la resolución, en ellos se utilizan las leyes de potencias para simplificar al máximo las expresiones:

Ejemplo 1.3

Simplifique al máximo la siguiente expresión

$$\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 2^4}{3^2 \cdot 2^7}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 2^4}{3^2 \cdot 2^7} &= \frac{2^2 \cdot 2^4 \cdot 3^5}{2^7 \cdot 3^2} \\
&= \frac{2^6 \cdot 3^5}{2^7 \cdot 3^2} \\
&= \frac{2^6}{2^7} \cdot \frac{3^5}{3^2} \\
&= 2^{6-7} \cdot 3^{5-2} \\
&= 2^{-1} \cdot 3^3 \\
&= \frac{1}{2} \cdot 3^3 \\
&= \frac{1}{2} \cdot 27 \\
&= \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 2^4}{3^2 \cdot 2^7} = \frac{27}{2}$$

Ejemplo 1.4

Simplifique al máximo la siguiente expresión

$$\frac{-3^{-2}}{\left(1+\frac{4}{3}\right)^{2}}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{-3^{-2}}{\left(1+\frac{4}{3}\right)^{2}} &= \frac{-3^{-2}}{\left(\frac{3+4}{3}\right)^{2}} \\
&= \frac{\frac{-1}{(3)^2}}{\left(\frac{7}{3}\right)^{2}} \\
&= \frac{\frac{-1}{9}}{\frac{7^2}{3^2}} \\
&= \frac{\frac{-1}{9}}{\frac{49}{9}} \\
&= \frac{(-1)(9)}{(9)(49)} \\
&= \frac{-1}{49}
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{-3^{-2}}{\left(1+\frac{4}{3}\right)^{2}} = \frac{-1}{49}$$

Ejemplo 1.5

Simplifique al máximo la siguiente expresión

$$\frac{-25^6 \cdot 14^{10} \cdot (-4)^0}{(-7)^{10} \cdot 10^{10}}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{-25^6 \cdot 14^{10} \cdot (-4)^0}{(-7)^{10} \cdot 10^{10}} &= \frac{-(25)^6 \cdot (2 \cdot 7)^{10} \cdot 1}{(-7)^{10} \cdot (2 \cdot 5)^{10}} \\
&= \frac{-(5^2)^6 \cdot 2^{10} \cdot 7^{10}}{7^{10} \cdot 2^{10} \cdot 5^{10}} \\
&= \frac{-(5^{12}) \cdot 2^{10} \cdot 7^{10}}{5^{10} \cdot 2^{10} \cdot 7^{10}} \\
&= \frac{-(5^{12})}{5^{10}} \cdot \frac{2^{10}}{2^{10}} \cdot \frac{7^{10}}{7^{10}} \\
&= -(5^{12-10}) \cdot 2^{10-10} \cdot 7^{10-10} \\
&= -(5^2) \cdot 2^0 \cdot 7^0 \\
&= -(25) \cdot 1 \cdot 1 \\
&= -25
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{-25^6 \cdot 14^{10} \cdot (-4)^0}{(-7)^{10} \cdot 10^{10}} = -25$$

Ejemplo 1.6

Simplifique al máximo la siguiente expresión

$$\frac{2^{-3} \cdot 14^{-2} \cdot 7^2}{2^{-5}}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{2^{-3} \cdot 14^{-2} \cdot 7^2}{2^{-5}} &= \frac{2^5 \cdot 7^2}{2^3 \cdot 14^2} \\
&= \frac{2^5 \cdot 7^2}{2^3 \cdot (2 \cdot 7)^2} \\
&= \frac{2^5 \cdot 7^2}{2^3 \cdot 2^2 \cdot 7^2} \\
&= \frac{2^5}{2^3 \cdot 2^2} \\
&= \frac{2^5}{2^5} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{2^{-3} \cdot 14^{-2} \cdot 7^2}{2^{-5}} = 1$$

1.2 Radicales

La operación inversa de la potenciación es la radicación. Para establecer esto analicemos los siguientes ejemplos:

1) $\sqrt{4} = 2$, pues $2^2 = 4$

2) $\sqrt[3]{-27} = -3$ pues $(-3)^3 = -27$

3) $\sqrt[5]{1024} = 4$ pues $(4)^5 = 1024$

4) $\sqrt[6]{729} = 3$ pues $(3)^6 = 729$

Con base en ellos, £puede asegurarse que $\sqrt{-25} = -5$? £Por qué?

1.2.1 Radical de un número positivo

La raíz enésima de a, denotada por $\sqrt[n]{a}$, es número real positivo b que cumple que $b^n = a$; es decir:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

En donde:

- a es un número real positivo $(a \in \mathbb{R})$y se le conoce como subradical.
- n es un número natural mayor o igual que 2, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$. Es el índice del radical.
- b es la raíz enésima obtenida, que en este caso, es un resultado positivo.

En el ejemplo 3) listado arriba tenemos que el subradical es 1024, el índice es 5 y que la raíz quinta de 1024 es 4.

1.2.2 Radical de un número negativo

Los radicales de números negativos solo tienen sentido si su índice es un número impar. Esto por cuanto la raíz enésima de a, denotada por $\sqrt[n]{a}$, es número real negativo b si su enésima potencia es negativa también. Recordemos de la definición que:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

Así que:

- Si a es un número real negativo, b^n debe ser negativo también.
- Lo anterior tiene sentido solo si el índice n es un número natural **impar**, $n \geq 3$.
- b es la raíz enésima obtenida es un resultado negativo.

Importante

Anteriormente se preguntó si era posible afirmar que $\sqrt{-25} = -5$. Analicemos con detalle la situación.
Supongamos que existe un número real b tal que $b = \sqrt{-25}$; esto equivale, por la definición que dimos antes, a decir que $b^2 = -25$. Pero la potencia b^2 es siempre un resultado positivo (de hecho todo número real elevado a una potencia par dará como resultado un número positivo), con lo cual no existe un número real b que cumpla dicha igualdad.
En conclusión, sobre el conjunto $\mathbb{R}$ no es posible definir una raíz de índice par con un subradical negativo.

Así como las potencias tienen leyes nos permiten hacer operaciones con expresiones que involucran números reales, también se cuenta con leyes para los radicales.

1.2.3 Leyes de Radicales

Las leyes de radicales también son indispensables para realizar operaciones con expresiones aritméticas y algebraicas que los involucren. A continuación se va a presentar una lista de las principales leyes para ellos.

Tome en cuenta que las siguientes propiedades son válidas para a y b números **reales positivos**, m y n números enteros positivos mayores que uno.

Propiedades Importantes

Considere $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+$, con $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ son mayores que 1.

1) $\sqrt[n]{a^n} = a$
2) $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$
3) $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, si n es impar.
4) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$
5) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
6) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$
7) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p\cdot n]{a^{p\cdot m}}$, con $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$.
8) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[p\cdot n]{a})^{p\cdot m}$

En el siguiente ejemplo, analice con cuidado cada paso de la resolución. En él se utilizan las leyes de radicales para simplificar al máximo la expresión:

Ejemplo 1.7

Simplifique al máximo la siguiente expresión:

$$\sqrt[5]{\frac{2^{10}}{3^{15}}} = \frac{4}{27}$$

Solución

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{\frac{2^{10}}{3^{15}}} &= \frac{\sqrt[5]{2^{10}}}{\sqrt[5]{3^{15}}} \\ &= \frac{2^{\frac{10}{5}}}{3^{\frac{15}{5}}} \\ &= \frac{2^2}{3^3} \\ &= \frac{4}{27}\end{aligned}$$

Respuesta

$$\sqrt[5]{\frac{2^{10}}{3^{15}}} = \frac{4}{27}$$

Operaciones con radicales

Para realizar operaciones de suma, resta, multiplicación y división con números reales que involucren radicales, es necesario aplicar las siguientes propiedades:

Propiedades Importantes

Las siguientes propiedades son válidas siempre y cuando los radicales involucrados puedan calcularse.

1) $c\sqrt[n]{a} + d\sqrt[n]{a} = (c+d)\sqrt[n]{a}$

2) $c\sqrt[n]{a} \cdot d\sqrt[n]{b} = cd\sqrt[n]{ab}$.

3) $(c\sqrt[n]{a}) \div (b\sqrt[n]{d}) = \dfrac{c\sqrt[n]{a}}{d\sqrt[n]{b}} = \dfrac{c}{d}\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, con $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

En los siguientes ejemplos, analice con cuidado cada paso de la resolución. Se utilizarán las propiedades de operaciones con radicales para simplificar al máximo las expresiones dadas.

Ejemplo 1.8

Simplifique al máximo la siguiente expresión:

$$2\sqrt[3]{6}-4\sqrt[4]{6}+5\sqrt[3]{-6}+\sqrt[4]{6}$$

Solución

$$\begin{aligned}
2\sqrt[3]{6}-4\sqrt[4]{6}+5\sqrt[3]{-6}+2\sqrt[4]{6} &= (2\sqrt[3]{6}+5\sqrt[3]{-6})+(-4\sqrt[4]{6}+\sqrt[4]{6})\\
&= (2\sqrt[3]{6}-5\sqrt[3]{6})+(-4\sqrt[4]{6}+\sqrt[4]{6})\\
&= (2-5)\sqrt[3]{6}+(-4+1)\sqrt[4]{6}\\
&= -3\sqrt[3]{6}+(-3)\sqrt[4]{6}\\
&= -3\sqrt[3]{6}-3\sqrt[4]{6}
\end{aligned}$$

Respuesta

$$2\sqrt[3]{6}-4\sqrt[4]{6}+5\sqrt[3]{-6}+\sqrt[4]{6}=-3\sqrt[3]{6}-3\sqrt[4]{6}$$

Ejemplo 1.9

Simplifique al máximo la siguiente expresión:

$$\frac{1}{4}\sqrt[3]{2^5\cdot 3^4}+2\sqrt[3]{2^8\cdot 3}-\sqrt[3]{2^6\cdot 3^4}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sqrt[3]{2^5\cdot 3^4}+2\sqrt[3]{2^8\cdot 3}-\sqrt[3]{2^6\cdot 3^4} &= \frac{1}{4}\sqrt[3]{2^3\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 3^1}+2\sqrt[3]{2^8\cdot 3}-\sqrt[3]{2^6\cdot 3^4}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{2^2\cdot 3}+2\cdot\sqrt[3]{2^6}\cdot\sqrt[3]{2^2\cdot 3}-\sqrt[3]{2^6}\cdot\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}\\
&= \frac{1}{4}\cdot 2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{2^2\cdot 3}+2\cdot 2^{\frac{6}{3}}\cdot\sqrt[3]{4\cdot 3}-2^{\frac{6}{3}}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{3}\\
&= \frac{6}{4}\cdot\sqrt[3]{12}+2\cdot 2^2\cdot\sqrt[3]{12}-2^2\cdot 3\sqrt[3]{3}\\
&= \frac{3}{2}\sqrt[3]{12}+8\sqrt[3]{12}-12\sqrt[3]{3}\\
&= \left(\frac{3}{2}+8\right)\sqrt[3]{12}-12\sqrt[3]{3}\\
&= \frac{19}{2}\sqrt[3]{12}-12\sqrt[3]{3}
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{1}{4}\sqrt[3]{2^5\cdot 3^4}+2\sqrt[3]{2^8\cdot 3}-\sqrt[3]{2^6\cdot 3^4}=\frac{19}{2}\sqrt[3]{12}-12\sqrt[3]{3}$$

Ejemplo 1.10

Simplifique al máximo la siguiente expresión:

$$\sqrt{4^2 + \left(\frac{5}{15}\right)^{-2} + \frac{11^{20}}{11^{19}}}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt{4^2 + \left(\frac{5}{15}\right)^{-2} + \frac{11^{20}}{11^{19}}} &= \sqrt{16 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + 11^{20-19}} \\
&= \sqrt{16 + 3^2 + 11} \\
&= \sqrt{16 + 9 + 11} \\
&= \sqrt{36} \\
&= 6
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\sqrt{4^2 + \left(\frac{5}{15}\right)^{-2} + \frac{11^{20}}{11^{19}}} = 6$$

Ejemplo 1.11

Simplifique al máximo la siguiente expresión:

$$\sqrt[3]{(1+3)^2} \cdot \sqrt[3]{(3-1)^2}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{(3+1)^2} \cdot \sqrt[3]{(3-1)^2} &= \sqrt[3]{(4)^2} \cdot \sqrt[3]{(2)^2} \\
&= \sqrt[3]{(2^2)^2} \cdot \sqrt[3]{(2)^2} \\
&= \sqrt[3]{(2)^4} \cdot \sqrt[3]{(2)^2} \\
&= \sqrt[3]{(2)^4 \cdot (2)^2} \\
&= \sqrt[3]{(2)^6} \\
&= (2)^2 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\sqrt[3]{(1+3)^2} \cdot \sqrt[3]{(3-1)^2} = 4$$

Ejemplo 1.12

Simplifique al máximo la siguiente expresión:

$$\frac{\left[\left(-(-3)^{-2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)\right]^{-2}}{\left[\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}}\right)^{4}\right]^{3}}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{\left[\left(-(-3)^{-2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)\right]^{-2}}{\left[\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}}\right)^{4}\right]^{3}} &= \frac{\left[\left(-\frac{1}{(-3)^{2}}+\frac{2}{3}\right)\right]^{-2}}{\left[\left(\sqrt[6]{3}\right)^{4}\right]^{3}} \\
&= \frac{\left[-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}\right]^{-2}}{\left(\sqrt[6]{3}\right)^{12}} \\
&= \frac{\left[\frac{-1+6}{9}\right]^{-2}}{\sqrt[6]{3^{12}}} \\
&= \frac{\left(\frac{5}{9}\right)^{-2}}{3^{2}} \\
&= \frac{\frac{81}{25}}{9} \\
&= \frac{81}{9\cdot 25} \\
&= \frac{9}{25}
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{\left[\left(-(-3)^{-2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)\right]^{-2}}{\left[\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}}\right)^{4}\right]^{3}} = \frac{9}{25}$$

Note que en todos los ejemplos anteriores hemos realizado operaciones con radicales que mostraban el mismo índice. Ahora nos hacemos la pregunta, £cómo realizamos multiplicación de radicales con índices distintos? para ello necesitamos hacer cambio de índice, utilizaremos el siguiente teorema en esto.

Teorema

Sea $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, sea k el mínimo común múltiplo (m.c.m) entre m y n, lo denotamos como: $(m, n) = k$, y sean $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+$ entonces:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[k]{a^{\frac{k}{m}} \cdot b^{\frac{k}{n}}}$$

A continuación, se presenta un ejemplo del uso de este teorema. Analice con cuidado cada paso de la resolución.

Ejemplo 1.13

Simplifique al máximo la siguiente expresión: $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2}$

Solución

Para este caso el m.m.c de los índices de las raíces es $(2, 3) = 6$ entonces:

$$\begin{aligned} \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2} &= \sqrt[6]{5^{\frac{6}{2}} \cdot 2^{\frac{6}{3}}} \\ &= \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2} \\ &= \sqrt[6]{125 \cdot 4} \\ &= \sqrt[6]{500} \end{aligned}$$

Respuesta

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{500}$$

También es importante mencionar que algunas de las leyes de potencias se aplican cuando los exponentes de las potencias son números racionales, como se muestra a continuación:

Propiedades Importantes

Considere $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+$, con m, n, p números enteros no nulos.

1) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

2) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

3) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$

4) $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$, con $a \neq 0$

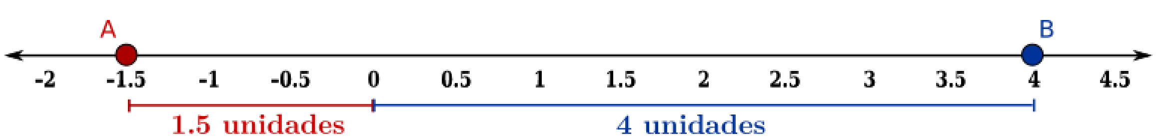
5) $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$, con $a \neq 0$

6) $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$

7) $\left[\dfrac{a}{b}\right]^{\frac{m}{n}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$, con $b \neq 0$

1.3 Valor absoluto

Ahora para continuar realizando operaciones con los números reales necesitamos recordar el concepto de valor absoluto de un número real.
En la siguiente imagen representamos el conjunto de los números reales como puntos sobre una recta. En esta recta numérica hemos señalado varios puntos, el punto A correspondiente con el número -1.5 y el punto B con 4.



Note que, si se mide la distancia entre -1.5 y 0, ella corresponde con 1.5 unidades. Lo mismo sucede al medir entre 0 y 4, donde la distancia es de 4 unidades.
Estos son ejemplos que brindan una idea geométrica del valor absoluto, donde para cualquier número real x su valor absoluto corresponde con la distancia entre dicho número y el cero.

Formalmente, el valor absoluto de un número real x, denotado por $|x|$, se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Aplicando la definición anterior a dichos puntos tenemos:

- $|4| = 4$
- $|-1.5| = -(-1.5) = 1.5$

Seguidamente se desarrollarán ejemplos aplicando la definición de valor absoluto, en expresiones más complejas:

Ejemplo 1.14

Considere $|x-3|$, con $x \in \mathbb{R}$. Analice los posibles resultados de esta expresión.
Solución
Al ser x desconocido debemos utilizar la definición de valor absoluto para determinar su valor. Aplicando la definición de valor absoluto tenemos:

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{si} \quad x-3 < 0 \end{cases}$$

lo cual equivale a

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}$$

Respuesta
Así, en el caso que $x \geq 3$ la expresión $|x-3|$ sería equivalente a $x-3$, y en el caso que $x < 3$, la expresión $|x-3|$ sería equivalente a $-(x-3)$, esto es $-x+3$.

Ejemplo 1.15

Determine el valor de la expresión

$$\left|2\sqrt{2}-3\right|$$

Solución Para resolver este ejercicio primero debemos encontrar el signo de la expresión que se encuentra dentro del valor absoluto. Como a simple vista no sabemos cuál de los dos términos de la expresión es mayor, vamos a analizar de forma separada sus cuadrados.

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$$

$$(3)^2 = 9$$

Ahora como la relación de elevar al cuadrado es creciente para números positivos, esto es si tenemos $0 < a < b$ se cumple que $a^2 < b^2$, podemos concluir que:

$$2\sqrt{2} < 3$$

De donde tenemos:

$$2\sqrt{2}-3 < 0$$

Dado que el resultado corresponde con un número negativo, el valor absoluto cambiará su signo:

$$\left|2\sqrt{2}-3\right| = -\left(2\sqrt{2}+3\right)$$

Respuesta

$$\left|2\sqrt{2}-3\right| = 3-2\sqrt{2}$$

Ejemplo 1.16

Determine el valor de la siguiente expresión

$$\left|\sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{7}\right|$$

Solución
Note que en este caso tenemos dos radicales con diferente índice, por lo que vamos a reescribirlas para que coincidan.

Para encontrar el nuevo valor de los índices calculamos el mínimo común múltiplo (m.c.m) entre los índices de las raíces. En este caso m.c.m$(3,4) = 12$. Buscaremos entonces que el nuevo índice sea 12.

De las propiedades para radicales que enunciamos en la sección anterior tenemos que $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$, esta propiedad nos permite reescribir los radicales como sigue:

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[3\cdot 4]{5^4} = \sqrt[12]{5^4}$$

y

$$\sqrt[4]{7} = \sqrt[4\cdot 3]{7^3} = \sqrt[12]{7^3}$$

Por lo tanto, la expresión original es equivalente a:

$$\left|\sqrt[12]{5^4} - \sqrt[12]{7^3}\right|$$

Ahora, dado que:

$$(\sqrt[12]{5^4})^{12} = 5^4 = 625$$

y

$$(\sqrt[12]{7^3})^{12} = 7^3 = 343$$

Podemos concluir que

$$\sqrt[12]{5^4} > \sqrt[12]{7^3}$$

De donde

$$\sqrt[12]{5^4} - \sqrt[12]{7^3} > 0$$

y por tanto

$$\sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{7} > 0$$

Así hemos determinado que la diferencia es positiva, con lo cual el valor absoluto $\left|\sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{7}\right|$ queda $\sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{7}$.

Respuesta

$$\left|\sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{7}\right| = \sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{7}$$

1.3.1 Propiedades del valor absoluto

A continuación presentamos las propiedades básicas del valor absoluto.

Propiedades Importantes

Sean x y y números reales cualesquiera, entonces:

1) $|x| \geq 0$

2) $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$

3) $|-x| = |x|$

4) $|x - y| = |y - x|$

5) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

6) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, con $y \neq 0$

7) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Ahora podemos ampliar una propiedad de los radicales que establecimos antes para números reales positivos, pero que con el valor absoluto podemos considerarla para cualquier número real $a \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \qquad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Note que con esto ahora tiene sentido la igualdad $\sqrt{25} = \sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

Finalizaremos este capítulo con un ejercicio resuelto que utiliza algunas de las propiedades que hemos establecido para simplificar una expresión más compleja.

Ejemplo 1.17

Efectúe las operaciones y simplifique la expresión:

$$\left|\sqrt{54} - 8\right| - 2\left|5 - \sqrt{24}\right| + \sqrt{(3 - \sqrt{6})^2}$$

Solución
Vamos a analizar cada valor absoluto por separado:

- Para $\left|\sqrt{54}-8\right|$ veamos el siguiente razonamiento que permite deducir el signo de $\sqrt{54}-8$.

$$\begin{aligned} 54<64 &\Rightarrow \sqrt{54}<\sqrt{64} \\ &\Rightarrow \sqrt{54}<8 \\ &\Rightarrow \sqrt{54}-8<0 \end{aligned}$$

  Así por definición de valor absoluto, $|\sqrt{54}-8| = -(\sqrt{54}-8)$.

- De forma análoga analizaremos $|5-\sqrt{24}|$.

$$\begin{aligned} 24<25 &\Rightarrow \sqrt{24}<\sqrt{25} \\ &\Rightarrow \sqrt{24}<5 \\ &\Rightarrow 5-\sqrt{24}>0 \end{aligned}$$

  Entonces $|5-\sqrt{24}| = (5-\sqrt{24})$.

- Ahora tenemos $\sqrt{(3-\sqrt{6})^2} = |3-\sqrt{6}|$, siguiendo el proceso anterior tenemos:

$$\begin{aligned} 6<9 &\Rightarrow \sqrt{6}<\sqrt{9} \\ &\Rightarrow \sqrt{6}<3 \\ &\Rightarrow 3-\sqrt{6}>0 \end{aligned}$$

  Así $|3-\sqrt{6}| = (3-\sqrt{6})$.

Finalmente integramos los resultados obtenidos:

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{54}-8\right| - 2\left|5-\sqrt{24}\right| + \sqrt{(3-\sqrt{6})^2} &= -(\sqrt{54}-8) - 2(5-\sqrt{24}) + |3-\sqrt{6}| \\ &= -(3\sqrt{6}-8) - 2(5-2\sqrt{6}) + (3-\sqrt{6}) \\ &= -3\sqrt{6}+8-10+4\sqrt{6}+3-\sqrt{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Respuesta

$$\left|\sqrt{54}-8\right| - 2\left|5-\sqrt{24}\right| + \sqrt{(3-\sqrt{6})^2} = 1$$

1.4 Ejercicios

Simplifique al máximo cada una de las siguientes expresiones haciendo uso de las leyes de potencias:

1.4.1 $\dfrac{(-3)^7 \cdot 3^9}{(-3)^{15} \cdot 3^4}$

1.4.2 $\dfrac{-3 \cdot 4^{-1} + 1 + 2 \cdot 4^{-2}}{4^{-1} - 2 \cdot 4^{-2}}$

1.4.3 $\dfrac{\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{-5^2}{4}}$

1.4.4 $\dfrac{10^{-2} \cdot 6^{-30} \cdot 35^{11} \cdot 49^4}{(-14)^{20} \cdot (-12)^{-31}}$

Utilice las leyes de potencias y radicales para simplificar al máximo las siguientes expresiones:

1.4.5 $\sqrt[3]{\dfrac{-125}{343}}$

1.4.6 $\sqrt[5]{\dfrac{243}{3125}}$

Exprese los radicales involucrados en cada una de las siguientes expresiones en su forma más simple y realice las operaciones indicadas:

1.4.7 $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$

1.4.8 $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{24} + \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{375} + \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{1029}$

1.4.9 $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \sqrt{4}}{\sqrt[4]{16}}$

1.4.10 $\sqrt[3]{9^3 \cdot 3^{-3}} \cdot \sqrt[3]{63 + 32 \cdot 2^{-5}}$

1.4.11 $\sqrt{\dfrac{1}{16}} \cdot \sqrt[3]{-27} \div \dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{-2}{3}\right)^{-3}$

1.4.12 $\dfrac{\left[2^{-2} + \frac{-9}{5}\left(5^0 - 2^{-1} \div 3\right)\right]^2}{12 - \left(\sqrt[3]{-8} \cdot -\frac{27}{8} + \frac{1}{4}\right)}$

1.4.13 $3\sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{8} - \sqrt{(\sqrt{8} - 14)^2} - \dfrac{7^6 \cdot 3\sqrt{2}}{3^2 \cdot 7^5}$

1.4.14 Determine el resultado de simplificar la expresión, donde $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.

$$\frac{6^{-5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot -n^0}{\left(\sqrt[3]{3\sqrt{27}}\right)^2 - 3\sqrt[6]{81} + (-3)^{-11}}$$

Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones y exprese el resultado en su forma simple:

1.4.15 $\sqrt[7]{9} \cdot \sqrt[3]{36}$

1.4.16 $\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[3]{-5}$

1.4.17 $-\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{36}$

Simplifique las siguientes expresiones numéricas:

1.4.18 $\dfrac{|1-\sqrt{5}| \cdot \frac{\sqrt{5}}{6^9}}{\frac{3^{-8}}{2^9} + \left(\frac{1}{3}\right)^9} + \dfrac{\sqrt{5}}{2^9+3}$

1.4.19 $\left|3\sqrt{5} - \sqrt{80} + 2\right| - \sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$

Capítulo 2

Expresiones Algebraicas

Estamos utilizando expresiones algebraicas cada vez que trabajamos con expresiones formadas por **variables** (símbolo que puede representar distintos valores en $\mathbb{R}$) y **constantes** (valor permanente que no puede modificarse que representa un número real fijo) mediante sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o potencias.

Algunos ejemplos de expresiones algebraicas son:

- $3\sqrt{2}xy$
- $\dfrac{2x + 38y^2 - z^4}{25x^2 + z}$
- $-5x^{\frac{5}{2}}\sqrt{\alpha}$
- 6546
- ab^2c^3

De entre las muchas formas de expresiones algebraicas, nos interesa estudiar en específico a los monomios y a los polinomios. En la siguiente sección repasaremos sus características y realizaremos operaciones con ellos.

2.1 Monomios

Se llama **monomio** a la expresión algebraica compuesta por variables y constantes que se multiplican, donde los exponentes de las variables deben ser enteros positivos. Las constantes reciben el nombre de **factor numérico**; mientras que las variables se denominan **factor literal**.

Algunos ejemplos de monomios son:

Monomio	Factor numérico	Factor literal
$5x^2$	5	x^2
$\dfrac{7b^3c^5}{4}$	$\dfrac{7}{4}$	b^3c^5
$-mn^3$	-1	mn^3
$\dfrac{8}{5}$	$\dfrac{8}{5}$	cualquier variable con potencia 0

Con los monomios se pueden realizar sumas, restas, multiplicaciones o divisiones. En los siguientes apartados se desarrollará con más detalle la manera correcta para resolver estas operaciones.

2.2 Sumas y restas de monomios

Para realizar sumas o restas de monomios, estos deben tener el mismo factor literal (las mismas variables en las mismas potencias). A estos monomios los llamamos **monomios semejantes**. Si por el contrario no comparten exactamente el mismo factor literal les llamamos **monomios no semejantes**. Observemos los siguientes ejemplos:

1) Los monomios $\frac{1}{7}yz^2$, yz^2, $-4yz^2$ son semejantes entre sí.

2) Los monomios $3a^2m^3x$, $2a^2m^2$, $\frac{a^2m}{2}$ no son semejantes entre sí.

Se puede notar que en el ejemplo 1), los monomios son semejantes pues tienen exactamente el mismo factor literal yz^2. Por otro lado, en el ejemplo 2) no son semejantes, dado que a pesar que el factor $a2$ se repite en cada monomio hay otros factores distintos que lo acompañan.

La definición de monomios semejantes y no semejantes nos permite establecer otros conceptos:

- Si se suman o restan dos monomios no semejantes, la expresión resultante se llama **binomio**. Por ejemplo, $3x^2 - x$ es un binomio. Note que los factores literales de cada monomio son distintos, por lo tanto no se puede realizar la resta entre ellos.

- Si se suman o restan tres monomios no semejantes, la expresión resultante se llama **trinomio**. Por ejemplo, $4b^3 + 5bn - 2n^2$ es un trinomio.

- Por último, si se suman o restan cuatro o más monomios no semejantes, la expresión resultante se llama **polinomio**. Por ejemplo, $-5ab + 2y^2x - \frac{1}{5}x + 25a^4$ es un polinomio.

Importante

Para denotar binomios, trinomios o polinomios, se suelen utilizar letras mayúsculas. Así por ejemplo, podemos indicar:
Considere los polinomios $P(x)$ y $A(y)$ tales que $P(x) = 2x^3 + 5x - 2$, $A(y) = -9y + 3$.
Y con esto referirnos a operaciones con ellos, por ejemplo la evaluación:
$P(0)$ y $A(1)$ se refieren al valor numérico que se obtiene al sustituir la variable por el número indicado. En este caso $P(0) = -2$ y $A(1) = -6$.

Para **sumar monomios ellos deben ser semejantes**, así podemos considerar los coeficientes de cada uno y realizar las operaciones que corresponda con ellos. A continuación se presentará un ejemplo de esto, además se mencionará el tipo de expresión resultante.

Ejemplo 2.1

Efectúe las operaciones según corresponda

$$2xy^2 + 4xy^2 - 5xy^2 - \frac{3}{2}xy^2$$

Solución

$$2xy^2 + 4xy^2 - 5xy^2 - \frac{3}{2}xy^2$$

Notemos que se trata de cuatro monomios semejantes que se están sumando y restando.
Así que mantenemos el factor literal y vamos a realizar las operaciones con los factores numéricos:

$$\begin{aligned} &= \left(2 + 4 - 5 - \frac{3}{2}\right) xy^2 \\ &= -\frac{1}{2}xy^2 \end{aligned}$$

Respuesta

$$2xy^2 + 4xy^2 - 5xy^2 - \frac{3}{2}xy^2 = -\frac{xy^2}{2}$$

Note que $-\dfrac{xy^2}{2}$ es un monomio

2.3 Suma y resta de polinomios

Para efectuar la suma y resta de polinomios es necesario agrupar los monomios semejantes entre sí y emplear de forma adecuada la prioridad de las operaciones que habíamos listado antes. En los siguientes ejemplos preste atención al uso de los paréntesis para agrupar términos semejantes en el proceso de resolución.

Ejemplo 2.2

Realice las operaciones indicadas y escriba el resultado en la forma más simple.

$$14x - (3x - 2) - [5x + 2 - (x - 1)]$$

Solución

$$\begin{aligned} 14x - (3x - 2) - [5x + 2 - (x - 1)] &= 14x - 3x + 2 - [5x + 2 - x + 1] \\ &= 14x - 3x + 2 - [4x + 3] \\ &= 14x - 3x + 2 - 4x - 3 \\ &= (14x - 3x - 4x) + (2 - 3) \\ &= 7x - 1 \end{aligned}$$

Respuesta

$$14x - (3x - 2) - [5x + 2 - (x - 1)] = 7x - 1$$

Ejemplo 2.3

Realice las operaciones indicadas en la siguiente expresión:

$$(-4x^3y + 19xy^3 - y^3 + 6a^2b^2) - (-y^2 - 40xy^3 + 2a^2b^2 - 15x^3y)$$

Solución

$$\begin{aligned} &= -4x^3y + 19xy^3 - y^3 + 6a^2b^2 + y^2 + 40xy^3 - 2a^2b^2 + 15x^3y \\ &= (-4x^3y + 15x^3y) + (19xy^3 + 40xy^3) - y^3 + (6a^2b^2 - 2a^2b^2) + y^2 \\ &= 11x^3y + 59xy^3 - y^3 + 4a^2b^2 + y^2 \end{aligned}$$

Respuesta

$$(-4x^3y + 19xy^3 - y^3 + 6a^2b^2) - (-y^2 - 40xy^3 + 2a^2b^2 - 15x^3y) = 11x^3y + 59xy^3 - y^3 + 4a^2b^2 + y^2$$

2.3.1 Multiplicación de monomios

Para la realización de productos de dos o más monomios, es necesario la aplicación de las leyes de potencias, así como recordar conceptos básicos como la multiplicación de fracciones. Con el fin de mostrar un proceso más claro vamos primero a agrupar los factores numéricos y los factores literales de los monomios involucrados.

Ejemplo 2.4

Determine el resultado de realizar la siguiente multiplicación.

$$3x^2y^3(5xy^2z - 3x^3 + 7y^2z^2)$$

Solución

$$\begin{aligned} 3x^2y^3(5xy^2z - 3x^3 + 7y^2z^2) &= (3x^2y^3 \cdot 5xy^2z - 3x^2y^3 \cdot 3x^3 + 3x^2y^3 \cdot 7y^2z^2) \\ &= 15x^3y^5z - 9x^5y^3 + 21x^2y^5z^2 \end{aligned}$$

$$3x^2y^3(5xy^2z - 3x^3 + 7y^2z^2) = 15x^3y^5z - 9x^5y^3 + 21x^2y^5z^2$$

Respuesta

Ejemplo 2.5

Realice la operación indicada en la siguiente expresión:

$$\left(\frac{-2xy}{3}\right)(\sqrt{3}xy^2)\left(\frac{3}{2}ax^3y\right)$$

Solución

$$\begin{aligned} \left(\frac{-2xy}{3}\right)(\sqrt{3}xy^2)\left(\frac{3}{2}ax^3y\right) &= \left(\frac{-2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}\right)(xy \cdot xy^2 \cdot ax^3y) \\ &= \frac{-6\sqrt{3}}{6}(x^5y^4a) \\ &= -\sqrt{3}ay^4x^5 \end{aligned}$$

Respuesta

$$\left(\frac{-2xy}{3}\right)(\sqrt{3}xy^2)\left(\frac{3}{2}ax^3y\right) = -\sqrt{3}ay^4x^5$$

2.3.2 Multiplicación de polinomios

Para realizar multiplicaciones entre polinomios utilizaremos la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma, así realizaremos el producto entre dos polinomios término a término, esto significa que multiplicaremos monomios por monomios. Analice cuidadosamente los pasos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.6

Determine el resultado de la siguiente multiplicación entre polinomios:

$$(2x+y)(x-y)$$

Solución

$$\begin{aligned}(2x+y)(x-y) &= (2x+y)\cdot x-(2x+y)\cdot y\\ &= (2x\cdot x+y\cdot x)-(2x\cdot y+y\cdot y)\\ &= 2x^2+xy-2xy-y^2\\ &= 2x^2-xy-y^2\end{aligned}$$

Respuesta

$$(2x+y)(x-y)=2x^2-xy-y^2$$

Ejemplo 2.7

Determine el resultado de la siguiente multiplicación entre polinomios:

$$(x-7y+1)(2x^2y-3xy^2+5xy)$$

Solución

$$\begin{aligned}&(x-7y+1)(2x^2y-3xy^2+5xy)\\ &= (x-7y+1)\cdot 2x^2y-(x-7y+1)\cdot 3xy^2+(x-7y+1)\cdot 5xy\\ &= (x\cdot 2x^2y-7y\cdot 2x^2y+1\cdot 2x^2y)-(x\cdot 3xy^2-7y\cdot 3xy^2+1\cdot 3xy^2)+(x\cdot 5xy-7y\cdot 5xy+1\cdot 5xy)\\ &= (2x^3y-14x^2y^2+2x^2y)-(3x^2y^2-21xy^3+3xy^2)+(5x^2y-35xy^2+5xy)\\ &= 2x^3y-14x^2y^2+2x^2y-3x^2y^2+21xy^3-3xy^2+5x^2y-35xy^2+5xy\\ &= 2x^3y-17x^2y^2+7x^2y+21xy^3-38xy^2+5xy\end{aligned}$$

Respuesta

$$(x-7y+1)(2x^2y-3xy^2+5xy)=2x^3y-17x^2y^2+7x^2y+21xy^3-38xy^2+5xy$$

2.3.3 Productos notables

Los productos notables, también llamados fórmulas notables, nos permiten disminuir la cantidad de los procedimientos involucrados al realizar multiplicaciones de polinomios que cumplen con cierta forma particular. A continuación se van a mostrar algunas de las productos notables más utilizados.

Propiedades Importantes

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

4) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

6) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

7) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

Para comprender la equivalencia de estas igualdades veamos el proceso que involucra la primera de dichas fórmulas.

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\
&= (a+b)a + (a+b)b\\
&= (a\cdot a + b\cdot a) + (a\cdot b + b\cdot b)\\
&= a^2 + ba + ab + b^2\\
&= a^2 + ab + ab + b^2\\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}$$

En los siguientes ejemplos vamos a utilizar las fórmulas notables al realizar operaciones combinadas de suma, resta y multiplicación con polinomios.

Ejemplo 2.8

Realice la siguiente operación utilizando fórmulas notables

$$\left(4x^2y + \frac{1}{2}\right)^2$$

Solución

Recordemos que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, entonces

$$\begin{aligned}\left(4x^2y + \frac{1}{2}\right)^2 &= (4x^2y)^2 + 2\cdot(4x^2y)\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\\ &= (4x^2y)^2 + 4x^2y + \frac{1}{4}\\ &= 16x^4y^2 + 4x^2y + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Respuesta

$$\left(4x^2y + \frac{1}{2}\right)^2 = 16x^4y^2 + 4x^2y + \frac{1}{4}$$

Ejemplo 2.9

Realice la siguiente operación utilizando fórmulas notables

$$(x+1)^3 - (x-1)^3$$

Solución

Recordemos que

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

entonces se tiene que $(x+1)^3 - (x-1)^3$ es equivalente a

$$\begin{aligned}&= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1\\ &= 6x^2 + 2\end{aligned}$$

Respuesta

$$(x+1)^3 - (x-1)^3 = 6x^2 + 2$$

Ejemplo 2.10

Efectúe la siguiente operación

$$(3x^2+y^2)(9x^4+3x^2y^2+y^4)$$

Solución

$$\begin{aligned}(3x^2+y^2)(9x^4+3x^2y^2+y^4) &= 3x^2(9x^4+3x^2y^2+y^4)+y^2(9x^4+3x^2y^2+y^4)\\ &= 3x^2\cdot 9x^4+3x^2\cdot 3x^2y^2+3x^2\cdot y^4+y^2\cdot 9x^4+y^2\cdot 3x^2y^2+y^2\cdot y^4\\ &= 18x^6+9x^4y^2+3x^2y^4+9x^4y^2+3x^2y^4+y^6\\ &= 18x^6+18x^4y^2+6x^2y^4+y^6\end{aligned}$$

Respuesta

$$(3x^2+y^2)(9x^4+3x^2y^2+y^4)=18x^6+18x^4y^2+6x^2y^4+y^6$$

Ejemplo 2.11

Desarrolle y simplifique la siguiente expresión:

$$(x^n+1)^3-x^{3n}+2(x^n+1)$$

Solución
Recordemos que

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Entonces

$$\begin{aligned}(x^n+1)^3-x^{3n}+2(x^n+1) &= (x^{3n}+3x^{2n}+3x^n+1)-x^{3n}+(2x^n+2)\\ &= x^{3n}+3x^{2n}+3x^n+1-x^{3n}+2x^n+2\\ &= 3x^{2n}+5x^n+3\end{aligned}$$

Respuesta

$$(x^n+1)^3-x^{3n}+2(x^n+1)=3x^{2n}+5x^n+3$$

Antes de finalizar esta sección es importante mencionar una herramienta matemática de gran utilidad denominada **el triángulo de Pascal**, la cual permite ejemplificar la expansión de los productos notables a a potencias mayores de las aquí mostradas. Puede observarse como se construye en el siguiente video.

2.4 División de expresiones algebraicas

Para realizar divisiones entre expresiones algebraicas vamos a partir de la división entre monomios para luego pasar a dividir polinomios. En este proceso debemos tener presente las leyes de potencias y el algoritmo de la división que aprendimos en primaria.

2.4.1 División monomio entre monomio

Para realizar la división entre monomios se dividen los coeficiente como números reales que son, mientras que para los factores literales se siguen las leyes de potencias. Analice los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.12

Determine el el cociente de la división

$$(84x^3b^4y^6) \div (12xb^4)$$

Solución

$$\begin{aligned}(84x^3b^4y^6) \div (12xb^4) &= \frac{84x^3b^4y^6}{12xb^4}\\ &= \frac{84}{12} \cdot \frac{x^3b^4y^6}{xb^4}\\ &= 7x^{(3-1)}b^{(4-4)}y^6\\ &= 7x^2y^6\end{aligned}$$

Respuesta

$$(84x^3b^4y^6) \div (12xb^4) = 7x^2y^6$$

Ejemplo 2.13

Simplifique la siguiente expresión:

$$\frac{72x^4y^3}{48x^2y^5}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{72x^4y^3}{48x^2y^5} &= \frac{2^3 \cdot 3 \cdot 3x^4y^3}{2^3 \cdot 3 \cdot 2x^2y^5} \\
&= \frac{3x^4y^3}{2x^2y^5} \\
&= \frac{3x^4x^{-2}}{2y^5y^{-3}} \\
&= \frac{3x^2}{2y^2}
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{72x^4y^3}{48x^2y^5} = \frac{3x^2}{2y^2}$$

Decimos que un cociente está completamente factorizado si cumple las siguientes condiciones:

1) La fracción formada por los coeficientes de los monomios involucrados está expresada en su forma más simple.

2) Las variables que aparecen en el numerador son diferentes de las que aparecen en el denominador y no se repiten.

3) Las potencias de las variables involucradas tienen exponentes positivos.

Ejemplo 2.14

Determine el el cociente de la división

$$(-21xy^3z^3) \div (14xy^2z^5)$$

Solución

$$\begin{aligned}
(-21xy^3z^3) \div (14xy^2z^5) &= \frac{-21xy^3z^3}{14xy^2z^5} \\
&= \frac{-21}{14} \cdot x^{(}1-1)y^{(}3-2)z^{(}3-5) \\
&= \frac{-3}{2}yz^{-2} \\
&= \frac{-3y}{2z^2}
\end{aligned}$$

Respuesta

$$(-21xy^3z^3) \div (14xy^2z^5) = \frac{-3y}{2z^2}$$

Ejemplo 2.15

Simplifique la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt[3]{3}x^4y^5z}{\sqrt[3]{81}x^4y^7z}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{3}x^4y^5z}{\sqrt[3]{81}x^4y^7z} &= \frac{\sqrt[3]{3}x^4y^5z}{\sqrt[3]{3^4}x^4y^7z} \\
&= \frac{\sqrt[3]{3}x^4y^5z}{3\sqrt[3]{3}x^4y^7z} \\
&= \frac{x^4y^5z}{3x^4y^7z} \\
&= \frac{x^4x^{-4}zz^{-1}}{3y^7y^{-5}} \\
&= \frac{x^0z^0}{3y^7y^{-5}} \\
&= \frac{1}{3y^2}
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{\sqrt[3]{3}x^4y^5z}{\sqrt[3]{81}x^4y^7z} = \frac{1}{3y^2}$$

En los ejemplos anteriores se pone en evidencia que el cociente que se obtiene al dividir dos monomios no es necesariamente un monomio.

2.4.2 División polinomio entre monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio dividiremos cada término del polinomio entre el monomio.

Ejemplo 2.16

Divida el polinomio $P(x) = 2xy^5 + 4xy^4 - 8xy^2z^2$ entre el monomio $-2xy^3$.

Solución

$$\begin{aligned} P(x) \div (-2xy^3) &= \frac{2xy^5 + 4xy^4 - 8xy^2z^2}{-2xy^3} \\ &= \frac{2xy^5}{-2xy^3} + \frac{4xy^4}{-2xy^3} - \frac{8xy^2z^2}{-2xy^3} \\ &= -y^2 - 2y + 4\frac{z^2}{y} \end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{2xy^5 + 4xy^4 - 8xy^2z^2}{-2xy^3} = -y^2 - 2y + 4\frac{z^2}{y}$$

Ejemplo 2.17

Determine el cociente que se obtiene al dividir el polinomio $P(x) = x^{3n+1} - x^{2n+2} + 2x^{n+3}$ entre x^n donde $n \in \mathbb{N}$.

Solución

$$\begin{aligned} P(x) \div (x^n) &= \frac{x^{3n+1} - x^{2n+2} + 2x^{n+3}}{x^n} \\ &= \frac{x^{3n+1}}{x^n} - \frac{x^{2n+2}}{x^n} + \frac{2x^{n+3}}{x^n} \\ &= x^{3n+1-n} - x^{2n+2-n} + 2x^{n+3-n} \\ &= x^{2n+1} - x^{n+2} + 2x^3 \end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{x^{3n+1} - x^{2n+2} + 2x^{n+3}}{x^n} = x^{2n+1} - x^{n+2} + 2x^3$$

Note que la distribución se puede aplicar solo cuando varios términos se dividen por un mismo denominador. Un error común es hacerlo en forma inversa, lo cual no tiene sentido.

Recuerde que

$$\frac{2}{a+b+c} \neq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}$$

Ejemplo 2.18

Determine el cociente que se obtiene al dividir $(a^{2m+4} + 2a^{2m+3})$ entre a^{m+2} donde $m \in \mathbb{N}$.

Solución

$$\begin{aligned}
(a^{2m+4} + 2a^{2m+3}) \div (a^{m+2}) &= \frac{a^{2m+4} + 2a^{2m+3}}{a^{m+2}} \\
&= \frac{a^{2m+4}}{a^{m+2}} + 2\frac{a^{2m+3}}{a^{m+2}} \\
&= a^{2m+4-(m+2)} + 2a^{2m+3-(m+2)} \\
&= a^{m+2} + 2a^{m+1}
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{a^{2m+4} + 2a^{2m+3}}{a^{m+2}} = a^{m+2} + 2a^{m+1}$$

2.4.3 División polinomio entre polinomio

Para realizar la división entre polinomios es necesario recordar la división con números naturales

$$\begin{array}{rr|l}
 & 7 & 2 \\ \cline{3-3}
- & 6 & 3 \\ \cline{1-2}
 & 1 &
\end{array}$$

En este tipo de divisiones tenemos un **dividendo**, en el ejemplo anterior es el 7, un **divisor** que sería el 2, un **cociente** que corresponde al 3 y un **residuo** que sería el 1. Esto nos permite mostrar la división de varias maneras:

$$7 \div 2 = 3 + (1 \div 2)$$
$$\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$

e incluso reescribir $7 = 2 \cdot 3 + 1$.

Las divisiones con polinomios también cuentan con estos elementos que permiten reescribir expresiones algebraicas. Para lograr una mayor comprensión vamos a recordar el algoritmo de la división.

Teorema 2.1

Algoritmo de la división.
Dados dos polinomios $A(x)$ y $B(x)$, con $B(x) \neq 0$, existen dos únicos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Esta relación se puede denotar también como:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

donde el grado del polinomio $R(x)$ es menor estricto que el grado del polinomio $B(x)$ o bien $R(x) = 0$.

El polinomio $A(x)$ es el dividendo, $B(x)$ el divisor, $Q(x)$ el cociente y $R(x)$ el residuo.

Los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ se obtienen al efectuar la división de $A(x)$ entre $B(x)$ mediante el siguiente procedimiento.

Procedimiento para efectuar la división de $A(x)$ entre $B(x)$.

1) Ordenamos los polinomios $A(x)$ y $B(x)$ en forma descendente de acuerdo con grado de cada polinomio.

2) Ahora se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor. Este resultado, que llamaremos resultado parcial, pasa a formar parte del cociente.

3) Multiplicamos el resultado parcial por todos los términos del divisor y lo restamos al dividendo.

4) Si el residuo obtenido en el paso anterior es cero o de grado menor que el divisor, ahí terminó el procedimiento. En caso contrario se repiten los pasos 1, 2 y 3, pero tomando como dividendo el residuo obtenido en el paso anterior.

A continuación se presentarán algunos ejemplos de como efectuar divisiones entre polinomios usando ese procedimiento.

Ejemplo 2.19

Sea $A(x) = x^3 - 5x^2 + x - 1$ y $B(x) = x - 1$.
Efectúe la división de $A(x)$ por $B(x)$, e indique el cociente y el residuo.

Solución

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -5x^2 & +x & -1 & x-1 \\ \cline{5-5}
 & & & & x^2-4x-3 \\
-x^3 & +x^2 & & & \\ \cline{1-2}
 & -4x^2 & +x & & \\
 & 4x^2 & -4x & & \\ \cline{2-3}
 & & -3x & -1 & \\
 & & 3x & -3 & \\ \cline{3-4}
 & & & -4 &
\end{array}
$$

Así, se tiene que el cociente $Q(x)$ que se obtuvo es $x - 5$ y el residuo $R(x)$ es -4.

Respuesta

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{x^3 - 5x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 - 4x - 3 - \frac{4}{x - 1}$$

Ejemplo 2.20

Sea $A(x) = x^3 - 5x^2 + x - 1$ y $B(x) = x^2 + 1$.
Efectúe la división de $A(x)$ por $B(x)$, e indique el cociente y el residuo.

Solución

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -5x^2 & +x & -1 & x^2+1 \\ \cline{5-5}
 & & & & x-5 \\
-x^3 & & -x & & \\ \cline{1-3}
 & -5x^2 & & -1 & \\
 & 5x^2 & & +5 & \\ \cline{2-4}
 & & & 4 &
\end{array}
$$

Así, se tiene que el cociente $Q(x)$ que se obtuvo es $x - 5$ y el residuo $R(x)$ es 4.

Respuesta

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{x^3 - 5x^2 + x - 1}{x^2 + 1} = x - 5 + \frac{4}{x^2 + 1}$$

Ejemplo 2.21

Sea $A(x) = 6x^5 - 5x^4 - 7x^2 + 3$ y $B(x) = 3x^3 - 4x^2 - x + 1$.
Efectúe la división de $A(x)$ por $B(x)$, e indique el cociente y el residuo.

Solución

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
6x^5 & -5x^4 & & -7x^2 & & +3 & 3x^3-4x^2-x+1 \\ \cline{7-7}
 & & & & & & 2x^2+x+2 \\
-6x^5 & +8x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & \\ \cline{1-4}
 & 3x^4 & +2x^3 & -9x^2 & & & \\
 & -3x^4 & +4x^3 & +x^2 & -x & & \\ \cline{2-5}
 & & 6x^3 & -8x^2 & -x & +3 & \\
 & & -6x^3 & +8x^2 & +2x & -2 & \\ \cline{3-6}
 & & & & x & +1 &
\end{array}
$$

Así, se tiene que el cociente $Q(x)$ que se obtuvo es $2x^2 + x + 2$ y el residuo $R(x)$ es $x + 1$.

Respuesta

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{6x^5 - 5x^4 - 7x^2 + 3}{3x^3 - 4x^2 - x + 1} = 2x^2 + x + 2 + \frac{x + 1}{3x^3 - 4x^2 - x + 1}$$

Ejemplo 2.22

Considere $A(x) = x^4 + x^6 - 2x^3 + 20 - x$ y $B(x) = x^2 + 2 - 4x$.
Realice la división de $A(x)$ entre $B(x)$, e indique el cociente y el residuo.

Solución
Para aplicar el procedimiento debemos primero ordenar los polinomios en forma descendente. Además, note que el polinomio $A(x)$ es grado 6, pero no presenta monomios de grado 5 ni grado 2, por ello vamos a reservar los espacios de aquellos términos ausentes, pues es probable que surjan en el proceso de división.

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^6 & & +x^4 & -2x^3 & & -x & +20 & x^2-4x+2 \\ \cline{8-8}
 & & & & & & & x^4+4x^3+15x^2+50x+170 \\
-x^6 & +4x^5 & -2x^4 & & & & & \\ \cline{1-3}
 & 4x^5 & -x^4 & -2x^3 & & & & \\
 & -4x^5 & +16x^4 & -8x^3 & & & & \\ \cline{2-4}
 & & 15x^4 & -10x^3 & & & & \\
 & & -15x^4 & +60x^3 & -30x^2 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & 50x^3 & -30x^2 & -x & & \\
 & & & -50x^3 & +200x^2 & -100x & & \\ \cline{4-6}
 & & & & 170x^2 & -101x & +20 & \\
 & & & & -170x^2 & +680x & -340 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & 579x & -320 &
\end{array}
$$

Así, se tiene que el cociente $Q(x)$ que se obtuvo es $x^4 + 4x^3 + 15x^2 + 50x + 170$ y el residuo $R(x)$ es $579x - 320$.

Respuesta

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{x^6 + x^4 - 2x^3 - x + 20}{x^2 - 4x + 2} = x^4 + 4x^3 + 15x^2 + 50x + 170 + \frac{579x - 320}{x^2 - 4x + 2}$$

2.4.4 División Sintética

La división sintética es una forma abreviada de realizar la división entre polinomios de una variable cuando el divisor es un binomio de la forma $x - c$, donde $c \in \mathbb{R}$. En el proceso se utilizan los coeficientes del dividendo y el valor con el cual se anula el divisor. Como aspecto importante, debe colocarse un cero para indicar que un término del polinomio está ausente.

A continuación se va a desarrollar un ejemplo donde se muestra este tipo de división:

Ejemplo 2.23

Determine el cociente y el residuo de dividir $A(x)$ por $B(x)$ polinomios tales que

$$A(x) = 4x^3 + 5x + 2 \ ; \ \ B(x) = x - 3$$

Solución

Para realizar este es tipo de división se conforma un arreglo que incluye en la primera fila los coeficientes del polinomio $A(x)$ ordenado descendentemente, es decir los valores numéricos que acompañan a cada potencia x del dividendo, ordenado de mayor a menor. En este ejemplo como x^2 está ausente en el polinomio colocaremos un cero como su coeficiente. El arreglo queda como sigue:

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 5 & 2 & \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

En el caso del polinomio divisor $B(x)$ se debe de tomar el valor donde este se anule, para lo cual resolvemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Este valor se ubica al extremo derecho del arreglo:

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 5 & 2 & \\ & & & & 3 \\ \hline & & & & \end{array}$$

Ahora el primer valor se copia en la tercera fila. Este número se usará para formar la segunda fila en un efecto multiplicador.

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 5 & 2 & \\ \downarrow & & & & 3 \\ \hline 4 & & & & \end{array}$$

Para la segunda fila sus valores se obtienen al multiplicar el primer valor, en este ejemplo el 4, por el cero del divisor (3) y colocamos su resultado en la primera posición.

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 5 & 2 & \\ & 12 & & & 3 \\ \hline 4 & & & & \end{array}$$

Ese resultado se suma con el correspondiente valor de la columna para formar el segundo elemento de la tercera fila.

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 5 & 2 & \\ & 12 & & & 3 \\ \hline 4 & 12 & & & \end{array}$$

El proceso se repite ahora con este nuevo valor, esto es: 12 se multiplica por 3 y el resultado se coloca en la siguiente posición.

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 5 & 2 & \\ & 12 & 36 & & 3 \\ \hline 4 & 12 & & & \end{array}$$

Y volvemos a sumar.

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 5 & 2 & \\ & 12 & 36 & & 3 \\ \hline 4 & 12 & 41 & & \end{array}$$

El proceso se repite hasta completar toda las columnas.
En este ejemplo el arreglo final queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 5 & 2 & \\ & 12 & 36 & 123 & 3 \\ \hline 4 & 12 & 41 & 125 & \end{array}$$

En la tercera fila encontramos los coeficientes del cociente y el residuo. Dado que el divisor es de grado 1, el cociente corresponde con un polinomio que es exactamente un grado menor al del dividendo. En este caso tendremos que el cociente es de grado 2 y sus coeficientes serían 4, 12 y 41.

Respuesta

Entonces el polinomio cociente $Q(x)$ de esta división se forma con los primeros 3 valores obtenidos, $Q(x) = 4x^2 + 12x + 41$ y el residuo $R(x)$ es el último número de la fila, es decir $R(x) = 125$.

Ejemplo 2.24

Determine el cociente y el residuo que se obtiene al dividir
de dividir $A(x) = 2x^5 - 9x^3 + 2x^2 + x - 2$ entre $B(x) = x - 2$.

Solución

Igual que antes se toman los coeficientes del polinomio $A(x)$, colocando cero para los términos ausentes.
En este caso el valor donde se anula el divisor es 2, con lo cual el arreglo corresponde con:

$$\begin{array}{cccccc|c}
2 & 0 & -9 & 2 & 1 & -2 & \\
 & 4 & 8 & -2 & 0 & 2 & 2 \\
\hline
2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}$$

Como el dividendo es grado 5 y el divisor grado 1, el cociente que se obtiene es de grado 4 y sus coeficientes son 2, 4, -1, 0 y 1. Con lo cual su forma es $Q(x) = 2x^4 + 4x^3 - x^2 + 0x - 1$. El residuo corresponde con el último valor de la tercera fila.

Respuesta

Entonces el polinomio cociente $Q(x)$ de esta división se forma con los primeros 3 valores obtenidos, $Q(x) = 2x^4 + 4x^3 - x^2 - 1$ y el residuo $R(x)$ es cero.

2.5 Ejercicios

Realice las operaciones indicadas y simplifique al máximo.

2.5.1 $-3xy^2 + x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{2}{3}x^2y$

2.5.2 $2t - 3t + 2[t - (t + 5)] + 1$

2.5.3 $3x(2x^2 - xy) + x - x(x + 5xy)$

Realice los productos indicados y simplifique al máximo.

2.5.4 $\left(3x^2\right)\left(-x^3y\right)\left(-a^2x\right)$

2.5.5 $\left(\dfrac{-1}{2}x^2y\right)\left(\dfrac{-3}{5}xy^2\right)\left(\dfrac{10}{3}ax^3\right)$

2.5.6 $-3m^2n\left(3m^2+4m^2-3mn^2\right)$

2.5.7 $(2r^2-r)(r+1)$

2.5.8 $(x^2y^3+2)(xy-2)$

Realice las operaciones que involucran productos notables y simplifique al máximo.

2.5.9 $(-2+y)^2+(-y-3)^2-y^2$

2.5.10 $(-x-y)(-x+y)$

2.5.11 $-3(-y-x)^3-3(-x-y)^2(x-y)$

Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

2.5.12 $\dfrac{12a^2b^3}{60a^3b^5x^6}$

2.5.13 $\dfrac{\sqrt[3]{135}a^2b^3}{\sqrt[3]{40}a^3b^5x^6}$

Para cada par de polinomios $A(x)$ y $B(x)$ que se define a continuación, realice la división de $A(x)$ por $B(x)$ e indique el cociente y el residuo que se obtiene al efectuar esta división

2.5.14 $A(x)=2x^7-5x^5+8x^3+3x\ ;\ B(x)=2x^3-x$

2.5.15 $A(x)=x^3-5x^3+9+x^3\ ;\ B(x)=3-x$

2.5.16 $A(x)=2x^4-3x^3-6x^3+1-3x\ ;\ B(x)=-3x+x^2+1$

Para cada par de polinomios $A(x)$ y$B(x)$ que se definen a continuación, determine por división sintética, el cociente y el residuo que se obtiene al dividir $A(x)$ por $B(x)$:

2.5.17 $A(x)=x^5-32;\ B(x)=x-2$

2.5.18 $A(x)=-7x^2+8x+5x^3+1;\ B(x)=x-3$

2.5.19 $A(x)=x^3+27;\ B(x)=x+3$

Capítulo 3

Factorización de Polinomios

La factorización de polinomios es una herramienta fundamental para la manipulación de expresiones algebraicas. Su dominio es importante en la simplificación de fracciones algebraicas, resolución de ecuaciones y en contenidos de cursos más avanzados de matemática. Para definir factorización veamos las siguientes representaciones.

Ejemplo 3.1

a) $36 = 9 \cdot 4 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$

b) $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

c) $2431 = 11 \cdot 13 \cdot 17$

d) $\dfrac{12}{8} = \dfrac{4 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \dfrac{4}{4} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

e) $\sqrt{15} = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$

En los ejemplos anteriores, el número 36 fue representado como producto de 9 y 4, ellos son **factores** del 36. Estos valores a su vez podían expresarse como productos de $3 \cdot 3$ y $2 \cdot 2$ respectivamente. Es importante señalar que 3 y 2 son números **primos**, con lo cual la representación $3^2 \cdot 2^2$ corresponde con la factorización completa del 36. Análogamente ocurre con los demás ejemplos.Note particularmente que, en el ejemplo **d**) la factorización permitió simplificar la fracción brindada.

La factorización es un proceso que no ocurre solamente para números reales, si no también puede aplicarse con polinomios. Factorizar un polinomio significa expresarlo como el producto de dos o más polinomios de grado menor o igual al grado del polinomio original.

Suponga que tenemos tres polinomios $A(x)$, $B(x)$ y $P(x)$, con coeficientes reales que cumplen la igualdad:

$$P(x) = A(x) \cdot B(x)$$

Decimos que el producto de $A(x)$ y $B(x)$ **es una factorización** de $P(x)$. Y además que $A(x)$ y $B(x)$ son **factores de** $P(x)$. Decimos que una factorización es completa si no es posible descomponer más a un polinomio.

Existen diferentes métodos para factorizar polinomios nos referiremos específicamente a:

- Factor común
- Factorización por productos notables
- Factorización por agrupamiento
- Factorización de polinomios en una variable:
  - Completación de cuadrados
  - Usando la fórmula general
  - Inspección o tanteo
  - Factorización de polinomios de grado mayor que 2, con coeficientes enteros.

3.1 Factor común

Este método consiste en determinar el factor que está presente en todos los términos del polinomio, se le llama **factor común**, para luego utilizar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma. Este es el primer método que vamos a tomar en cuenta al momento de factorizar un polinomio. Analice con cuidado los proceso de resolución en los siguientes ejemplos donde se reescriben los términos del polinomio para evidenciar la composición del factor común.

Ejemplo 3.2

Factorice de forma completa la expresión $a^2 + ab$

Solución

$$\begin{aligned} a^2 + ab &= a \cdot a + ab \\ &= a(a+b) \end{aligned}$$

Respuesta

$$a^2 + ab = a(a+b)$$

Ejemplo 3.3

Factorice de forma completa la expresión $x^2y^3z + x^3y^2z^2$

Solución

$$\begin{aligned} x^2y^3z + x^3y^2z^2 &= x^2y^2yz + x^2xy^2zz \\ &= x^2y^2z(y + xz) \end{aligned}$$

Respuesta

$$x^2y^3z + x^3y^2z^2 = x^2y^2z(y + xz)$$

En los ejemplos anteriores se determinó el factor común considerando su composición literal, pues todos los términos tenían coeficiente 1. Ahora analicemos si los factores numéricos no son 1.

Ejemplo 3.4

Factorice de forma completa la expresión $14x^2 - 28x^3 + 56x^2y$

Solución

Para la resolución de este ejercicio es necesario determinar el máximo común divisor (m.c.d) entre los coeficientes que forman parte de cada término del polinomio. Note que tomaremos su valor absoluto para poder calcularlo.

$$\begin{array}{ccc|c} 14 & 28 & 56 & 2 \\ 7 & 14 & 28 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & \end{array}$$

Para este caso el m.c.d es el resultado de la multiplicación $7 \cdot 2 = 14$, entonces procedemos con la descomposición de cada término y así visualizar al factor común.

$$\begin{aligned} 14x^2 - 28x^3 + 56x^2y &= 14x^2 \cdot 1 - 14x^2 \cdot 2x + 14x^2 \cdot 4y \\ &= 14x^2(1 - 2x + 4y) \end{aligned}$$

Respuesta

$$14x^2 - 28x^3 + 56x^2y = 14x^2(1 - 2x + 4y)$$

Ejemplo 3.5

Factorice de forma completa la expresión $(3a + 15) - b(a + 5)$

Solución

$$\begin{aligned}(3a + 15) - b(a + 5) &= (3a + 3 \cdot 5) - b(a + 5)\\ &= 3(a + 5) - b(a + 5)\\ &= (a + 5)(3 - b)\end{aligned}$$

Respuestas

$$(3a + 15) - b(a + 5) = (a + 5)(3 - b)$$

3.2 Factorización por productos notables

Al factorizar un polinomio primero revisamos si es posible aplicar el método de factor común, luego de ello tomamos en cuenta la cantidad de términos que tiene el polinomio resultante. Recordemos que los términos se separan por sumas y restas. Si tenemos dos o tres términos, lo que sigue es revisar si tenemos una fórmula notable.

En el capítulo anterior mencionamos a los productos notables como una forma de disminuir la cantidad de operaciones para hacer multiplicaciones de cierta forma de polinomios. Ahora nos encontraremos con polinomios que corresponden con el desarrollo de un notable notable.

Propiedades Importantes

1) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

2) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

3) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

4) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

5) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Observación: La suma de cuadrados $a^2 + b^2$ **no** corresponde con un producto notable. Más aún, la suma de cuadrados no corresponde con una expresión factorizable en los números reales.

A continuación, se presentan algunos ejemplos que emplean a las fórmulas notables para factorizar polinomios.

Ejemplo 3.6

Factorice de forma completa la expresión $4x^2 + 20x + 25$

Solución

Empleando $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, se obtiene

$$\begin{aligned} 4x^2 + 20x + 25 &= (2x)^2 + 2(2x)(5) + 5^2 \\ &= (2x + 5)^2 \end{aligned}$$

Respuesta

$$4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2$$

Ejemplo 3.7

Factorice de forma completa la expresión $9x^2y^2 - 12xy + 4$

Solución

Utilizando $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, se obtiene

$$\begin{aligned} 9x^2y^2 - 12xy + 4 &= (3xy)^2 - 2(3xy)(2) + (2)^2 \\ &= (3xy - 2)^2 \end{aligned}$$

Respuesta

$$9x^2y^2 - 12xy + 4 = (3xy - 2)^2$$

Ejemplo 3.8

Factorice de forma completa la expresión $3x^2 - \frac{c^2}{25}$

Solución

Empleando $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, se obtiene

$$\begin{aligned} 3x^2 - \frac{c^2}{25} &= \left(\sqrt{3}x\right)^2 - \left(\frac{c}{5}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{3}x + \frac{c}{5}\right)\left(\sqrt{3}x - \frac{c}{5}\right) \end{aligned}$$

Respuesta

$$3x^2 - \frac{c^2}{25} = \left(\sqrt{3}x + \frac{c}{5}\right)\left(\sqrt{3}x - \frac{c}{5}\right)$$

Ejemplo 3.9

Factorice de forma completa la expresión $(3 + 2b)^2 - (c - 4)^2$

Solución

Utilizando $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, se obtiene

$$\begin{aligned} (3 + 2b)^2 - (c - 4)^2 &= [(3 + 2b) - (c - 4)][(3 + 2b) + (c - 4)] \\ &= (3 + 2b - c + 4)(3 + 2b + c - 4) \\ &= (2b - c + 7)(2b + c - 1) \end{aligned}$$

Respuesta

$$(3 + 2b)^2 - (c - 4)^2 = (2b + c - 1)(2b - c + 7)$$

Ejemplo 3.10

Factorice de forma completa la expresión $8p^3 + 125q^3$

Solución

Empleando $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, se obtiene

$$\begin{aligned} 8p^3 + 125q^3 &= (2p)^3 + (5q)^3 \\ &= (2p + 5q)[(2p)^2 - (2p)(5q) + (5q)^2] \\ &= (2p + 5q)(4p^2 - 10pq + 25q^2) \end{aligned}$$

Respuesta

$$8p^3 + 125q^3 = (2p + 5q)(4p^2 - 10pq + 25q^2)$$

Ejemplo 3.11

Factorice de forma completa la expresión $3a^3b^3 - 64$

Solución

Utilizando $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, se obtiene

$$\begin{aligned} 3a^3b^3 - 64 &= (\sqrt[3]{3}ab)^3 - 4^3 \\ &= (\sqrt[3]{3}ab - 4)((\sqrt[3]{3}ab)^2 + \sqrt[3]{3}ab \cdot 4 + 4^2) \\ &= (\sqrt[3]{3}ab - 4)\left(\sqrt[3]{9}a^2b^2 + 4\sqrt[3]{3}ab + 16\right) \end{aligned}$$

Respuesta

$$3a^3b^3 - 64 = (\sqrt[3]{3}ab - 4)\left(\sqrt[3]{9}a^2b^2 + 4\sqrt[3]{3}ab + 16\right)$$

3.3 Factorización por Agrupación

Este método se aplica si los términos de un polinomio no evidencian tener un factor común, pero agrupando algunos de ellos si se muestra un factor repetido. Cabe mencionar que este factor común puede ser un polinomio.

En los siguientes ejemplo note los paréntesis que se colocan para el agrupamiento y como en ellos se obtiene un factor común separadamente, para luego mostrar un nuevo factor común.

Ejemplo 3.12

Factorice de forma completa la expresión $2x^2 - 3xy - 3y + 2x$

Solución

$$\begin{aligned}
2x^2 - 3xy - 3y + 2x &= 2x^2 - 3xy + (-3y) + 2x \\
&= (2x^2 - 3xy) + (-3y + 2x) \\
&= x(2x - 3y) + (-3y + 2x) \\
&= x(2x - 3y) + 1 \cdot (2x - 3y) \\
&= (2x - 3y)(x + 1)
\end{aligned}$$

Respuesta

$$2x^2 - 3xy - 3y + 2x = (2x - 3y)(x + 1)$$

Ejemplo 3.13

Factorice de forma completa la expresión $2am - 2an + 2a - m + n - 1$

Solución

$$\begin{aligned}
2am - 2an + 2a - m + n - 1 &= (2am - 2an + 2a) + (-m + n - 1) \\
&= 2a(m - n + 1) + (-m + n - 1) \\
&= 2a(m - n + 1) + (-1)(m - n + 1) \\
&= (m - n + 1)(2a - 1)
\end{aligned}$$

Respuesta

$$2am - 2an + 2a - m + n - 1 = (m - n + 1)(2a - 1)$$

Ejemplo 3.14

Factorice de forma completa la expresión $a^2 + 2ab + b^2 - 1$

Solución

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 - 1 &= (a^2 + 2ab + b^2) - 1 \\ &= (a+b)^2 - 1 \\ &= (a+b-1)(a+b+1) \end{aligned}$$

Respuesta

$$a^2 + 2ab + b^2 - 1 = (a+b-1)(a+b+1)$$

3.4 Factorización de polinomios cuadráticos

Para la factorización de polinomios en una variable existen varios métodos, aparte de los vistos anteriormente, que nos pueden facilitar esta labor. Vamos a analizar primero el caso de factorizar trinomios cuadráticos.

3.4.1 Completación de cuadrados

Completación de cuadrados es una técnica que permite reescribir un trinomio cuadrático como suma o resta de dos términos al cuadrado.

Cuando se obtiene una suma de cuadrados el trinomio no se factoriza, pero si se logra una resta es posible factorizar usando la fórmula notable para diferencia de cuadrados.

La base del método es el siguiente teorema.

Teorema

Si b y c son constantes reales y x es una variable real, entonces se cumple la siguiente igualdad

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$$

A pesar que no estamos demostrando teoremas, el lector puede verificar el resultado anterior desarrollando la expresión que está a la derecha de la igualdad y comprobar que obtiene el lado izquierdo. A continuación se mostraremos algunos ejemplos en los cuales se utiliza la completación de cuadrados para factorizar.

Ejemplo 3.15

Empleando la completación de cuadrados, factorice $x^2 + 5x + 4$

Solución Utilizando el teorema anterior con $b = 5$ y $c = 4$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
x^2 + 5x + 4 &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5^2}{4} + 4 \\
&= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 4 \\
&= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \\
&= \left[\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

Note que hasta aquí tenemos la completación de cuadrados.

Ahora factorizamos con la fórmula de diferencia de cuadrados.

$$
\begin{aligned}
&= \left[\left(x + \frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\right]\left[\left(x + \frac{5}{2}\right) + \frac{3}{2}\right] \\
&= \left[x + \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right]\left[x + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right] \\
&= (x + 1)(x + 4)
\end{aligned}
$$

Respuesta

$$x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$$

Ejemplo 3.16

Empleando la completación de cuadrados, factorice $4x^2 + 8x - 5$

Solución Note que el teorema no se puede aplicar desde el principio pues el coeficiente para x^2 es 4 y no 1 como en el teorema. Por ello vamos a factorizar el 4 primero. Así luego se aplica el teorema con $b = 2$ y $c = \frac{5}{4}$.

$$\begin{aligned}
4x^2 + 8x - 5 &= 4\left(x^2 + 2x - \frac{5}{4}\right) \\
&= 4\left[\left(x + \frac{2}{2}\right)^2 - \frac{2^2}{4} - \frac{5}{4}\right] \\
&= 4\left[(x+1)^2 - \frac{4}{4} - \frac{5}{4}\right] \\
&= 4\left[(x+1)^2 - \frac{9}{4}\right] \\
&= 4\left[(x+1)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \\
&= 4\left[(x+1) - \frac{3}{2}\right]\left[(x+1) + \frac{3}{2}\right] \\
&= 4\left[x + 1 - \frac{3}{2}\right]\left[x + 1 + \frac{3}{2}\right] \\
&= 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)
\end{aligned}$$

Respuesta

$$4x^2 + 8x - 5 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

3.4.2 Factorización por fórmula general

Para factorizar polinomios de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c constantes reales y $a \neq 0$,primero debemos de estudiar el valor de su discriminante.

Propiedad importante

El discriminante del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$ se denota por el símbolo Δ (delta), y se calcula con la fórmula $\Delta = b^2 - 4ac$.

1) Si $\Delta < 0$, entonces P **no** es factorizable en el conjunto de los números reales.

2) Si $\Delta = 0$, entonces P se factoriza como:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

3) Si $\Delta > 0$ entonces $P(x)$ se factoriza como:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

Donde

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

y

$$\beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

A continuación, se utiliza la fórmula general para factorizar polinomios de grado 2.

Ejemplo 3.17

Factorice (si es posible) la expresión $-2x^2 + 3x - 4$

Solución

Calculando el discriminante se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta &= 3^2 - 4(-2)(-4)\\ \Delta &= 9 - 32\\ \Delta &= -23\end{aligned}$$

Respuesta

Como $\Delta < 0$, entonces $-2x^2 + 3x - 4$ no es factorizable en el conjunto de los números reales.

Ejemplo 3.18

Factorice (si es posible) la expresión $-4x^2 + 20x - 25$

Solución

Calculando el discriminante se obtiene

$$\begin{aligned}
\Delta &= (20)^2 - 4(-4)(-25)\\
\Delta &= 400 - 400\\
\Delta &= 0
\end{aligned}$$

como $\Delta = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
-4x^2 + 20x - 25 &= -4\left(x + \frac{-20}{2\cdot 4}\right)^2\\
&= -4\left(x - \frac{20}{8}\right)^2\\
&= -4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Respuesta

$$-4x^2 + 20x - 25 = -4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$$

Ejemplo 3.19

Factorice (si es posible) la expresión $2x^2 + 5x - 3$

Solución

Calculando el discriminante se obtiene

$$\begin{aligned}
\Delta &= (5)^2 - 4(2)(-3)\\
\Delta &= 25 + 24\\
\Delta &= 49
\end{aligned}$$

como $\Delta > 0$, entonces:

$$2x^2 + 5x - 3 = 2(x - \alpha)(x - \beta)$$

con:

$$\alpha = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{-5 - 7}{4} = -3$$

$$\beta = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{1}{2}$$

Respuesta

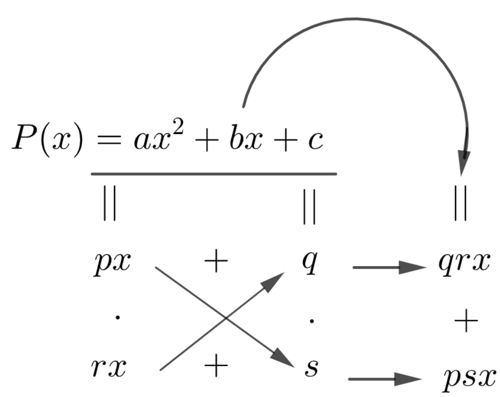
$$2x^2 + 5x - 3 = 2(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

3.4.3 Inspección o tanteo

Este método recibe su nombre pues básicamente probamos valores que permitan obtener los coeficientes del trinomio. Considere el polinomio $P(x) = ax^2 + b + c$, con a, b y c números enteros, se dice que P es factorizable en $\mathbb{Q}$ si logramos obtener valores p, q, r y s que cumplan:

- $ax^2 = px \cdot rx = prx^2$
- $bx = psx + rqx = (ps + rq)x$
- $c = qs$

Esta relaciones pueden visualizarse mejor en el siguiente esquema:



El método de factorización por inspección o tanteo consiste en determinar valores que cumplan simultáneamente:

1) El producto de p y r sea a.
2) El producto de q y s sea c.
3) Y tal que la suma de los productos cruzados $ps + rq$ sea b.

Si logramos encontrar esos cuatro valores que cumplan las tres condiciones a la vez obtenemos los factores del trinomio en las dos filas del diagrama anterior.
Veamos su aplicación en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.20

Use el método de inspección o tanteo para factorizar el polinomio $Q(x) = x^2 - 8x + 15$

Solución

Utilizando el esquema de inspección se obtiene

$$Q(x) = \overline{x^2 - 8x + 15}$$

$$\begin{array}{ccc} || & & || \\ x & + & -3 \\ \cdot & \times & \cdot \\ x & + & -5 \end{array}$$

entonces

$$x(-3) + x(-5) = -3x + -5x = -8x$$

Respuesta

$$Q(x) = (x - 3)(x - 5)$$

Ejemplo 3.21

Use el método de inspección o tanteo para factorizar el polinomio $W(x) = -2x^2 - 7x + 15$

Solución

Utilizando el esquema de inspección se obtiene

$$W(x) = -2x^2 - 7x + 15$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ -2x & + & 3 \\ \cdot & & \cdot \\ x & + & 5 \end{array}$$

entonces

$$-2x \cdot 5 + x \cdot 3 = -10x + 3x = -7x$$

Respuesta

$$W(x) = (-2x + 3)(x + 5)$$

Ejemplo 3.22

Use el método de inspección o tanteo para factorizar el polinomio $M(y) = 3y^2 + y - 2$

Solución

Utilizando el esquema de inspección se obtiene

$$M(y) = 3y^2 + y - 2$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ 3y & + & -2 \\ \cdot & & \cdot \\ y & + & 1 \end{array}$$

entonces

$$3y \cdot 1 + y \cdot -2 = 3y - 2y = y$$

Respuesta

$$M(y) = (3y - 2)(y + 1)$$

3.5 Factorización de polinomios de grado mayor que 2, con coeficientes enteros

Para la factorización de polinomios de grado mayor a 2, vamos a utilizar el concepto de **cero** de un polinomio. Un valor $x = c$ es cero de un polinomio $P(x)$ si al evaluar c en P obtenemos cero, esto es $P(c) = 0$.
Así las cosas, podemos enunciar el teorema del factor.

Teorema del factor

Sea $P(x)$ un polinomio de grado n, $n \geq 1$ y sea $c \in \mathbb{R}$:
Si c es un cero de $P(x)$, $P(c) = 0$, entonces $x - c$ es un factor de P.

Su recíproco es cierto también: Si $x - c$ es un factor de $P(x)$, entonces c es un cero de P.

El siguiente resultado también es importante para el proceso de factorización de polinomios de grado mayor que 2.

Proposición

Si P es un polinomio de **grado** n, entonces P tiene a lo sumo n ceros reales.

Proposición

Sea P un polinomio tal que $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ donde a_n, a_{n-1}, a_1, a_0 son números reales. Y sean c y d números enteros tales $\frac{c}{d}$ es una fracción canónica, esto es que no tienen divisores en común.
Si $\frac{c}{d}$ es un cero de P entonces a_0 es divisible por c y a_n es divisible por d.

Nota: De la proposición anterior se deduce que todos los ceros racionales de un polinomio P de grado n están contenidos en el conjunto D, donde:

$$D = \left\{ \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} / c, \text{ es un divisor de } a_0 \text{ y } d \text{ es un divisor de } a_n \right\}$$

Este conjunto contiene a todos los divisores del término constante a_0 y las fracciones que se forman a partir de los divisores de a_0 y a_n. Es importante señalar que no necesariamente todo elemento de D es cero de P.
Para aplicar las proposiciones anteriores en el proceso de factorizar a un polinomio P de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

con $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ números enteros $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}, n > 2$, debemos:

1) Determinar el conjunto de los divisores del término constante D_{a_0}, donde:

$$D_{a_0} = \{c \in \mathbb{Z}/c \text{ es divisor de } a_0\}$$

2) Determinar el conjunto de los divisores del coeficiente principal D_{a_n}, donde:

$$D_{a_n} = \{d \in \mathbb{Z}/d \text{ es divisor de } a_n\}$$

3) Formar el conjunto D, donde:

$$D = \left\{\frac{c}{d}/c \in D_{a_0} \text{ y } d \in D_{a_n}\right\}$$

4) Entre los elementos de D se busca un cero del polinomio, esto es un valor c tal que $P(c) = 0$.

5) Se efectúa la división de $P(x)$ por $x - c$, y se expresa la identidad

$$P(x) = (x - c)Q(x)$$

donde $Q(x)$ es el cociente que se obtiene al dividir $P(x)$ por $(x - c)$

6) Si Q es un polinomio de grado mayor que 2, se repiten los pasos 4 y 5 para $Q(x)$.

7) Si Q es de grado 2, se utiliza algunos de los métodos de factorización para trinomios cuadráticos que vimos antes.

Analice los siguientes ejemplos en donde se hace uso del procedimiento descrito.

Ejemplo 3.23

Factorice (si es posible) el polinomio $P(x) = 2x^4 - 4x^2 - 6x - 4$

Solución
En este caso consideraremos los conjuntos $D_{-4} = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$, que son los divisores enteros de -4 y $D_2 = \{1, 2\}$, que corresponde con los divisores naturales de 2. Así formamos

$$D = \left\{1, -1, 2, -2, 4, -4, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right\}$$

El paso siguiente es determinar algún $c \in D$, tal que $P(c) = 0$.

Calculemos $P(1)$ por división sintética:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 0 & -4 & -6 & -4 & \\ & 2 & 2 & -2 & -8 & 1 \\ \hline 2 & 2 & -2 & -8 & -12 & \end{array}$$

Como $P(1) = -12$, $x - 1$ **no** es factor de $P(x)$.
Calculamos $P(-1)$ por división sintética:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 0 & -4 & -6 & -4 & \\ & -2 & 2 & 2 & 4 & -1 \\ \hline 2 & -2 & -2 & -4 & 0 & \end{array}$$

Entonces $P(-1) = 0$ y $P(x)$ se puede expresar como

$$P(x) = 2x^4 - 4x^2 - 6x - 4 = (x+1)(2x^3 - 2x^2 - 2x - 4)$$

Ahora consideremos $C(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x - 4$ que es un polinomio de grado 3, debemos encontrar un $\beta \in D$ tal que $C(\beta) = 0$.
Calculemos $C(2)$ por división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & -2 & -4 & \\ & 4 & 4 & 4 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 0 & \end{array}$$

De aquí se tiene que $C(2) = 0$ y entonces $C(x)$

$$C(x) = (x-2)(2x^2 + 2x + 2)$$

y se tiene a su vez que $P(x)$

$$P(x) = (x+1)(x-2)(2x^2 + 2x + 2)$$

Por último como $2x^2 + 2x + 2$ es de grado 2, podemos utilizar de los métodos de factorización estudiados para polinomios de este grado.
Aplicado fórmula general a $2x^2 + 2x + 2$, el discriminante tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta &= (2)^2 - 4(2)(2) \\ \Delta &= 4 - 16 \\ \Delta &= -12 \end{aligned}$$

Como $\Delta < 0$ entonces $2x^2 + 2x + 2$ **no** es factorizable en el conjunto de números reales.

Respuesta

$$P(x) = (x+1)(x-2)(2x^2 + 2x + 2)$$

Ejemplo 3.24

Factorice (si es posible) el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x$

Solución

Factorizado $P(x)$ por factor en común se tiene

$$P(x) = x(x^3 - 2x^2 - 4x + 8)$$

entonces para

$$P_1(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

tomamos en cuenta los conjuntos $D_8 = \{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8\}$, que son los divisores enteros de 8 y $D_1 = \{1\}$, divisores naturales de 1; con ellos formamos el conjunto:

$$D = \{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8\}$$

El paso siguiente es determinar algún $c \in D$, tal que $P(c) = 0$.

Calculemos $P_1(1)$ y $P_1(-1)$, se tiene

$P_1(1) = 3$ y $P_1(-1) = 9$

Calculando $P_1(2) = 0$ por división sintética:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & 8 & \\ & 2 & 0 & -8 & 2 \\ \hline 1 & 0 & -4 & 0 & \end{array}$$

Como $P_1(2) = 0$, $x - 2$ es factor de $P_1(x)$.

entonces $P_1(x)$

$$P_1(x) = (x - 2)(x^2 - 4)$$

y se tiene a su vez que $P(x)$

$$P(x) = x(x - 2)(x^2 - 4)$$

Por último como $x^2 - 4$ es de grado 2, podemos utilizar de los métodos de factorización estudiados para polinomios de este grado. Realizado factorización por fórmulas notables

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Respuesta

$$P(x) = x(x - 2)(x - 2)(x + 2)$$

3.6 Esquema de factorización

A continuación se muestra un esquema que resume los métodos descritos en este capítulo.

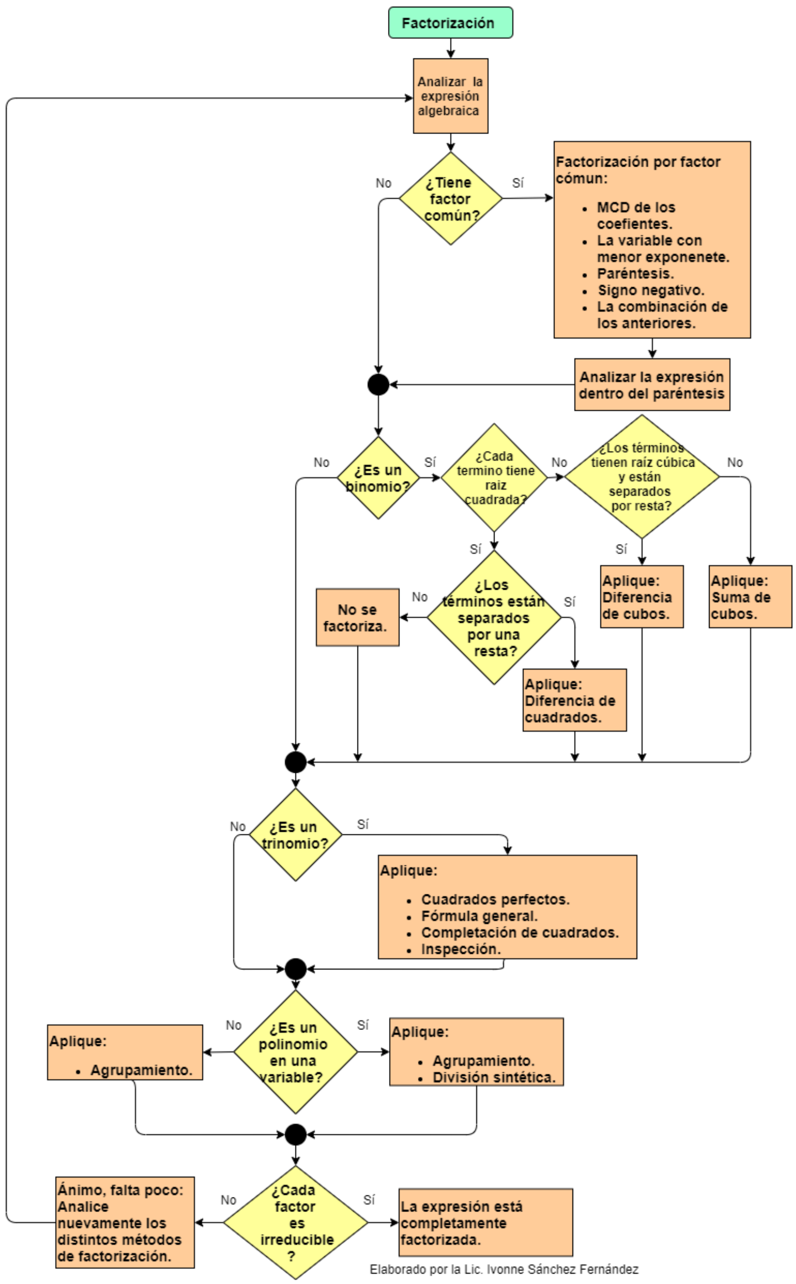


Figura 1: Esquema de factorización.

3.7 Ejercicios

Factorice de forma completa las siguientes expresiones utilizando el método de factor común.

3.7.1 $abc + abc^3$

3.7.2 $6xa - 12xy$

3.7.3 $a^2 + a$

3.7.4 $a(x - y) + (y - x)$

3.7.5 $abc + abc^2$

3.7.6 $9a^2x^2 - 18ax^3$

3.7.7 $6a^2 - 12a(x + 2)$

3.7.8 $(2m - 4n) + m(m - 2n)$

3.7.9 $x(x - 7) - (7 - x)$

3.7.10 $(3x + 9y) + d(-x - 3y)$

Factorice de forma completa las siguientes expresiones utilizando el método de fórmulas notables:

3.7.11 $4r^6 + 12r^3s^2 + 9s^4$

3.7.12 $2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1$

3.7.13 $\dfrac{9h^2}{16} + \dfrac{4hk}{3} + \dfrac{64k^2}{81}$

3.7.14 $20x^2 - 2\sqrt{5}xy + \dfrac{y^2}{4}$

3.7.15 $x^2y^2z^2 - z + \dfrac{1}{4x^2y^2}$

3.7.16 $\dfrac{1}{x^2} + 4y^2 - \dfrac{4y}{x}$

3.7.17 $5x^2 - 8$

3.7.18 $(6a + 5b)^2 - (4c + 7d)^2$

3.7.19 $(a + b)^2 - 4c^2$

3.7.20 $x^3 + 27y^3$

3.7.21 $81a^5 + 24a^2$

3.7.22 $(2a - b)^3 + 343$

3.7.23 $4a^5 - 32a^2b^3$

3.7.24 $a^3 - (b - 1)^3$

3.7.25 $8a^3b^3 - 7$

Factorice de forma completa las siguientes expresiones algebraicas

3.7.26 $6a^2 - 4ac - 15ab + 10bc$

3.7.27 $2c^2 + 4cd - 3c - 6d$

3.7.28 $ax - bx - by + a + ay - b$

3.7.29 $8 + x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3$

Empleando la completación de cuadrados, factorice los siguientes polinomios:

3.7.30 $x^2 - 4x + 1$

3.7.31 $-2x^2 + x + 1$

3.7.32 $3x^2 - 7x + 2$

Factorice (si es posible) cada una de las siguientes expresiones:

3.7.33 $x^2 + x + 1$

3.7.34 $-2x^2 - 5x - 3$

3.7.35 $\frac{1}{4}x^2 + x + 1$

Use el método de inspección o tanteo para factorizar los siguientes polinomios.

3.7.36 $x^2 + 5x + 4$

3.7.37 $-2x^2 - 5x - 3$

3.7.38 $\frac{1}{4}x^2 + x + 1$

Factorice si es posible, cada o de los siguientes polinomios $P(x)$ que se define a continuación:

3.7.39 $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

3.7.40 $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x$

3.7.41 $P(x) = 6x^3 + 23x^2 + 9x - 18$

A continuación se muestra una lista de ejercicios en los cuales se deben de aplicar los diferentes métodos de factorización vistos con anterioridad:

3.7.42 $a^{10} - a^8 - a^6 + a^4$

3.7.43 $a^2 + a - ab - b$

3.7.44 $9x^2 - 6xy + y^2$

3.7.45 $27a^3 - 1$

3.7.46 $6x^2 - 19x - 20$

3.7.47 $1 - m^3$

3.7.48 $2xy - 6y + xz - 3z$

3.7.49 $a^2 - a - 30$

3.7.50 $8m^3 - 27y^6$

3.7.51 $c^4 - 4a^4$

3.7.52 $(m + n)^2 - 6(m + n) + 9$

3.7.53 $7x^2 + 31x - 20$

3.7.54 $a^6 + 1$

3.7.55 $1 + 216x^9$

3.7.56 $x^3 - 64$

3.7.57 $(x + 1)^2 - 81$

3.7.58 $x^2 - a^2 + 2xy + y^2 + 2ab - b^2$

3.7.59 $x^3 - 2$

3.7.60 $a(x + 1) - b(x + 1) + x(x + 1)$

3.7.61 $1 + (a - 3b)^3$

3.7.62 $6am + 4an - 2n - 3n$

3.7.63 $16 - (2a + b)^2$

3.7.64 $n^2 + n - 42$

3.7.65 $a^2 - x^2 - a - x$

3.7.66 $9m^2 + 4a^2 - 12am$

3.7.67 $9x^4 - 25t^6$

3.7.68 $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

Capítulo 4

Simplificación de fracciones algebraicas

Al igual que con números racionales, podemos sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones algebraicas racionales también llamadas fracciones algebraicas. En este capítulo nos interesa específicamente simplificarlas.

El objetivo con la simplificación de expresiones algebraicas racionales es obtener una fracción expresada en su forma más simple,es decir, donde el numerador y denominador de dicha fracción no presenten factores comunes.

Para simplificar una fracción algebraicas de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios no nulos, vamos a factorizar completamente el numerador y el denominador, de esta forma, si $F(x)$ es un factor tanto de $P(x)$ como de $Q(x)$, entonces por el algoritmo de la división se tiene que:

$P(x) = F(x)C_1(x)$, donde $C_1(x)$ es el cociente de que se obtiene al dividir $P(x)$ entre $F(x)$.
$Q(x) = F(x)C_2(x)$, donde $C_2(x)$ es el cociente que se obtiene al dividir $Q(x)$ entre $F(x)$.

Así, la fracción algebraica $\frac{P(x)}{Q(x)}$ puede simplificarse como sigue:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{F(x) \cdot C_1(x)}{F(x) \cdot C_2(x)} = \frac{C_1(x)}{C_2(x)}$$

donde $Q(x) \neq 0$, $F(x) \neq 0$ y $C_2 \neq 0$
En los siguientes ejemplos se muestran simplificaciones de este tipo.

Ejemplo 4.1

Simplifique al máximo la fracción racional:

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

Solución

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2-1}{x-1}\\
=\;&\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\\
=\;&x+1 \qquad \text{con} x \neq 1
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$$

Ejemplo 4.2

Simplifique al máximo la siguiente expresión:

$$\frac{bx^2-b-x^2+1}{b^2x-x+b^2-1}$$

Solución

Empleando el método de agrupamiento, la expresión anterior se puede simplificar como

$$\begin{aligned}
\frac{bx^2-b-x^2+1}{b^2x-x+b^2-1} &= \frac{(bx^2-b)-(x^2-1)}{(b^2x-x)+(b^2-1)}\\
&= \frac{b(x^2-1)-(x^2-1)}{x(b^2-1)+(b^2-1)}\\
&= \frac{(x^2-1)(b-1)}{(b^2-1)(x+1)}\\
&= \frac{(x+1)(x-1)(b-1)}{(b+1)(b-1)(x-1)}\\
&= \frac{x-1}{b+1}, \text{ con } x \neq -1, b \neq 1
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{bx^2-b-x^2+1}{b^2x-x+b^2-1}=\frac{x-1}{b+1} \text{ con } x \neq -1, b \neq 1$$

4.1 Multiplicación y división de fracciones algebraicas

Para multiplicar y dividir expresiones algebraicas racionales vamos a proceder del mismo modo que al operar números racionales.

Para multiplicar lo hacemos numerador con numerador, denominador con denominador. Para dividir, reescribimos el divisor (usando su inverso) y multiplicamos.

Si $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ y $\dfrac{R(x)}{S(x)}$ son fracciones algebraicas, con $Q(x) \neq 0$ y $S(x) \neq 0$, entonces:

$$\frac{P(X)}{Q(x)} \cdot \frac{R(X)}{S(x)} = \frac{P(X) \cdot R(X)}{Q(x) \cdot S(x)}$$

$$\frac{P(X)}{Q(x)} \div \frac{R(X)}{S(x)} = \frac{P(X)}{Q(x)} \cdot \frac{S(x)}{R(X)} = \frac{P(X) \cdot S(x)}{Q(x) \cdot R(X)} \text{ con } R(x) \neq 0$$

Analice con detalle las soluciones propuestas en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.3

Realice las operaciones indicadas y simplifique al máximo:

$$\frac{x^3-8}{x^2-2x} \div \frac{x^2+2x+4}{x+3}$$

Solución

$$\begin{aligned}
&\frac{x^3-8}{x^2-2x} \div \frac{x^2+2x+4}{x+3} \\
&= \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x(x-2)} \cdot \frac{x+3}{x^2+2x+4} \\
&= \frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x^2+2x+4)}}{x\cancel{(x-2)}} \cdot \frac{x+3}{\cancel{x^2+2x+4}} \\
&= \frac{x+3}{x}
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{x^3-8}{x^2-2x} \div \frac{x^2+2x+4}{x+3} = \frac{x+3}{x}$$

Ejemplo 4.4

Realice las operaciones indicadas y simplifique al máximo:

$$\left[\left(\frac{27a^3 - b^3}{3a^2 - 4ab + b^2}\right)\left(\frac{a^2 + 2ab - 3b^2}{9a^2 + 3ab + b^2}\right)\right] \div \frac{a^2 - 9b^2}{ab - 3b^2}$$

Solución

Factorizando cada uno de los numeradores y denominadores se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{27a^3 - b^3}{3a^2 - 4ab + b^2}\right)\left(\frac{a^2 + 2ab - 3b^2}{9a^2 + 3ab + b^2}\right)\right] \div \frac{a^2 - 9b^2}{ab - 3b^2} \\
&= \frac{(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)}{(3a-b)(a-b)} \frac{(a+3b)(a-b)}{9a^2+3ab+b^2} \div \frac{(a-3b)(a+3b)}{b(a-3b)} \\
&= \frac{(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)}{(3a-b)(a-1)} \frac{(a+3b)(a-b)}{9a^2+3ab+b^2} \cdot \frac{b(a-3b)}{(a-3b)(a+3b)} \\
&= \frac{\cancel{(3a-b)}\cancel{(9a^2+3ab+b^2)}}{\cancel{(3a-b)}\cancel{(a-b)}} \frac{\cancel{(a+3b)}\cancel{(a-b)}}{\cancel{9a^2+3ab+b^2}} \cdot \frac{b\cancel{(a-3b)}}{\cancel{(a-3b)}\cancel{(a+3b)}} \\
&= b
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\left[\left(\frac{27a^3 - b^3}{3a^2 - 4ab + b^2}\right)\left(\frac{a^2 + 2ab - 3b^2}{9a^2 + 3ab + b^2}\right)\right] \div \frac{a^2 - 9b^2}{ab - 3b^2} = b$$

4.2 Suma y resta de fracciones algebraicas

De modo general vamos a describir el proceso para realizar la suma o resta de dos fracciones algebraicas, donde P, Q, R, S se refieren a polinomios en una variable no nulos.

$$\frac{P(x)}{R(x)} \pm \frac{Q(x)}{S(x)} \text{ con } R(x) \neq 0 \text{ y } S(x) \neq 0$$

Para realizar la suma o resta consideraremos los siguientes pasos:

1) Factorizar completamente los denominadores.

2) Calcular el polinomio $M(x)$ que corresponde con el mínimo común múltiplo de los denominadores $R(x)$ y $S(x)$:
$$M(x) = mcm\,[R(x), S(x)]$$

3) Realizar la suma o resta de fracciones utilizando el siguiente algoritmo:
$$\frac{P(x)}{R(x)} \pm \frac{Q(x)}{S(x)} = \frac{\dfrac{M(x)}{R(x)} \cdot P(x) \pm \dfrac{M(x)}{S(x)} \cdot Q(x)}{M(x)}$$

4) Efectuar las operaciones resultantes en el numerador y simplificar.

5) Factorizar por completo el numerador.

6) Simplificar factores comunes.

En los siguientes ejemplos vamos a seguir los pasos descritos anteriormente pero considerando tres fracciones. Analice con cuidado la conformación del polinomio $M(x)$.

Ejemplo 4.5

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar al máximo la expresión:

$$\frac{2x+1}{x^2+4x+4}-\frac{6x}{x^2-4}+\frac{3}{x-2}$$

Solución

$$\frac{2x+1}{x^2+4x+4}-\frac{6x}{x^2-4}+\frac{3}{x-2}$$

$$=\frac{2x+1}{(x+2)^2}-\frac{6x}{(x-2)(x+2)}+\frac{3}{x-2}$$

Calculando el $mcm\left[(x+2)^2,(x-2)(x+2),x-2\right]=(x+2)^2(x-2)$

$$=\frac{(2x+1)((x-2)-6x(x+2)+3(x+2)^2}{(x+2)^2(x-2)}$$

$$=\frac{2x^2-4x+x-2-6x^2-12x+3(x^2+4x+4)}{(x+2)^2(x-2)}$$

$$=\frac{2x^2-4x+x-2-6x^2-12x+3x^2+12x+12)}{(x+2)^2(x-2)}$$

$$=\frac{-x^2-3x+10}{(x+2)^2(x-2)}$$

$$=\frac{-(x^2+3x-10)}{(x+2)^2(x-2)}$$

$$=\frac{-(x+5)\cancel{(x-2)}}{(x+2)^2\cancel{(x-2)}}$$

$$=\frac{-(x+5)}{(x+2)^2}$$

Respuesta

$$\frac{2x+1}{x^2+4x+4}-\frac{6x}{x^2-4}+\frac{3}{x-2}=\frac{-(x+5)}{(x+2)^2}$$

Ejemplo 4.6

Resuelva la siguiente operación y simplifique al máximo:

$$\frac{9a+8b}{(3a-2b)(a+4b)}-\frac{5a}{(3a-2b)(a-4b)}+\frac{16b}{a^2-16b^2}$$

Solución

$$\frac{9a+8b}{(3a-2b)(a+4b)}-\frac{5a}{(3a-2b)(a-4b)}+\frac{16b}{a^2-16b^2}$$

$$=\frac{9a+8b}{(3a-2b)(a+4b)}-\frac{5a}{(3a-2b)(a-4b)}+\frac{16b}{(a-4b)(a+4b)}$$

El común denominador corresponde a $(3a-2b)(a+4b)(a-4b)$

$$=\frac{(9a+8b)(a-4b)-5a(a+4b)+16b(3a-2b)}{(3a-2b)(a+4b)(a-4b)}$$

$$=\frac{9a^2-36ab+8ba-32b^2-5a^2-20ab+48ab-32b^2}{(3a-2b)(a+4b)(a-4b)}$$

$$=\frac{4a^2-64b^2}{(3a-2b)(a+4b)(a-4b)}$$

$$=\frac{4(a^2-16b^2}{(3a-2b)(a+4b)(a-4b)}$$

$$=\frac{4\cancel{(a-4b)(a+4b)}}{(3a-2b)\cancel{(a+4b)(a-4b)}}$$

$$=\frac{4}{3a-2b}$$

Respuesta

$$\frac{9a+8b}{(3a-2b)(a+4b)}-\frac{5a}{(3a-2b)(a-4b)}+\frac{16b}{a^2-16b^2}=\frac{4}{3a-2b}$$

4.3 Operaciones combinadas

Para efectuar operaciones combinadas con fracciones algebraicas seguiremos el orden de prioridad establecido para las operaciones con números reales. En el siguiente ejemplo preste atención al tratamiento que se da a los paréntesis, productos, divisiones, sumas y restas; así como al uso de los métodos de factorización.

Ejemplo 4.7

Realice la operación indicada y simplifique al máximo.

$$\frac{(a+b)^{-2}}{(ab)^{-2}} \div \frac{1}{b^{-2}-a^{-2}}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{(a+b)^{-2}}{(ab)^{-2}} \div \frac{1}{b^{-2}-a^{-2}} &= \frac{\frac{1}{(a+b)^2}}{\frac{1}{(ab)^2}} \div \frac{1}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}} \\
&= \frac{(ab)^2}{(a+b)^2} \div \frac{1}{\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}} \\
&= \frac{a^2b^2}{(a+b)^2} \div \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} \\
&= \frac{a^2b^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{(a+b)(a-b)}{a^2b^2} \\
&= \frac{a-b}{a+b}, \text{ con } a \neq 0, b \neq 0, a \neq -b
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{(a+b)^{-2}}{(ab)^{-2}} \div \frac{1}{b^{-2}-a^{-2}} = \frac{a-b}{a+b}, \text{ con } a \neq 0, b \neq 0, a \neq -b$$

4.4 Ejercicios

Simplifique al máximo cada una de las siguientes expresiones algebraicas:

4.4.1 $\dfrac{ax + ay - bx - by}{am - bm - an + bn}$

4.4.2 $\dfrac{x^2y^3 + x^2b^3 - a^2y^3 - a^2b^3}{xy + xb + ab + ay}$

4.4.3 $\dfrac{a^2 - 5a}{b + b^2} \div \left[\left(\dfrac{a^2 + 6a - 55}{b^2 - 1} \right) \left(\dfrac{ax + 3a}{ab^2 + 11b^2} \right) \right]$

4.4.4 $\dfrac{x}{x^2 - 5x + 6} - \dfrac{1}{2 - x} - \dfrac{2x}{(3 - x)(1 - x)}$

4.4.5 $\dfrac{6x - 1}{2x - 6} - \dfrac{1 - 2x}{1 + 6x} - \dfrac{28x^2 + 20 + 11}{12x^2 - 34x - 6}$

4.4.6 $\dfrac{(x^{-2} - 4y^{-2})}{x - \dfrac{xy}{y + 2x}}$

4.4.7 $\dfrac{1}{(p - q^2)^{-1}} \div \dfrac{2pq^{-1} - 2q}{2 - 2q}$

Verifique la siguiente igualdad, asuma que los denominadores esta bien definidos en $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^{-2} - x^2y^{-2}}{x^{-1} + xy^{-1}} = \frac{1}{x} - \frac{x}{y}$$

Capítulo 5

Racionalización

5.1 Racionalización de expresiones algebraicas

Antes de comenzar, es necesario tener claro el concepto de **fracción unitaria**. Una fracción unitaria es una fracción que muestra exactamente la misma expresión en numerador y denominador, por lo cual es equivalente a 1.

Ejemplo 5.1

Los siguientes son ejemplos de fracciones unitarias.

1) $\frac{4}{4}$

2) $\frac{-2\pi}{-2\pi}$

3) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}}$

4) $\frac{a-b}{a-b}$ (con $a \neq b$)

Racionalizar el denominador de una fracción es un proceso en el cual se busca remover el radical que se tiene en el denominador de dicha fracción. De forma semejante si lo que se busca es racionalizar el numerador el proceso lo removerá de esa posición. Para describir el proceso vamos a considerar tres casos, suponga que las raíces utilizadas están bien definidas.

5.1.1 Caso I

Expresiones algebraicas que tienen solamente un radical en el numerador o en el denominador.

Este caso es cuando se presenta una expresión que contiene solo una raíz, ya sea en el numerador o en el denominador, esto es de la forma $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{B}$ o bien $\dfrac{A}{\sqrt[n]{x}}$, donde A y B son expresiones cualquiera.

En general, la técnica que se empleará es completar el radical para poder aplicar la propiedad $\sqrt[n]{x^n} = x$ para n impar.

Ejemplo 5.2

Racionalice el denominador y simplifique la expresión $\dfrac{2x^2}{5\sqrt[7]{x^3}}$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2}{5\sqrt[7]{x^3}} &= \frac{2x^2}{5\sqrt[7]{x^3}} \cdot \frac{\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[7]{x^4}} \\
&= \frac{2x^2\sqrt[7]{x^4}}{5\sqrt[7]{x^7}} \\
&= \frac{2x^2\sqrt[7]{x^4}}{5x} \\
&= \frac{2x\sqrt[7]{x^4}}{5}
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{2x^2}{5\sqrt[7]{x^3}} = \frac{2x\sqrt[7]{x^4}}{5}$$

Ejemplo 5.3

Racionalice el numerador y simplifique la expresión $\dfrac{\sqrt[5]{3x^3y^2z^4}}{9x^2y^4z}$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[5]{3x^3y^2z^4}}{9x^2y^4z} &= \frac{\sqrt[5]{3x^3y^2z^4}}{9x^2y^4z} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^4x^2y^3z}}{\sqrt[5]{3^4x^2y^3z}} \\
&= \frac{\sqrt[5]{3x^3y^2z^4} \cdot \sqrt[5]{3^4x^2y^3z}}{9x^2y^4z\sqrt[5]{3^4x^2y^3z}} \\
&= \frac{3xyz}{9x^2y^4z\sqrt[5]{81x^2y^3x}} \\
&= \frac{1}{3xy^3\sqrt[5]{81x^2y^3z}}
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{\sqrt[5]{3x^3y^2z^4}}{9x^2y^4z} = \frac{1}{3xy^3\sqrt[5]{81x^2y^3z}}$$

Ejemplo 5.4

Racionalice el denominador y simplifique la expresión $\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x-2}}$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}} &= \frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} \\
&= \frac{(x^2-4)\sqrt{x-2}}{\sqrt{(x-2)^2}} \\
&= \frac{(x-2)(x+2)\sqrt{x-2}}{(x-2)} \\
&= (x+2)\sqrt{x-2}
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}} = (x+2)\sqrt{x-2}$$

Ejemplo 5.5

Racionalice el denominador y simplifique la expresión $\dfrac{3x-1}{2\sqrt[5]{(3x-1)^2}}$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{3x-1}{2\sqrt[5]{(3x-1)^2}} &= \frac{3x-1}{2\sqrt[5]{(3x-1)^2}}\cdot\frac{\sqrt[5]{(3x-1)^3}}{\sqrt[5]{(3x-1)^3}}\\ &= \frac{(3x-1)\sqrt[5]{(3x-1)^3}}{2\sqrt[5]{(3x-1)^5}}\\ &= \frac{(3x-1)\sqrt[5]{(3x-1)^3}}{2(3x-1)}\\ &= \frac{\sqrt[5]{(3x-1)^3}}{2}\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{3x-1}{2\sqrt[5]{(3x-1)^2}} = \frac{\sqrt[5]{(3x-1)^3}}{2}$$

5.1.2 Caso II

Expresiones algebraicas que se racionalizan aplicando el conjugado de una expresión.

En este caso consideraremos expresiones de la forma $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, $\sqrt{a}\pm b$ o bien $a\pm\sqrt{b}$ donde a y b son expresiones algebraicas para las cuales están bien definidas los radicales. El proceso para racionalizar consiste en multiplicar la fracción inicial por una fracción unitaria conformada por el conjugado del numerador o denominador, según corresponda. La intención es obtener los factores que son parte del producto notable que nos lleva a la diferencia de cuadrados.

Importante

Si $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, entonces se cumple

$$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$$

En el producto notable anterior, se dice que $(a+b)$ es el conjugado de $(a-b)$ y viceversa.

En los siguientes ejemplos preste atención a la fracción unitaria que se utiliza para luego simplificar al radical.

Ejemplo 5.6

Racionalice el denominador de la siguiente expresión y simplifique. $\dfrac{9y-4x^2}{2x+3\sqrt{y}}$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{9y-4x^2}{2x+3\sqrt{y}} &= \frac{9y-4x^2}{2x+3\sqrt{y}} \cdot \frac{2x-3\sqrt{y}}{2x-3\sqrt{y}} \\
&= \frac{(9y-4x^2)(2x-3\sqrt{y})}{(2x+3\sqrt{y})(2x-3\sqrt{y})} \\
&= \frac{(9y-4x^2)(2x-3\sqrt{y})}{(2x)^2-(3\sqrt{y})^2} \\
&= \frac{(9y-4x^2)(2x-3\sqrt{y})}{4x^2-9y} \\
&= -\frac{(9y-4x^2)(2x-3\sqrt{y})}{(9y-4x^2)} \\
&= -(2x-3\sqrt{y})
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{9y-4x^2}{2x+3\sqrt{y}} = -(2x-3\sqrt{y})$$

Ejemplo 5.7

Racionalice el denominador y simplifique la expresión $\dfrac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$

Solución

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}} &= \frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{3(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{x+1})^2} \\
&= \frac{3(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{x-(x+1)} \\
&= \frac{3(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{x-x-1} \\
&= \frac{3(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{-1} \\
&= -3(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})
\end{aligned}
$$

Respuesta

$$\frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}} = -3(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$$

Ejemplo 5.8

Racionalice el numerador y simplifique la expresión $\dfrac{2x+1-\sqrt{11x+3}}{2-32x^2}$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1-\sqrt{11x+3}}{2-32x^2} &= \frac{2x+1-\sqrt{11x+3}}{2-32x^2}\cdot\frac{(2x+1)+\sqrt{11x+3}}{(2x+1)+\sqrt{11x+3}}\\
&= \frac{(2x+1)^2-(\sqrt{11x+3})^2}{(2-32x^2)((2x+1)+\sqrt{11x+3})}\\
&= \frac{4x^2+4x+1-(11x+3)}{2(1-16x^2)(2x+1+\sqrt{11x+3})}\\
&= \frac{4x^2+4x+1-11x-3}{2(1-4x)(1+4x)(2x+1+\sqrt{11x+3})}\\
&= \frac{4x^2-7x-2}{2(1-4x)(1+4x)(2x+1+\sqrt{11x+3})}\\
&= \frac{(4x+1)(x-2)}{2(1-4x)(1+4x)(2x+1+\sqrt{11x+3})}\\
&= \frac{x-2}{2(1-4x)(2x+1+\sqrt{11x+3})},\ \text{donde } x\neq\frac{-1}{4}
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{2x+1-\sqrt{11x+3}}{2-32x^2} = \frac{x-2}{2(1-4x)(2x+1+\sqrt{11x+3})},\ \text{donde } x\neq\frac{-1}{4}$$

5.1.3 Caso III

Expresiones algebraicas que se racionalizan completando una suma o diferencia de cubos.

En este caso consideraremos expresiones de la forma $\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{a}\pm b$ o bien $a\pm\sqrt[3]{b}$ donde a y b son expresiones algebraicas. Aquí el proceso para racionalizar consiste en multiplicar la fracción inicial por una fracción unitaria conformada por el trinomio cuadrático necesario para completar una suma o diferencia de cubos, según corresponda.

Propiedades Importantes

Si $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, entonces se cumple:

- $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$
- $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

En el producto notable anterior, para obtener una suma de cubos, se multiplica $(a+b)$ por un polinomio cuadrático de la forma $(a^2 - ab + b^2)$. Y para obtener una diferencia de cubos, se multiplica $(a-b)$ por un trinomio cuadrático de la forma $(a^2 + ab + b^2)$. Esto es, multiplicamos con el factor que hace falta para completar la fórmula. En los siguientes ejemplos preste atención al factor que se utiliza para la conformación de la fracción unitaria.

Ejemplo 5.9

Racionalice el denominador y simplifique la expresión $\dfrac{8x+11}{2\sqrt[3]{x-2}+3}$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{8x+11}{2\sqrt[3]{x-2}+3} &= \frac{8x+11}{2\sqrt[3]{x-2}+3} \cdot \frac{(2\sqrt[3]{x-2})^2 - 2\sqrt[3]{x-2}\cdot 3 + (3)^2}{(2\sqrt[3]{x-2})^2 - 2\sqrt[3]{x-2}\cdot 3 + (3)^2} \\
&= \frac{(8x+11)\left[(2\sqrt[3]{x-2})^2 - 2\sqrt[3]{x-2}\cdot 3 + 9\right]}{(2\sqrt[3]{x-2})^3 - (3)^3} \\
&= \frac{(8x+11)\left[(2\sqrt[3]{x-2})^2 - 6\sqrt[3]{x-2} + 9\right]}{8(x-2)+27} \\
&= \frac{(8x+11)\left[(2\sqrt[3]{x-2})^2 - 6\sqrt[3]{x-2} + 9\right]}{8x-16+27} \\
&= \frac{(8x+11)\left[(2\sqrt[3]{x-2})^2 - 6\sqrt[3]{x-2} + 9\right]}{8x+11} \\
&= (2\sqrt[3]{x-2})^2 - 6\sqrt[3]{x-2} + 9
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{8x+11}{2\sqrt[3]{x-2}+3} = (2\sqrt[3]{x-2})^2 - 6\sqrt[3]{x-2} + 9$$

Ejemplo 5.10

Racionalice el denominador y simplifique la expresión $\dfrac{x+3}{2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x-1}}$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{x+3}{2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x-1}} &= \frac{x+3}{2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x-1}} \cdot \frac{(2\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}\cdot 3\sqrt[3]{x-1}+(3\sqrt[3]{x-1})^2}{(2\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}\cdot 3\sqrt[3]{x-1}+(3\sqrt[3]{x-1})^2}\\
&= \frac{(x+3)\left[(2\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}\cdot 3\sqrt[3]{x-1}+(3\sqrt[3]{x-1})^2\right]}{(2\sqrt[3]{x})^3-(3\sqrt[3]{x-1})^3}\\
&= \frac{(x+3)\left[(2\sqrt[3]{x})^2+6\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x-1}+(3\sqrt[3]{x-1})^2\right]}{8x-27(x-1)}\\
&= \frac{(x+3)\left[(2\sqrt[3]{x})^2+6\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x-1}+(3\sqrt[3]{x-1})^2\right]}{8x-27x+27}\\
&= \frac{(x+3)\left[(2\sqrt[3]{x})^2+6\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x-1}+(3\sqrt[3]{x-1})^2\right]}{-19x+27}
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{x+3}{2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x-1}} = \frac{(x+3)\left[(2\sqrt[3]{x})^2+6\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x-1}+(3\sqrt[3]{x-1})^2\right]}{-19x+27}$$

Ejemplo 5.11

Racionalice el numerador y simplifique la expresión $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-y\sqrt[3]{y}}{x-y}$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{x\sqrt[3]{x}-y\sqrt[3]{y}}{x-y} &= \frac{x\sqrt[3]{x}-y\sqrt[3]{y}}{x-y}\cdot\frac{(x\sqrt[3]{x})^2+x\sqrt[3]{x}\cdot y\sqrt[3]{y}+(y\sqrt[3]{y})^2}{(x\sqrt[3]{x})^2+x\sqrt[3]{x}\cdot y\sqrt[3]{y}+(y\sqrt[3]{y})^2}\\
&= \frac{(x\sqrt[3]{x})^3-(y\sqrt[3]{y})^3}{(x-y)\left[(x\sqrt[3]{x})^2+x\sqrt[3]{x}\cdot y\sqrt[3]{y}+(y\sqrt[3]{y})^2\right]}\\
&= \frac{x^3\cdot x-y^3\cdot y}{(x-y)\left[(x\sqrt[3]{x})^2+x\sqrt[3]{x}\cdot y\sqrt[3]{y}+(y\sqrt[3]{y})^2\right]}\\
&= \frac{x^4-y^4}{(x-y)\left[(x\sqrt[3]{x})^2+x\sqrt[3]{x}\cdot y\sqrt[3]{y}+(y\sqrt[3]{y})^2\right]}\\
&= \frac{(x^2+y^2)(x-y)(x+y)}{(x-y)\left[(x\sqrt[3]{x})^2+x\sqrt[3]{x}\cdot y\sqrt[3]{y}+(y\sqrt[3]{y})^2\right]}\\
&= \frac{(x^2+y^2)(x+y)}{(x\sqrt[3]{x})^2+xy\sqrt[3]{xy}+(y\sqrt[3]{y})^2},\ \text{con } x\neq y
\end{aligned}$$

Respuesta

$$\frac{x\sqrt[3]{3}-y\sqrt[3]{y}}{x-y}=\frac{(x^2+y^2)(x+y)}{(x\sqrt[3]{x})^2+xy\sqrt[3]{xy}+(y\sqrt[3]{y})^2},\ \text{con } x\neq y$$

5.2 Ejercicios

En cada una de las expresiones, racionalice y simplifique el resultado:

5.2.1 $\dfrac{2x-3}{\sqrt{6-4x}}$

5.2.2 $\dfrac{3x-3}{2\sqrt[3]{x^2}-1}$

5.2.3 $\dfrac{4-x^2}{2\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

5.2.4 $\dfrac{\sqrt[4]{8x^3y^2z}}{xyz}$

5.2.5 $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^3+8}$

En cada una de las siguientes expresiones, racionalice y simplifique el resultado:

5.2.6 $\dfrac{1-x}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$

5.2.7 $\dfrac{11-2x}{3-2\sqrt{x+1}}$

5.2.8 $\dfrac{x^2-16y}{x+4\sqrt{y}}$

5.2.9 $\dfrac{2x-\sqrt{13x-3}}{x^2-9}$

En cada una de las siguientes expresiones, racionalice y simplifique el resultado:

5.2.10 $\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

5.2.11 $\dfrac{16+250x}{2+5\sqrt[3]{x}}$

5.2.12 $\dfrac{x+y}{2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x+2}}$

5.2.13 $\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$

Capítulo 6

Soluciones a los ejercicios

Soluciones de capítulo 1

1.4.1 $\dfrac{1}{27}$

1.4.2 3

1.4.3 $-\dfrac{17}{100}$

1.4.4 $-\dfrac{6000000000}{7}$

1.4.5 $\dfrac{-5}{7}$

1.4.6 $\dfrac{3}{5}$

1.4.7 $5\sqrt[3]{2}$

1.4.8 $\dfrac{27\sqrt[3]{3}}{5}$

1.4.9 2

1.4.10 12

1.4.11 $\dfrac{19}{8}$

1.4.12 $\dfrac{5}{16}$

1.4.13 $-\dfrac{1}{3}\sqrt{2}-8$

1.4.14 2

1.4.15 $\sqrt[21]{57127475625984}$

1.4.16 $-\sqrt[18]{421875}$

1.4.17 $\sqrt[3]{6}$

1.4.18 $\frac{1}{103}$

1.4.19 -1

Soluciones de capítulo 2

2.5.1 $\frac{5x^2y}{3} - \frac{7xy^2}{2}$

2.5.2 $-t-9$

2.5.3 $6x^3 - 8x^2y - x^2 + x$

2.5.4 $3a^2x^6y$

2.5.5 ax^6y^3

2.5.6 $-21m^4n + 9m^3n^3$

2.5.7 $2r^3 + r^2 - r$

2.5.8 $x^3y^4 - 2x^2y^3 + 2xy - 4$

2.5.9 $y^2 + 2y + 13$

2.5.10 $x^2 - y^2$

2.5.11 $6y(-x-y)^2$

2.5.12 $\frac{1}{5ab^2x^6}$

2.5.13 $\frac{3}{2ab^2x^6}$

2.5.14 $Q(x) = x^4 - 2x^2 + 3$; $R(x) = 6x$

2.5.15 $Q(x) = 3x^2 + 9x + 27$;$R(x) = 72$

2.5.16 $Q(x) = 2x^2 - 3x - 11$; $R(x) = -33x + 12$

2.5.17 $Q(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$; $R(x) = 0$

2.5.18 $Q(x) = 5x^2 + 8x + 32$; $R(x) = 97$

2.5.19 $Q(x) = x^2 - 3x + 9$; $R(x) = 0$

Soluciones de capítulo 3

3.7.1 $abc(c^2 + 1)$

3.7.2 $6x(a - 2y)$

3.7.3 $a(a + 1)$

3.7.4 $(x - y)(a - 1)$

3.7.5 $abc(c + 1)$

3.7.6 $9ax^2(a - 2x)$

3.7.7 $6a\,[a - 2(x + 2)]$

3.7.8 $(m - 2n)(m + 2)$

3.7.9 $(x - 7)(x + 1)$

3.7.10 $(x + 3y)(3 - d)$

3.7.11 $(2r^3 + 3s^2)^2$

3.7.12 $(\sqrt{2}x + 1)^2$

3.7.13 $\left(\frac{3}{4}h + \frac{8}{9}k\right)^2$

3.7.14 $\left(2\sqrt{5}x + \frac{1}{2}y\right)^2$

3.7.15 $\left(xyz - \frac{1}{2xy}\right)^2$

3.7.16 $\left(\frac{1}{x}-2y\right)^2$

3.7.17 $(\sqrt{5}x-2\sqrt{2})(\sqrt{5}x+2\sqrt{2})$

3.7.18 $(6a+5b-4c-7d)(6a+5b+4c+7d)$

3.7.19 $(a+b-2c)(a+b+2c)$

3.7.20 $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$

3.7.21 $3a^2(3a-2)(9a^2+6a+4)$

3.7.22 $(2a-b+7)[(2a-b)^2-7(2a-b)+49]$

3.7.23 $4a^2(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$

3.7.24 $(a-b+1)[a^2+a(b-1)+(b-1)^2]$

3.7.25 $(2ab-\sqrt[3]{7})(4a^2b^2+2\sqrt[3]{7}ab+\sqrt[3]{7^2})$

3.7.26 $(2a-5b)(3a-2c)$

3.7.27 $(2c-3)(c+2d)$

3.7.28 $(a-b)(x+y+1)$

3.7.29 $(x-z+2)(x^2-2xz-2x+z^2+2z+4)$

3.7.30 $(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$

3.7.31 $-2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

3.7.32 $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)$

3.7.33 No se puede factorizar

3.7.34 $-(x+1)(2x+3)$

3.7.35 $\frac{1}{4}(x+2)^2$

3.7.36 $(x+1)(x+4)$

3.7.37 $-(x+1)(2x+3)$

3.7.38 $\frac{1}{4}(x+2)^2$

3.7.39 $(x+1)(x-2)(x-3)$

3.7.40 $x(x-1)^2(2x-1)$

3.7.41 $(3x-2)(2x+3)(x+3)$

3.7.42 $a^4(a-1)^2(a+1)^2(a^2+1)$

3.7.43 $(a-b)(a+1)$

3.7.44 $(3x-y)^2$

3.7.45 $(3a-1)(9a^2+3a+1)$

3.7.46 $(x-4)(6x+5)$

3.7.47 $(1-m)(1+m+m^2)$

3.7.48 $(2y+z)(x-3)$

3.7.49 $(a+5)(a-6)$

3.7.50 $(2m-3y^2)(4m^2+6my^2+9y^4)$

3.7.51 $(c-a\sqrt{2})(c+a\sqrt{2})(c^2+2a^2)$

3.7.52 $(m+n-3)^2$

3.7.53 $(x+5)(7x-4)$

3.7.54 $(a^2+1)(a^4-a^2+1)$

3.7.55 $(1-6x^3+36x^6)(1+x\sqrt[3]{6})(1-x\sqrt[3]{6}+x^2\sqrt[3]{36})$

3.7.56 $(x-4)(x^2+4x+16)$

3.7.57 $(x+10)(x-8)$

3.7.58 $(x+y+a-b)(x+y-a+b)$

3.7.59 $(x-\sqrt[3]{2})(x^2+x\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$

3.7.60 $(x+1)(a-b+x)$

3.7.61 $(1+a-3b)\left[1-a+3b+(a-3b)^2\right]$

3.7.62 $(2a-1)(2n+3m)$

3.7.63 $(4-2a-b)(4+2a+b)$

3.7.64 $(n+7)(n-6)$

3.7.65 $(a+x)(a-x-1)$

3.7.66 $(3m-2a)^2$

3.7.67 $(3x^2-5t^3)(3x^2+5t^3)$

3.7.68 $(x+2y)^3$

Soluciones de capítulo 4

4.4.1 $\dfrac{x+y}{m-n},\ m \neq n$

4.4.2 $(b^2-by+y^2)(x-a)$

4.4.3 $\dfrac{b(b-1}{x+3}$

4.4.4 $\dfrac{1}{(x-2)(1-x)}$

4.4.5 1

4.4.6 $\dfrac{(y-2x)(2x+y)^2}{2x^4y^2}$

4.4.7 $-q(q-1)$

Soluciones de capítulo 5

5.2.1 $\frac{-1}{2}\sqrt{6-4x}$

5.2.2 $\frac{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{2(x+1)}$

5.2.3 $\frac{(2-x)(2+x)\sqrt[3]{x-1}}{2(x-1)}$

5.2.4 $\frac{2}{\sqrt[4]{2xy^2z^3}}$

5.2.5 $\frac{1}{\sqrt{x+2}(x^2-2x+4)}$

5.2.6 $\frac{-\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}{2}$

5.2.7 $\frac{(11-2x)(3+2\sqrt{x+1})}{5-4x}$

5.2.8 $x-4\sqrt{y}$

5.2.9 $\frac{4x-1}{(x+3)(2x+\sqrt{13x-3})}$

5.2.10 $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$

5.2.11 $2(4-10\sqrt[3]{x}+25\sqrt[3]{x^2})$

5.2.12 $\frac{(x+y)\left[4\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[3]{x^2+2x}+9\sqrt[3]{(x+2)^2}\right]}{-19x-54}$

5.2.13 $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}$