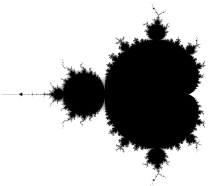
Diseño y análisis de la convergencia y estabilidad de métodos iterativos óptimos sin memoria para la resolución de ecuaciones no lineales

Armando Gabriel Solís Zúñiga

2019



Agenda

Introducción

Ecuaciones no lineales sin solución analítica.
+

Introducción

Ecuaciones no lineales sin solución analítica.

+

Métodos iterativos (Newton-Rapson).

+

Introducción

Ecuaciones no lineales sin solución analítica.

+

Métodos iterativos (Newton-Rapson).

+

Convergencia y eficiencia.

+

Introducción

Ecuaciones no lineales sin solución analítica.

+

Métodos iterativos (Newton-Rapson).

+

Convergencia y eficiencia.

+

Dinámica compleja.

Convergencia

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ entonces, se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge a α si

$$\lim_{n \to \infty} |x_n - \alpha| = 0.$$

Orden de convergencia

Si, además, existen: una constante $0 < c \quad 1$, un natural $n_0 \quad 0$ y un entero $p \quad 1$ tales que, para todo $n > n_0$:

$$|x_{n+1} \qquad | \quad c|x_n \qquad |^p;$$

Orden de convergencia

Si, además, existen: una constante $0 < c \leq 1$, un natural $n_0 \geq 0$ y un entero $p \geq 1$ tales que, para todo $n > n_0$:

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq c|x_n - \alpha|^p ;$$

o bien:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = c ;$$

entonces, se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge a α con al menos orden p.

Definiciones básicas

Orden de convergencia

Si, además, existen: una constante $0 < c \le 1$, un natural $n_0 \ge 0$ y un entero $p \ge 1$ tales que, para todo $n > n_0$:

$$|x_{n+1} - \alpha| \le c|x_n - \alpha|^p ,$$

o bien:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = c ,$$

entonces, se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge a α con al menos orden p.

Orden de convergencia por medio de la ecuación del error

Si $e_n = x_n$ denota el error en la n-ésima iteración, la relación:

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1});\ c\ 2\ \mathrm{R}$$

se conoce como ecuación del error.

Orden de convergencia por medio de la ecuación del error

Si $e_n = x_n$ denota el error en la n-ésima iteración, la relación:

$$e_{n+1} = c e_n^p + O(e_n^{p+1}); \; c \; 2 \; \mathrm{R}$$

se conoce como ecuación del error.

Al valor p obtenido se le conoce como el orden del método.

Métodos multipasos

Se le llama método multipaso a aquel que tiene la siguiente estructura:

$$
\begin{aligned}
y1_n &= G_1(x_n);\\
y2_n &= G_2(x_n);\\
y3_n &= G_3(x_n);\\
\vdots & \quad \vdots \quad \vdots\\
x_{n+1} &= G(x_n; y1_n; y2_n; y3_n; :::)
\end{aligned}
$$

Ejemplo de método multipaso:

$$
\begin{aligned}
y_k &= x_k \quad \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; \\
u_k &= y_k \quad \frac{f(y_k)}{f'(y_k)}; \\
x_{k+1} &= u_k \quad \frac{f(u_k)}{f'(u_k)}
\end{aligned}
$$

De niciones básicas

Evaluaciones funciones

Sea d el número de evaluaciones funcionales de un método iterativo.

Evaluaciones funciones

Sead el número de evaluaciones funcionales de un método iterativo.

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
y_k &= x_k \quad \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; \\
x_{k+1} &= y_k \quad \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}
\end{aligned}
$$

Evaluaciones funcionales: $f(x_k)$, $f'(x_k)$ y $f(y_k)$

$d = 3$

De niciones básicas

E ciencia

Se de ne la e ciencia de un método iterativo como:

$$I = \frac{p}{d}$$

Definiciones básicas

Eficiencia

Se define la eficiencia de un método iterativo como:

$$I = \frac{p}{d}$$

Índice de eficiencia

Se define el índice de eficiencia de un método iterativo de la siguiente manera:

$$EI = p^{1/d}$$

Definiciones básicas

Eficiencia

Se define la eficiencia de un método iterativo como:

$$I = \frac{p}{d}$$

Índice de eficiencia

Se define el índice de eficiencia de un método iterativo de la siguiente manera:

$$EI = p^{1/d}$$

En ambos casos p es el orden de convergencia y d es el número de evaluaciones funcionales.

Orden de convergencia computacional

$$p \approx COC = \frac{\ln|(x_{k+1} - \alpha)/(x_k - \alpha)|}{\ln|(x_k - \alpha)/(x_{k-1} - \alpha)|}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

De niciones básicas

Orden de convergencia computacional

$$p \quad COC = \frac{\ln|(x_{k+1} \quad)/(x_k \quad)|}{\ln|(x_k \quad)/(x_{k \; 1} \quad)|}; \quad k = 1; 2; \ldots$$

solución de $f(x) = 0$.

De niciones básicas

Orden de convergencia computacional aproximado

$$p \approx ACOC = \frac{\ln|(x_{k+1}-x_k)/(x_k-x_{k-1})|}{\ln|(x_k-x_{k-1})/(x_{k-1}-x_{k-2})|}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

De niciones básicas

Conjetura de Kung y Traub

La conjetura de Kung y Traub de nen que un método es óptimo si cump la siguiente igualdad:

$$p = 2^{d-1}$$

p es el orden de convergencia y d es el número de evaluaciones funcionale

Métodos sin memoria

Sea G un operador. Se le llama método sin memoria a aquel que tiene l
siguiente estructura:

$$x_{n+1} = G(x_n)$$

Métodos con memoria

Sea G un operador. Se le llama método con memoria a aquel que tiene
siguiente estructura:

$$x_{n+1} = G(x_n; x_{n-1}; x_{n-2}; \ldots)$$

Métodos multipasos.

Sobre los métodos iterativos en estudio

- Métodos multipasos.
- Métodos sin memoria.

Sobre los métodos iterativos en estudio

Métodos multipasos.

Métodos sin memoria.

Métodos óptimos, según la conjetura de Kung y Traub.

Sobre los métodos iterativos en estudio

Métodos multipasos.

Métodos sin memoria.

Métodos óptimos, según la conjetura de Kung y Traub.

Métodos que funcionan en $\mathbb{C}$.

De nición: Punto jo

Dado un operador $G : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ de nido sobre la esfera de Riemann, un punto jo $\hat{z}$ es aquel que se mantiene invariante al operador G, o sea:

$$G(\hat{z}) = \hat{z}$$

De niciones sobre dinámica compleja

De nición: Punto jo

Dado un operador $G : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ de nido sobre la esfera de Riemann, un punto jo $\hat{z}$ es aquel que se mantiene invariante al operador G, o sea:

$$G(\hat{z}) = \hat{z}$$

Puntos jos extraños: puntos jos que no son soluciones de la ecuac $f(z) = 0$.

De niciones sobre dinámica compleja

De nición: Punto jo

Dado un operador $G : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ de nido sobre la esfera de Riemann, un punto jo $\hat{z}$ es aquel que se mantiene invariante al operador G, o sea:

$$G(\hat{z}) = \hat{z}$$

Puntos jos extraños: puntos jos que no son soluciones de la ecuac
$f(z) = 0$.

Nota: $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

De niciones sobre dinámica compleja

De nición: Órbita de un punto

Dada una función racional $R : \hat{C} \to \hat{C}$ de nida sobre la esfera de Riemann, la órbita de un punto z_0 es la sucesión de puntos:

$$\{z_0, R(z_0), R^2(z_0), \ldots, R^n(z_0), \ldots\}$$

del plano complejo generada por el método iterativo.

Figura: Órbita de un punto.

Definiciones sobre dinámica compleja

Definición: punto k-periódico

Dada una función racional $R : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ definida sobre la esfera de Riemann. Un punto $\hat{z}$ es k-periódico si se cumple que:

$$R^k(\hat{z}) = \hat{z} \text{ y } R^p(\hat{z}) \neq \hat{z} \text{ para } p = 1, 2, \ldots, k-1.$$

De niciones sobre dinámica compleja

Figura: Órbita de periodo tres.

De niciones sobre dinámica compleja

Estabilidad de puntos jos

Los puntos jos se pueden clasi car según el comportamiento del operad
derivada sobre ellos, así, un punto jo $\hat{z}$ puede ser:

Estabilidad de puntos jos

Los puntos jos se pueden clasi car según el comportamiento del operac derivada sobre ellos, así, un punto $\hat{z}$ puede ser:

- Atractor, si $|R'(\hat{z})| < 1$

De niciones sobre dinámica compleja

Estabilidad de puntos jos

Los puntos jos se pueden clasi car según el comportamiento del operad derivada sobre ellos, así, un punto $\hat{z}$ puede ser:

- Atractor, si $|R'(\hat{z})| < 1$
- Superatractor, si $|R'(\hat{z})| = 0$

De niciones sobre dinámica compleja

Estabilidad de puntos jos

Los puntos jos se pueden clasi car según el comportamiento del opera
derivada sobre ellos, así, un punto jo $\hat{z}$ puede ser:

- Atractor, si $|R'(\hat{z})| < 1$
- Superatractor, si $|R'(\hat{z})| = 0$
- Repulsor, si $|R'(\hat{z})| > 1$

De niciones sobre dinámica compleja

Estabilidad de puntos jos

Los puntos jos se pueden clasi car según el comportamiento del operad
derivada sobre ellos, así, un punto jo $\hat{z}$ puede ser:

- Atractor, si $|R'(\hat{z})| < 1$
- Superatractor, si $|R'(\hat{z})| = 0$
- Repulsor, si $|R'(\hat{z})| > 1$
- Parabólico o indiferente, si $|R'(\hat{z})| = 1$

De niciones sobre dinámica compleja

Figura: Operador |R'|

Definiciones sobre dinámica compleja

Estabilidad de puntos periódicos

La estabilidad de los puntos k-periódicos se puede calcular evaluando $|R'(\hat{z})|$ en todos los puntos de la órbita, luego, se dice que la órbita periódica de periodo k es **atractora** si:

$$|R'(\hat{z}_0)R'(\hat{z}_1)\cdots R'(\hat{z}_k)| < 1$$

Definiciones sobre dinámica compleja

Cuencas de atracción

La cuenca de atracción de un atractor z^* es el conjunto de preimágenes de cualquier orden:

$$A(z^*) = \{z_0 \in \hat{\mathbb{C}} : R^n(z_0) \to z^*,\ n \to \infty\}$$

Cuencas de atracción

La cuenca de atracción de un atractor z es el conjunto de preimágenes de cualquier orden:

$$A(z) = \{ z_0 \in \hat{\mathbb{C}} : R^n(z_0) \to z,\ n \to \infty \}$$

Las cuencas de atracción son el conjunto de todas las órbitas posible un atractor, por tanto indican las regiones de convergencia de un méto iterativo.

De niciones sobre dinámica compleja

Figura: Cuenca de atracción de $z = 0$

De niciones sobre dinámica compleja

El conjunto de todas las cuencas de atracción se llama conjunto de Fa
F, y la frontera entre las componentes conexas de las cuencas de atrac
se llama conjunto de Julia J.

De niciones sobre dinámica compleja

El conjunto de todas las cuencas de atracción se llama conjunto de Fa
F, y la frontera entre las componentes conexas de las cuencas de atrac
se llama conjunto de Julia J.

Cuencas de atracción inmediata

La cuenca de atracción inmediata de un punto $\hat{z}_j$ œes la componente conexa de $A(\hat{z})$ que contiene a $\hat{z}$.

Figura: Cuenca de atracción inmediata de $z = 0$

De niciones sobre dinámica compleja

Puntos críticos

Un punto crítico de un operador R es un punto z para el que la derivada de la función de punto jo se anula, es decir:

$$R'(z) = 0$$

De niciones sobre dinámica compleja

Puntos críticos

Un punto crítico de un operador R es un punto z para el que la derivada de la función de punto jo se anula, es decir:

$$R'(z) = 0$$

Puntos críticos libres: puntos críticos que no son puntos jos superatractor

Definiciones sobre dinámica compleja

Puntos críticos

Un punto crítico de un operador R es un punto z para el que la derivada de la función de punto fijo se anula, es decir:

$$R'(z) = 0$$

Puntos críticos libres: puntos críticos que no son puntos fijos superatractor

Teorema de Fatou y Julia

La cuenca de atracción inmediata de un punto k-periódico contiene, al menos, un crítico.

De niciones sobre dinámica compleja

Métodos multipasos

Método de Traub de orden 3

$$
\begin{aligned}
y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; \\
x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}
\end{aligned}
$$

Evaluaciones funcionales $f(x_k)$, $f'(x_k)$ y $f(y_k)$.

Método de Traub de orden 3

$$
\begin{aligned}
y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\
x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}
\end{aligned}
$$

Evaluaciones funcionales: $f(x_k)$, $f'(x_k)$ y $f(y_k)$.
No es óptimo.

Método de Jarratt de orden 4

$$
\begin{aligned}
y_k &= x_k - \frac{2}{3}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; \\
x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{2}\,\frac{3f'(y_k)+f'(x_k)}{3f'(y_k)-f'(x_k)}\,\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.
\end{aligned}
$$

Evaluaciones funcionales: $f(x_k)$, $f'(x_k)$ y $f'(y_k)$.

Método de Jarratt de orden 4

$$
\begin{aligned}
y_k &= x_k - \frac{2}{3}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\\
x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{2}\,\frac{3f'(y_k)+f'(x_k)}{3f'(y_k)-f'(x_k)}\,\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.
\end{aligned}
$$

Evaluaciones funcionales $f(x_k)$, $f'(x_k)$ y $f'(y_k)$.

Es óptimo.

Método familia de Chun

$$
\begin{aligned}
y_k &= x_k \quad \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; \\
x_{k+1} &= y_k \quad H(t_k)\frac{f(y_k)}{f'(x_k)}; \; t_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}
\end{aligned}
$$

Método familia de Chun

$$
\begin{aligned}
y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\
x_{k+1} &= y_k - H(t_k)\frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad t_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}
\end{aligned}
$$

Particularmente si la función H cumple ciertas condiciones entonces el método es de orden 4, haciendo el método óptimo.

Métodos multipasos

Familia de métodos de Chun:

Métodos multipasos

Familia de métodos de Chun:
Chun:

$$
\begin{aligned}
y_k &= x_k \quad \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; \\
x_{k+1} &= y_k \quad {\color{blue}(1 + 2\,t_k)}\,\frac{f(y_k)}{f'(x_k)}:
\end{aligned}
$$

Familia de métodos de Chun:

Chun:

$$
\begin{aligned}
y_k &= x_k \quad \frac{f(x_k)}{f'(x_k)};\\
x_{k+1} &= y_k \quad (1 + 2\,t_k)\,\frac{f(y_k)}{f'(x_k)}:
\end{aligned}
$$

Ostrowski, caso particular de la familia King para $\quad = \quad 2$:

$$
\begin{aligned}
y_k &= x_k \quad \frac{f(x_k)}{f'(x_k)};\\
x_{k+1} &= y_k \quad \frac{1 + (2 + \quad)t_k}{1 + \quad t_k}\,\frac{f(y_k)}{f'(x_k)}:
\end{aligned}
$$

Familia de métodos de Chun:

Chun:

$$
\begin{aligned}
y_k &= x_k \quad \frac{f(x_k)}{f^{0}(x_k)};\\
x_{k+1} &= y_k \quad (1+2\,t_k)\,\frac{f(y_k)}{f^{0}(x_k)}:
\end{aligned}
$$

Kung y Traub:

$$
\begin{aligned}
y_k &= x_k \quad \frac{f(x_k)}{f^{0}(x_k)};\\
x_{k+1} &= y_k \quad \frac{1}{(1 \quad t_k)^2}\,\frac{f(y_k)}{f^{0}(x_k)}:
\end{aligned}
$$

Ostrowski, caso particular de la familia King para $\quad = \quad 2$:

$$
\begin{aligned}
y_k &= x_k \quad \frac{f(x_k)}{f^{0}(x_k)};\\
x_{k+1} &= y_k \quad \frac{1+(2+\quad)t_k}{1+\quad t_k}\,\frac{f(y_k)}{f^{0}(x_k)}:
\end{aligned}
$$

Familia de métodos de Chun:

Chun:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - (1+2\,t_k)\frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned}$$

Kung y Traub:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{1}{(1-t_k)^2}\frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned}$$

Ostrowski, caso particular de la familia King para $\beta = -2$:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{1+(2+\beta)t_k}{1+\beta\, t_k}\frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned}$$

Zhao et al.:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{1+2\,t_k + t_k^2}{1-4t_k^2}\frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{aligned}$$

Teorema

Sea $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en cada punto del intervalo abierto I tal que $\alpha \in I$, es una raíz simple de la ecuación no lineal $f(x) = 0$. Sea $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cualquier función suficientemente diferenciable tal que $H(0) = 1$, $H'(0) = 2$ y $|H''(0)| < \infty$. Entonces, si la estimación inicial x_0 está suficientemente cerca de la solución α, la sucesión $\{x_k\}_{k \geq 0}$ obtenida, usando el método con función peso de Chun, converge a α, el orden de convergencia local es al menos 4 y su ecuación del error es:

$$e_{k+1} = \left(\left(5 - \frac{H''(0)}{2}\right) C_2^3 - C_2 C_3 \right) e_k^4 + O(e_k^5);$$

donde $C_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$; $j = 2, 3, \ldots$ y $e_k = x_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Método propuesto

Método familia MA1

$$\begin{aligned} y_k &= x_k \quad \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; \\ x_{k+1} &= y_k \quad \frac{1}{1 \quad 2t_k + \quad t_k^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}; \quad t_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)} \end{aligned}$$

Análisis de MA1

Se analizará el método MA1 sobre un polinomio genérico de grado dos $f(z) = (z - a)(z - b)$.

$$y = x - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

Análisis de MA1

Se analizará el método MA1 sobre un polinomio genérico de grado dos $f(z) = (z \quad a)(z \quad b)$.

$$
\begin{aligned}
y &= x \quad \frac{f(z)}{f'(z)} \\
t &= \frac{f(y)}{f(z)}
\end{aligned}
$$

Se analizará el método MA1 sobre un polinomio genérico de grado dos $f(z) = (z \quad a)(z \quad b)$.

$$
\begin{aligned}
y &= x \quad \frac{f(z)}{f'(z)} \\
t &= \frac{f(y)}{f(z)} \\
Of(z) &= y \quad \frac{1}{1 \quad 2t + \quad t} \frac{f(y)}{f'(z)}
\end{aligned}
$$

Se analizará el método MA1 sobre un polinomio genérico de grado dos $f(z) = (z - a)(z - b)$.

$$
\begin{aligned}
y &= x - \frac{f(z)}{f'(z)} \\
t &= \frac{f(y)}{f(z)} \\
Of(z) &= y - \frac{1}{1 - 2t + t}\frac{f(y)}{f'(z)} \\
Of(z) &= \frac{ab - z^2}{a + b - 2z} + \frac{(a - z)^2(b - z)^2}{(a + b - 2z)^3 \left(1 + \frac{(a - z)(-b + z)\left(2(a + b - 2z)^2 + (-a - z)(-b + z)\right)}{(a + b - 2z)^4}\right)}
\end{aligned}
$$

Análisis de MA1

Uso de la Transformación de Möbius:

$$M(z) = \frac{z \quad a}{z \quad b}$$

Análisis de MA1

Uso de la Transformación de Möbius:

$$M\,(z) = \frac{z \quad a}{z \quad b}$$

Por teorema del Escalado:

$$Op(z) = M\,(Of\,(M \quad ^{1}(z))) = \frac{z^4 \quad (1 + \; z)^2 + }{1 + z(2 + \; z + \; z \quad)}$$

Análisis de MA1

Uso de la Transformación de Möbius:

$$M(z) = \frac{z \quad a}{z \quad b}$$

Por teorema del Escalado:

$$Op(z) = M(Of(M^{1}(z))) = \frac{z^4 \quad (1 + z)^2 +}{1 + z(2 + z + z \quad)}$$

Valores que simpli can el operador Op:

$$= 0\,; \quad = \quad 2i; \quad = \quad 1 \text{ y } \quad = \quad 2:$$

Análisis de MA1: puntos jos

$$Op(z) = z$$

Análisis de MA1: puntos jos

$$Op(z) = z$$

Puntos jos:

- $z = 0$
- $z = 1$

$$Op(z) = z$$

Puntos jos:

$z = 0$

$z = 1$

Puntos jos extraños:

$pf_0(\ ) = 1$

$pf_1(\ ) = \frac{1}{4}\ \ 3\ \ p\ \overline{1\ \ 4}\ \ \ p\ \overline{6\ \ 4 + 6\ p\ \overline{1\ \ 4}}$

$pf_2(\ ) = \frac{1}{4}\ \ 3\ \ p\ \overline{1\ \ 4} + p\ \overline{6\ \ 4 + 6\ p\ \overline{1\ \ 4}}$

$pf_3(\ ) = \frac{1}{4}\ \ 3 + p\ \overline{1\ \ 4}\ \ \ p\ \overline{6\ \ 4\ \ 6\ p\ \overline{1\ \ 4}}$

$pf_4(\ ) = \frac{1}{4}\ \ 3 + p\ \overline{1\ \ 4} + p\ \overline{6\ \ 4\ \ 6\ p\ \overline{1\ \ 4}}$

Análisis de MA1: estabilidad de los puntos jos

Teorema

Los puntos jos $z = 0$ y $z = 1$ son superatractores independientemente d valor de , y para $z = 1$ se obtienen los siguientes resultados:

1. Atractor si $+ \dfrac{28}{3} < 8$ en particular superatractor si $=$ 8.
2. Parabólico si $+ \dfrac{28}{3} = 8$
3. Repulsor si $+ \dfrac{28}{3} > 8$

Estabilidad del punto jo extraño pf_0

Análisis de MA1: estabilidad de los puntos jos

Proposición

Los puntos jos extraños $pf_1(\ )$ y $pf_2(\ )$ son:

1. Atractores si $0{:}23822873 < \ < 0{:}25$; en particular superatractor si $0{:}24621119$
2. Indiferentes si $0{:}23822873;\ 0{:}25$
3. Repulsores para valores de diferentes de los anteriores.

Análisis de MA1: estabilidad de los puntos jos

Proposición

Los puntos jos extraños $pf_1(\ )$ y $pf_2(\ )$ son:

1. Atractores si $0.23822873 < \quad < 0.25$; en particular superatractor si $\quad 0.24621119$
2. Indiferentes si $\quad 0.23822873; \quad 0.25$
3. Repulsores para valores de diferentes de los anteriores.

Mientras que los puntos jos extraños $pf_3(\ )$ y $pf_4(\ )$ son:

1. Atractores si $21 < \quad < \quad 12$; en particular superatractor si $\quad 16.2465$
2. Indiferentes si $\quad 21; \quad 12$
3. Repulsores para valores de diferentes de los anteriores.

Proposición

Los puntos jos extraños $pf_1(\ )$ y $pf_2(\ )$ son:

1. Atractores si $0{:}23822873 < \ < 0{:}25$; en particular superatractor si $0{:}24621119$
2. Indiferentes si $0{:}23822873$; $0{:}25$
3. Repulsores para valores de diferentes de los anteriores.

Mientras que los puntos jos extraños $pf_3(\ )$ y $pf_4(\ )$ son:

1. Atractores si $21 < \ < 12$; en particular superatractor si $16{:}2465$
2. Indiferentes si 21; 12
3. Repulsores para valores de diferentes de los anteriores.

Nota: $Op^0(pf_2)$ $Op^0(pf_1) = 0$ y $Op^0(pf_4)$ $Op^0(pf_3) = 0$.

Análisis de MA1: estabilidad de los puntos jos

Estabilidad de los puntos jos extrañospf $_1$( ) y pf $_2$( )

Estabilidad de los puntos jos extrañospf $_3$( ) y pf $_4$( )

Análisis de MA1: puntos críticos

$$Op'(z) = 0$$

Análisis de MA1: puntos críticos

$$Op^0(z) = 0$$

Puntos críticos: $0, 1$ y puntos jos extraños superatractores.

$$Op^{0}(z) = 0$$

Puntos críticos: 0, 1 y puntos jos extraños superatractores.
Puntos críticos libres:

$$cr_1(\ ) = \frac{8+3}{8(1+\ )} \quad \frac{\sqrt{17\ {}^2\ \ 8\ {}^3}}{8\sqrt{1+2\ \ +\ {}^2}} \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(8+3\ )^2}{8(1+\ )^2} \quad \frac{4+4}{2(1+\ )} \quad \frac{12+2\ \ +\ {}^2}{2(1+\ )}}$$

$$cr_2(\ ) = \frac{8+3}{8(1+\ )} \quad \frac{\sqrt{17\ {}^2\ \ 8\ {}^3}}{8\sqrt{1+2\ \ +\ {}^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(8+3\ )^2}{8(1+\ )^2} \quad \frac{4+4}{2(1+\ )} \quad \frac{12+2\ \ +\ {}^2}{2(1+\ )}}$$

$$cr_3(\ ) = \frac{8+3}{8(1+\ )} + \frac{\sqrt{17\ {}^2\ \ 8\ {}^3}}{8\sqrt{1+2\ \ +\ {}^2}} \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(8+3\ )^2}{8(1+\ )^2} \quad \frac{4+4}{2(1+\ )} \quad \frac{12+2\ \ +\ {}^2}{2(1+\ )} +}$$

$$cr_4(\ ) = \frac{8+3}{8(1+\ )} + \frac{\sqrt{17\ {}^2\ \ 8\ {}^3}}{8\sqrt{1+2\ \ +\ {}^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(8+3\ )^2}{8(1+\ )^2} \quad \frac{4+4}{2(1+\ )} \quad \frac{12+2\ \ +\ {}^2}{2(1+\ )} +}$$

$$Con \quad = \frac{\sqrt{1+2\ \ +\ {}^2}\left(\frac{4(8+3\ )}{1+} \quad \frac{(8+3\ )^3}{8(1+\ )^3} + \frac{(8+3\ )\left(12+2\ \ +\ {}^2\right)}{(1+\ )^2}\right)}{\sqrt{17\ {}^2\ \ 8\ {}^3}}$$

Análisis de MA1: puntos críticos

Proposición

El número de puntos críticos extraños del operador $Op(z)$ es 4, excepto en los casos siguientes:

- Si $= 0$ entonces no hay puntos críticos libres.
- Si $= \frac{17}{8}$ entonces hay 2 puntos críticos libres, ambos de multiplicidad dos.
- Si $= \quad 8$ entonces hay 3 puntos críticos libres, uno de ellos de multiplicidad dos.
- Si $= \quad 4$ entonces hay 2 puntos críticos libres.

Análisis de MA1: planos paramétricos

Los planos de parámetros son grá cos de los valores críticos independie del método que permiten determinar de manera visual qué valores de harán que el método sea estable o inestable.

Análisis de MA1: planos paramétricos

Los planos de parámetros son gráficos de los valores críticos independie
del método que permiten determinar de manera visual qué valores harán que el método sea estable o inestable.

Plano de parámetros P_1 del método MA1 para $z = cr_{1;2}(\ )$

Análisis de MA1: planos paramétricos

Los planos de parámetros son grá cos de los valores críticos independie
del método que permiten determinar de manera visual qué valores de harán que el método sea estable o inestable.

Plano de parámetros P_1 del método MA1 para $z = cr_{1;2}(\ )$

Plano de parámetros P_2 del método MA1 para $z = cr_{3;4}(\ )$

Análisis de MA1: planos paramétricos

Los planos de parámetros son grá cos de los valores críticos independie
del método que permiten determinar de manera visual qué valores harán
que el método sea estable o inestable.

Plano de parámetros P_1 del método MA1 para $z = cr_{1;2}(\ )$

Plano de parámetros P_2 del método MA1 para $z = cr_{3;4}(\ )$

Particularmente $cr_1 = \dfrac{1}{cr_2}$ y $cr_3 = \dfrac{1}{cr_4}$ por lo que hay solo dos críticos independientes.

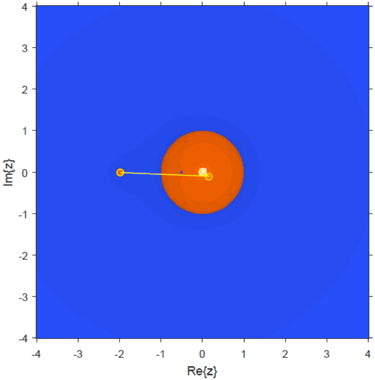
Análisis de MA1: planos dinámicos

Los planos dinámicos son otra forma de ampliar la información obtenida con los planos paramétricos.

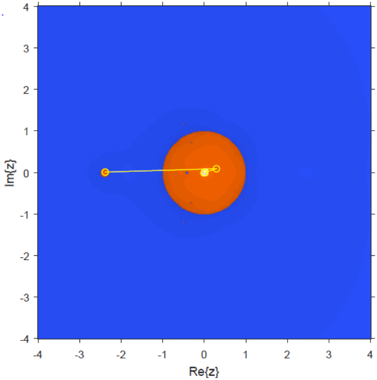
Los planos dinámicos son otra forma de ampliar la información obtenida con los planos paramétricos.

Con los planos dinámicos se pueden visualizar las cuencas de atracción de puntos fijos o periódicos del método en estudio con algún valor del parámetro en particular.

Análisis de MA1: planos dinámicos

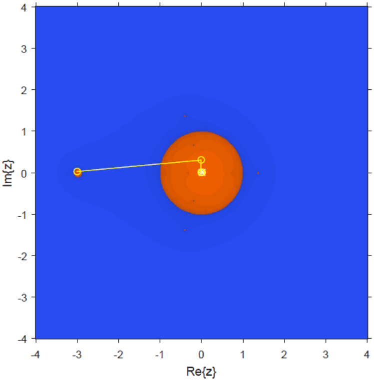


Plano dinámico del método MA1 para = 1

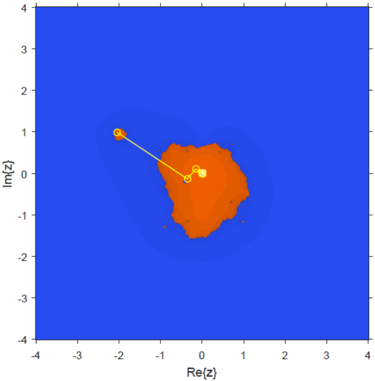


Plano dinámico del método MA1 para = 2

Análisis de MA1: planos dinámicos

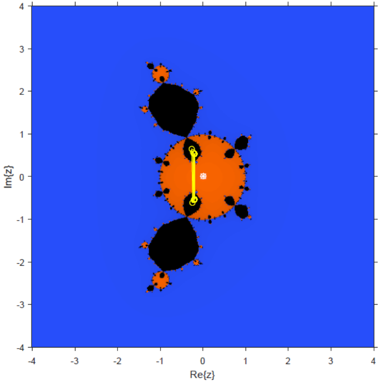


Plano dinámico del método MA1 para $= 4$

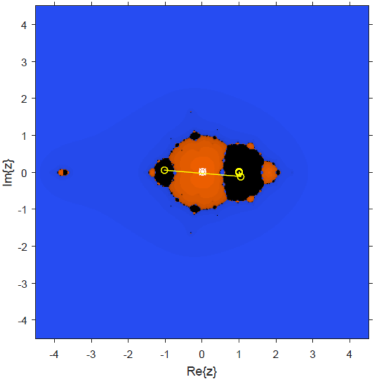


Plano dinámico del método MA1 para $= 2i$

Análisis de MA1: planos dinámicos



Plano dinámico del método MA1 para = 6



Plano dinámico del método MA1 para = 8

Plano dinámico del método MA1 para $= 22$

Plano dinámico del método MA1 para $= 4{:}7 + 5{:}4i$

Análisis de MA1: planos dinámicos

Plano dinámico del método MA1
para $= \quad 22$

Plano dinámico del método MA1
para $= 4{:}7 + 5{:}4i$
Teorema de Sarkovskii

Pruebas numéricas

VPA Mantisa	7000 dígitos
Matlab	R2015a
Tolerancia máxima	10^{-300}
Criterio de parada	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert + \lvert f(x_k)\rvert$

Resultados obtenidos por los métodos iterativos para:

$f(x) = (x \quad 1)^3 \quad 1$

$x_0 = 2{:}5$

Métodos		$jx_{k+1} \quad x_kj$	$f(x_{k+1})$	iter	
Newton	2.0	6.2 e-447	1.1 e-892	11	2.0
Jarratt	2.0	1.9 e-490	3.1 e-1959	6	4.0
Chun	2.0	7.3 e-310	4.1 e-1236	6	4.0
Ostrowski	2.0	1.9 e-490	3.1 e-1959	6	4.0
Kung y Traub	2.0	2.1 e-397	1.0 e-1586	6	4.0
Zhao	2.0	7.9 e-562	3.9 e-2245	6	4.0
MA1 $_{= \quad 1}$	2.0	3.3 e-729	1.3 e-2914	6	4.0
MA1 $_{= \quad 2}$	2.0	5.2 e-477	3.0 e-1905	6	4.0
MA1 $_{= \quad 4}$	2.0	3.9 e-1112	2.4 e-4445	7	4.0
MA1 $_{=2i}$	2.0 - 1.2 e-1489 i	5.0 e-373	4.1 e-1489	6	4.0
MA1 $_{=6}$	2.0	8.0 e-1009	8.5 e-4032	7	4.0
MA1 $_{= \quad 8}$	-	-	-	> 1000	-
MA1 $_{= \quad 22}$	-	-	-	> 1000	-
MA1 $_{=4{:}7+5{:}4i}$	2.0+1.8 e-3713 i	4.3 e-929	7.8 e-3713	7	4.0

Resultados obtenidos por los métodos iterativos para:

$$f(x) = arctan(x)$$

$$x_0 = 1{:}5$$

Métodos		$\|x_{k+1} - x_k\|$	$f(x_{k+1})$	iter	
Newton	-	-	-	> 1000	-
Jarratt	-6.4 e-6559	3.3 e-1312	6.4 e-6559	7	5.0
Chun	-	-	-	> 1000	-
Ostrowski	-1.8 e-6294	2.4 e-1259	1.8 e-6294	7	5.0
Kung y Traub	-1.4 e-3382	5.7 e-677	1.4 e-3382	7	5.0
Zhao	-	-	-	> 1000	-
MA1 $= 1$	-1.4 e-1517	5.7 e-304	1.4 e-1517	5	5.0
MA1 $= 2$	-	-	-	> 1000	-
MA1 $= 4$	-	-	-	> 1000	-
MA1 $= 2i$	-1.6 e-4145 - 1.6 e-4145 i	1.6 e-829	2.3 e-4145	9	5.0
MA1 $= 6$	6.9 e-1823	4.9 e-365	6.9 e-1823	8	5.0
MA1 $= 8$	-	-	-	> 1000	-
MA1 $= 22$	-	-	-	> 1000	-
MA1 $= 4{:}7 + 5{:}4i$	-	-	-	> 1000	-

Resultados obtenidos por los métodos iterativos para:

$$f(x) = \quad sen(x) \quad \frac{x}{2}^{2}$$

$$x_0 = 0{:}5$$

Métodos		$|x_{k+1} \quad x_k|$	$f(x_{k+1})$	iter	
Newton	5.6 e-301	5.6 e-301	8.0 e-602	996	1.0
Jarratt	1.6 e-301	4.9 e-301	6.7 e-603	499	1.0
Chun	3.3 e-301	7.4 e-301	2.8 e-602	594	1.0
Ostrowski	1.6 e-301	4.9 e-301	6.9 e-603	499	1.0
Kung y Traub	1.6 e-301	4.2 e-301	6.6 e-603	540	1.0
Zhao	2.0 e-301	6.6 e-301	1.0 e-602	484	1.0
MA1 $= \quad 1$	2.0 e-301	7.6 e-301	1.0 e-602	449	1.0
MA1 $= \quad 2$	4.5 e-302	2.2 e-301	5.0 e-604	387	1.0
MA1 $= \quad 4$	7.0 e-2115	1.7 e-705	1.2 e-4229	8	3.0
MA1 $= 2i$	-1.4 e-301 + 8.1 e-302 i	4.6 e-301	7.1 e-603	530	1.0
MA1 $= 6$	3.2 e-301	5.8 e-301	2.6 e-602	671	1.0
MA1 $= \quad 8$	-	-	-	> 1000	-
MA1 $= \quad 22$	-	-	-	> 1000	-
MA1 $= 4{:}7 + 5{:}4i$	2.4 e-301 + 2.2 e-302 i	4.1 e-301	1.4 e-602	697	1.0

Conclusiones

El orden de convergencia no es lo único que define cuán eficiente y estable es un método iterativo.

Conclusiones

El orden de convergencia no es lo único que define cuán eficiente y estable es un método iterativo.

En contraste con la teoría sobre dinámica compleja, la práctica numérica dio resultados favorables sobre los métodos en estudio.

Conclusiones

El orden de convergencia no es lo único que define cuán eficiente y estable es un método iterativo.

En contraste con la teoría sobre dinámica compleja, la práctica numérica dio resultados favorables sobre los métodos en estudio.

Se logró encontrar valores de para los que el método MA1 son mejores que los métodos iterativos conocidos.

Conclusiones

El orden de convergencia no es lo único que define cuán eficiente y estable es un método iterativo.

En contraste con la teoría sobre dinámica compleja, la práctica numérica dio resultados favorables sobre los métodos en estudio.

Se logró encontrar valores de para los que el método MA1 son mejores que los métodos iterativos conocidos.

Trabajos futuros: diseño y estudio dinámico de métodos con memoria, métodos para funciones con multiplicidad y para sistemas de ecuaciones no lineales.