PAEM Proyecto de Apoyo a la Educación Matemática

TEC Tecnológico de Costa Rica

Material de Apoyo

9°

Colaboladores:

Jordy Alfaro Brenes

Christian Duarte Mayorga

Edgar Solano Solano

María José Gómez Ramírez.

Leyes de potencias en $\mathbb{R}$

Definición 1 (Leyes de Potencias)

Sean a y b dos números reales; y sea m y n números enteros, entonces son válidas las siguientes igualdades:

1. Todo número real, diferente de cero, elevado a la cero es igual a la unidad:

$$a^0 = 1, \qquad a \neq 0$$

2. Todo número diferente de cero elevado a un exponente negativo es igual al recíproco del número dado pero con exponente positivo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

3. Para multiplicar cantidades de igual base se conserva la base y se suman los exponentes:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

4. Para calcular la potencia de un producto se eleva a potencia cada factor con el mismo exponente:

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

5. Para elevar a potencia una potencia, se conserva la base y se multiplican los exponentes:

$$(a^n)^m = (a)^{n \cdot m}$$

6. Para calcular la potencia de un cociente, con divisor distinto de cero, se eleva cada término al mismo exponente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$$

7. Para dividir cantidades de igual base se conserva la base y se restan los exponentes:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$$

Expresión radical en $\mathbb{R}$

Si n es un número entero positivo y x es un número real, donde $x \geq 0$ si n es par, se define y se denota la raíz enésima de x como:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

A x se le denomina **subradical**, a n **índice** de la raíz y el símbolo $\sqrt{\ }$ es el signo radical.

Detalles Importantes

1. Si el subradical es positivo, la raíz enésima esta definida y es positiva.

$$\sqrt{100},\ \sqrt[10]{1024},\ \sqrt[3]{8}$$

2. Si el subradical es negativo, la raíz enésima está definada solamente si el índice de la raíz es impar, en cuyo caso el resultado es negativo.

$$\sqrt[3]{-8},\ \sqrt[9]{-1},\ \sqrt[7]{-128}$$

3. Si el índice es par y el subradical es negativo la raíz **no** esta definida en el conjunto de los números reales.

$\sqrt{-4}$, $\sqrt[6]{-641}$, **no** estan definidas en $\mathbb{R}$

Propiedades radicales

Definición 2 (Raíz de un Producto)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Si $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ representan números reales, entonces se cumple que:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

La raíz en cualquier índice de un producto de varios factores es igual al producto de las raíces del mismo índice de cada uno de los factores.

Definición 3 (Raíz de un cociente)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$. Si $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ representan números reales, entonces se cumple que:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

La raíz de cualquier índice de un cociente es igual a la raíz de dicho índice del numerador entre la raíz del mismo índice del denominador.

Definición 4 (Raíz de índice n de una potencia con exponente n)

Sean $a, \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$.

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & si \quad n\ es\ impar \\ |a| & si \quad n\ es\ par \end{cases}$$

Operaciones combinadas

Definición 5 (Operaciones combinadas en $\mathbb{R}$)

Jerarquía a seguir:

- Paréntesis $(\ \ )$, $[\ \ ]$, $\{\ \ \}$
- Potencias y raíces
- Multiplicación y división
- Suma y resta

En caso de tener varias operaciones de igual jerarquía para realizarse, se debe iniciar con la operación que se ubique más a la izquierda y posteriormente continuar hacia la derecha

Ejemplo

En el siguiente enlace se puede consultar un ejemplo de operaciones combinadas

https://youtu.be/AZhqZSEd5bk

Ejercicios

A continuación se presentan dos alternativas dónde se puede encontrar ejercicios de operaciones combinadas, la primera puede ser accesada mediante el enlace que se muestra más abajo, y, la segunda es una lista de ejercicios que se presentan en la siguiente página.

https://www.geogebra.org/m/bxjtnd9h

Lista de ejercicios

Realice las operaciones y simplifique al máximo el resultado, según sea el caso.

1. $\sqrt{8}$
2. $\sqrt{27}$
3. $\sqrt[3]{125}$
4. $\sqrt[4]{256}$
5. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$
6. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{84}$
7. $3\sqrt{5} + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{5} - 7\sqrt{6}$
8. $23\sqrt{57} + 12\sqrt{2} - 57\sqrt{57}$
9. $6(5\sqrt{15} + 7\sqrt{15})$
10. $(3\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 5\sqrt{3}) - (5\sqrt{7} - 4\sqrt{7})$
11. $-(8\sqrt{8} - \sqrt{2})\sqrt{2} + (\sqrt{45} \cdot 2\sqrt{5} + 15)$
12. $[4\sqrt{16} - (\sqrt{27} + 3\sqrt{3})\sqrt{3}] \div 2$
13. $-\{[6\sqrt{256} - (15\sqrt[3]{343}) \div (5\sqrt{63})]\sqrt{7}\}$
14. $\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{256}}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{8}{16}}$
15. $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3}$
16. $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{24}}$
17. $\dfrac{-[(\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}) + 15\sqrt{6} - (\sqrt{13} + 6\sqrt{13})]}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{338}}$
18. $\dfrac{[(\sqrt[3]{\sqrt{3}})^4 \cdot \sqrt[3]{3}]^{15}}{\left(\dfrac{-1}{3}\right)^{-14}} \cdot \left(\dfrac{2^{20}}{(-4)^9}\right)^{-1}$
19. $\dfrac{\sqrt[5]{16} \cdot (2^{-1} + 3^{-1}) \cdot \left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-1}}{\sqrt[7]{2^{-1} \cdot (4^{-1})^{\frac{1}{5}}}}$

Soluciones

1. $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$
2. $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$
3. $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$
4. $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{4^4} = 4$
5. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 2} = \sqrt{10}$
6. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{84}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{84} &= \sqrt{3 \cdot 7} + \sqrt{2^2 \cdot 21} \\
&= \sqrt{21} + \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{21} \\
&= \sqrt{21} + 2\sqrt{21} \\
&= 3\sqrt{21}
\end{aligned}$$

7. $3\sqrt{5} + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{5} - 7\sqrt{6}$

$$\begin{aligned}
3\sqrt{5} + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{5} - 7\sqrt{6} &= 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{6} - 7\sqrt{6} \\
&= 7\sqrt{5} - 5\sqrt{6}
\end{aligned}$$

8. $23\sqrt{57} + 12\sqrt{2} - 57\sqrt{57} = -34\sqrt{57} + 12\sqrt{2}$
9. $6(5\sqrt{15} + 7\sqrt{15}) = 6 \cdot (12\sqrt{15}) = 72\sqrt{15}$
10. $(3\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 5\sqrt{3}) - (5\sqrt{7} - 4\sqrt{7})$

$$\begin{aligned}
(3\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 5\sqrt{3}) - (5\sqrt{7} - 4\sqrt{7}) &= (\sqrt{7} + 5\sqrt{3}) - (\sqrt{7}) \\
&= \sqrt{7} + 5\sqrt{3} - \sqrt{7} \\
&= 5\sqrt{3}
\end{aligned}$$

11. $-(8\sqrt{8}-2\sqrt{2})\sqrt{2}+(\sqrt{45}\cdot 2\sqrt{5}+15)$

$$
\begin{aligned}
-(8\sqrt{8}-2\sqrt{2})\sqrt{2}+(\sqrt{45}\cdot 2\sqrt{5}+15) &= -(8\sqrt{2^3}-2\sqrt{2})\sqrt{2}+(\sqrt{3^2\cdot 5}\cdot 2\sqrt{5}+15)\\
&= -(8\cdot 2\sqrt{2}-2\sqrt{2})\sqrt{2}+(3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}+15)\\
&= -(16\sqrt{2}-2\sqrt{2})\sqrt{2}+(3\cdot 2\sqrt{5\cdot 5}+15)\\
&= -(14\sqrt{2})\sqrt{2}+(6\sqrt{5^2}+15)\\
&= -14\sqrt{2\cdot 2}+(6\cdot 5+15)\\
&= -14\cdot 2+(30+15)\\
&= -28+45\\
&= 17
\end{aligned}
$$

12. $[4\sqrt{16}-(\sqrt{27}+3\sqrt{3})\sqrt{3}]\div 2$

$$
\begin{aligned}
[4\sqrt{16}-(\sqrt{27}+3\sqrt{3})\sqrt{3}]\div 2 &= [4\sqrt{4^2}-(\sqrt{3^2\cdot 3}+3\sqrt{3})\sqrt{3}]\div 2\\
&= [4\cdot 4-(3\sqrt{3}+3\sqrt{3})\sqrt{3}]\div 2\\
&= [16-(6\sqrt{3})\sqrt{3}]\div 2\\
&= [16-(6\sqrt{3\cdot 3})]\div 2\\
&= [16-(6\sqrt{3^2})]\div 2\\
&= [16-(6\cdot 3)]\div 2\\
&= [16-(18)]\div 2\\
&= -2\div 2\\
&= -1
\end{aligned}
$$

13. $-\{[6\sqrt{256}-(15\sqrt[3]{343})\div(5\sqrt{63})]\sqrt{7}\}$

$$
\begin{aligned}
-\{[6\sqrt{256}-(15\sqrt[3]{343})\div(5\sqrt{63})]\sqrt{7}\} &= -\{[6\sqrt{16^2}-(15\sqrt[3]{7^3})\div(5\sqrt{3^2\cdot 7})]\sqrt{7}\}\\
&= -\{[6\cdot 16-(105)\div(15\sqrt{7})]\sqrt{7}\}\\
&= -\{[96-(105)\div(15\sqrt{7})]\sqrt{7}\}\\
&= -\left\{\left[96-\frac{105}{15\sqrt{7}}\right]\sqrt{7}\right\}\\
&= -\left\{\left[96-\frac{\cancel{105}^{\,7}}{\cancel{15}\sqrt{7}}\right]\sqrt{7}\right\}\\
&= -\left\{\left[96-\frac{7}{\sqrt{7}}\right]\sqrt{7}\right\}\\
&= -\left\{96\sqrt{7}-\frac{7\cancel{\sqrt{7}}}{\cancel{\sqrt{7}}}\right\}\\
&= -\{96\sqrt{7}-7\}\\
&= -96\sqrt{7}+7
\end{aligned}
$$

14. $\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{256}}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{8}{16}}$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\sqrt[4]{256}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{8}{16}} &= \sqrt{\frac{\sqrt[4]{4^4}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\cancel{8}^{\,1}}{\cancel{16}_{\,2}}}\\
&= \sqrt{\frac{4}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\\
&= \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\\
&= \sqrt{2\cdot\frac{1}{2}}\\
&= \sqrt{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}}\\
&= \sqrt{1}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

15. $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}=3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{3^3}=\sqrt[4]{27}$

16. $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{24}}$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{24}} &= \frac{\sqrt{3^2\cdot 2}}{\sqrt{2^2\cdot 2\cdot 3}}\\
&= \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2\cdot 3}}\\
&= \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}\\
&= \frac{3\cancel{\sqrt{2}}}{2\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}}\\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

17. $\dfrac{-[(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2})+15\sqrt{6}-(\sqrt{13}+6\sqrt{13})]}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{338}}$

$$\begin{aligned}
\frac{-[(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2})+15\sqrt{6}-(\sqrt{13}+6\sqrt{13})]}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{338}} &= \frac{-[(\sqrt{3\cdot 2})+15\sqrt{6}-(7\sqrt{13})]}{\sqrt{2^2\cdot 13}\cdot\sqrt{13^2\cdot 2}}\\
&= \frac{-[\sqrt{6}+15\sqrt{6}-7\sqrt{13}]}{2\sqrt{13}\cdot 13\sqrt{2}}\\
&= \frac{-[16\sqrt{6}-7\sqrt{13}]}{2\cdot 13\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}}\\
&= \frac{-16\sqrt{6}+7\sqrt{13}}{26\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}}\\
&= \frac{-16\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{26\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}}+\frac{7\sqrt{13}}{26\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}}\\
&= \frac{\overset{-8}{\cancel{-16}}\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}{\underset{}{\overset{13}{\cancel{26}}}\sqrt{13}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}+\frac{7\cancel{\sqrt{13}}}{26\cancel{\sqrt{13}}\cdot\sqrt{2}}\\
&= \frac{-8\sqrt{3}}{13\sqrt{13}}+\frac{7}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

18. $\dfrac{[(\sqrt[3]{\sqrt{3}})^4 \cdot \sqrt[3]{3}]^{15}}{\left(\dfrac{-1}{3}\right)^{-14}} \cdot \left(\dfrac{2^{20}}{(-4)^9}\right)^{-1}$

$$
\begin{aligned}
\frac{[(\sqrt[3]{\sqrt{3}})^4 \cdot \sqrt[3]{3}]^{15}}{\left(\dfrac{-1}{3}\right)^{-14}} \cdot \left(\frac{2^{20}}{(-4)^9}\right)^{-1} &= \frac{[\left(\sqrt[3]{3^{\frac{1}{2}}}\right)^4 \cdot 3^{\frac{1}{3}}]^{15}}{(3)^{14}} \cdot \frac{(-4)^9}{2^{20}} \\
&= \frac{[\left(\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^4 \cdot 3^{\frac{1}{3}}]^{15}}{(3)^{14}} \cdot \frac{(-1\cdot 4)^9}{2^{20}} \\
&= \frac{[\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}\cdot 4} \cdot 3^{\frac{1}{3}}]^{15}}{3^{14}} \cdot \frac{(-1\cdot 2^2)^9}{2^{20}} \\
&= \frac{[\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}]^{15}}{3^{14}} \cdot \frac{(-1)^9\cdot (2^2)^9}{2^{20}} \\
&= \frac{[3^{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}]^{15}}{3^{14}} \cdot \frac{-1\cdot (2^{2\cdot 9})}{2^{20}} \\
&= \frac{[3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}]^{15}}{3^{14}} \cdot \frac{-1\cdot (2^{18})}{2^{20}} \\
&= \frac{[3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}]^{15}}{3^{14}} \cdot \frac{-1}{2^{20-18}} \\
&= \frac{[3^1]^{15}}{3^{14}} \cdot \frac{-1}{2^2} \\
&= \frac{3^{15}}{3^{14}} \cdot \frac{-1}{4} \\
&= 3^1 \cdot \frac{-1}{4} \\
&= \frac{-3}{4}
\end{aligned}
$$

19. $$\dfrac{\sqrt[5]{16}\cdot(2^{-1}+3^{-1})\cdot\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-1}}{\sqrt[7]{2^{-1}\cdot(4^{-1})^{\frac{1}{5}}}}$$

$$\begin{aligned}
\dfrac{\sqrt[5]{16}\cdot(2^{-1}+3^{-1})\cdot\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-1}}{\sqrt[7]{2^{-1}\cdot(4^{-1})^{\frac{1}{5}}}} &= \dfrac{\sqrt[5]{2^4}\cdot\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)\cdot[3+2]^{-1}}{\sqrt[7]{2^{-1}\cdot((2^2)^{-1})^{\frac{1}{5}}}}\\
&= \dfrac{2^{\frac{4}{5}}\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)\cdot[5]^{-1}}{\sqrt[7]{2^{-1}\cdot(2^{-2})^{\frac{1}{5}}}}\\
&= \dfrac{2^{\frac{4}{5}}\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)\cdot\dfrac{1}{5}}{\sqrt[7]{2^{-1}\cdot 2^{\frac{-2}{5}}}}\\
&= \dfrac{2^{\frac{4}{5}}\cdot\dfrac{\cancel{5}}{6}\cdot\dfrac{1}{\cancel{5}}}{\sqrt[7]{2^{-1+\frac{-2}{5}}}}\\
&= \dfrac{2^{\frac{4}{5}}\cdot\dfrac{1}{6}}{\sqrt[7]{2^{\frac{-7}{5}}}}\\
&= \dfrac{\dfrac{2^{\frac{4}{5}}}{6}}{(2^{\frac{-7}{5}})^{\frac{1}{7}}}\\
&= \dfrac{\dfrac{2^{\frac{4}{5}}}{2\cdot 3}}{(2^{\frac{\cancel{-7}}{5}})^{\frac{1}{\cancel{7}}}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{2^{\frac{4}{5}-1}}{3}}{2^{\frac{-1}{5}}}$$

Extremos por extremos y medios por medios $\rightarrow$ $= \frac{\frac{2^{\frac{-1}{5}}}{3}}{\frac{2^{\frac{-1}{5}}}{1}}$

$$= \frac{2^{\frac{-1}{5}}}{3 \cdot 2^{\frac{-1}{5}}}$$

$$= \frac{2^{\frac{-1}{5}-\frac{-1}{5}}}{3}$$

$$= \frac{2^0}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Referencias

[1] Castro , D. (2018). Compilación: Noveno Año. Manuscrito no públicado. Cartago, Costa Rica

[2] Chavarría, J. Gutiérrez, M. Rodríguez, N. (2016). El conjunto de los Números Reales. Cartago, Costa Rica

[3] Ministerio de Educación Publica . (2017). Reforma Curricular en ética, Estética y Ciudadanía: Programas de Estudio de Matemáticas.Recuperado el 16 de noviembre del 2017 de: enlace